

## Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea

Salvador Llinares

Universidad de Alicante (España)

Recibido el 12 de Marzo de 2012; aceptado el 28 de Septiembre e 2012

---

### Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea

#### *Resumen*

*Este trabajo sintetiza en tres ámbitos algunos de los resultados de las investigaciones sobre la construcción del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas en entornos de aprendizaje multimedia que integran espacios de interacción social en contextos b-learning. Estos ámbitos son (i) el papel de la interacción y la negociación de significados en la construcción del conocimiento; (ii) el proceso de instrumentalización del conocimiento de Didáctica de la Matemática en procesos de formación; y (iii) las características de las estructuras argumentativas en los procesos de aprender a conceptualizar la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, se identifican nuevas cuestiones de investigación que emergen desde estas investigaciones.*

**Palabras clave.** Aprendizaje del profesor, mirar con sentido profesional, formación de profesores de matemáticas, entornos de aprendizaje b-learning, interacción social.

### Construção do conhecimento e percebendo profissional para o ensino da matemática. O que estamos aprendendo?

#### *Resumo*

*Este artigo resume entrês áreas alguns dos resultados de pesquisa sobre a construção do conhecimento para o ensino de matemática em ambientes de aprendizagem multimídia que integramos espaços de interação social (b-learning contextos). Estas áreas são: (i) o papel da interação e negociação de sentido na construção do conhecimento, (ii) o processo de instrumentalização do conhecimento da educação matemática nos processos de formação, e (iii) as características das estruturas argumentativas em aprender a conceituar o ensino da matemática.. Por fim, identificar novas questões de pesquisa que surgem a partir dessas investigações.*

**Palavras chave.** Tarefa, Aprendizagem dos professores, olha sentido profissional, educação matemática, profesor, ambientes de aprendizagem b-learning, interação social.

Para citar: Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 53 – 70.

**Knowledge building and development of professional noticing for the mathematics teaching. What are we learning?**

**Abstract**

*This paper synthesizes in three areas some research findings on the construction of knowledge for teaching mathematics in b-learning multimedia environments that integrate social interaction space. These areas are: (i) the role of interaction and meanings negotiation in the construction of knowledge; (ii) the process of instrumentalization of knowledge of mathematics education in the training programs, and (iii) the characteristics of argumentative structures in the process of conceptualization the mathematics teaching. Finally, new research questions emerging from these studies are identified.*

**Key words.** Teachers' learning, professional noticing, preservice mathematics teacher education, mathematics teaching, b-learning environments, social interaction

**Construction des connaissances et développer un professionnelle remarquante de la pratique de enseigner les mathématiques dans des environnements en ligne**

**Résumé.**

*Ce document résume les trois domaines dans quelques-uns des résultats de la recherche sur la construction des savoirs de l'enseignement des mathématiques dans les environnements d'apprentissage multimédias qui intègrent des espaces d'interaction sociale b-learning contextes.*

*Ces domaines sont : (i) le rôle de l'interaction et la négociation de sens dans la construction de la connaissance ; (ii) le processus d'instrumentalisation de la connaissance de l'enseignement des mathématiques dans les processus de formation, et (iii) caractéristiques des structures argumentatives dans les processus d'apprentissage de conceptualiser l'enseignement des mathématiques. Enfin, nous identifions de nouvelles questions qui émergent de cette recherche.*

**Mots clés:** L'apprentissage des enseignants, Professionnelle remarquante, la formation des enseignants en mathématiques, b-learning contextes, l'interaction sociale.

Un elemento clave para la mejora de la enseñanza de las matemáticas es la formación de profesores que implica desarrollar la capacidad de aprender a lo largo de la vida y usar los medios tecnológicos que están modificando la manera de producir, transmitir y procesar la información y el conocimiento. Este contexto define una problemática de investigación centrada en comprender cómo los estudiantes para profesor conceptualizan la enseñanza de las matemáticas y pueden generar nuevo conocimiento desde la práctica (Hiebert, Morris, Berk, & Jansen, 2007; Llinares & Krainer, 2006). En particular, un foco de atención se sitúa en las características de los procesos de construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas realizados de manera colaborativa entre los estudiantes para profesor. En este ámbito se han planteado cuestiones de investigación sobre el papel de la interacción en el proceso de construcción del conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas y para el desarrollo de competencias docentes (e.g. organizar el contenido matemático para enseñarlo, analizar el potencial matemático de los problemas, interpretar las producciones de los estudiantes o gestionar el discurso matemático en el aula). Algunas de estas cuestiones de investigación se han centrado en caracterizar los procesos de conceptualización de la enseñanza de las matemáticas desarrollados en contextos virtuales interactivos por los estudiantes para profesor y se sitúan en la intersección de dos líneas de investigación. Por una parte, en cómo se construye el conocimiento sobre la enseñanza y cómo se generan las destrezas para aprender desde la práctica, y por otra parte, sobre el papel de las interacciones en el proceso de construcción de dicho conocimiento. Un foco de atención específico es

cómo las interacciones en espacios sociales creados para resolver determinadas tareas profesionales como el análisis de situaciones de enseñanza específicas proporcionan apoyo para la construcción personal del conocimiento (Borko, Jacobs, Eiteljorg & Pittman, 2006) asumiendo que la mera interacción no genera nuevo conocimiento. Los objetivos de estas investigaciones es aportar información sobre los procesos a través de los cuales los estudiantes para profesor aprenden a conceptualizar la enseñanza de las matemáticas y estar en condiciones de desarrollar una enseñanza acorde con esta conceptualización (Morris, 2006; Penalva, Escudero & Barba, 2006; Star & Strickland, 2007; Van Es & Sherin, 2002). La forma en la que este conocimiento se construye es clave para desarrollar destrezas para aprender desde la propia práctica el conocimiento necesario para enseñar matemáticas. Desde algunas perspectivas teóricas se ha propuesto como hipótesis (Hiebert et al., 2007; Kersting, Givvin, Sotelo & Stigler, 2010) que un camino sistemático para construir el conocimiento necesario para enseñar matemáticas y desarrollar destrezas para generar conocimiento desde la práctica es que los estudiantes para profesor y profesores aprendan a “mirar con sentido” la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje matemático de los estudiantes y expliquen este aprendizaje (o su graduación).

Un contexto particular en el que se ha desarrollado las investigaciones en esta línea usa los estudios de casos y/o con el apoyo de videos que recogen situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como soporte para la introducción de información de didáctica de la matemática que pudiera ser considerada útil para explicar los diferentes aspectos de la enseñanza de las matemáticas. Este tipo de investigación asume que el proceso de “ver de manera profesional” los aspectos relevantes en una lección de matemáticas es una competencia relevante para el profesor de matemáticas y que es una competencia que se puede aprender (Fortuny & Rodríguez, 2012; Sherin, Jacobs & Philipp, 2010; Star & Strickland, 2007). Estos “aspectos relevantes” que los profesores deben aprender a identificar son los que involucran el aprendizaje de una idea matemática a través de una tarea en el sentido de factores que pueden modificar la demanda cognitiva de dicha tarea (Penalva & Llinares, 2011; Stein, Grover, & Henningsen, 1996). En estos momentos, los investigadores intentan comprender mejor este proceso y determinar las relaciones entre las características de las actividades cognitivas y sociales de los estudiantes para profesor y los entornos de aprendizaje diseñados para ello. Esta línea de investigación asume que el proceso de aprender a “ver” los aspectos relevantes de la enseñanza es crítico para desarrollar una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas necesaria para desarrollar una práctica competente (Borko et al., 2006; Lin, 2005; Santagata, Zanoni & Stigler, 2007).

Algunos de los resultados que se están empezando a aportar indican que las discusiones orientadas y/o orquestadas por el formador alrededor de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas ayudan a que los estudiantes para profesor focalicen su atención de manera progresiva sobre diferentes aspectos de la enseñanza que pueden proporcionar información sobre lo que sucede y por qué sucede (Lin, 2005). Por ejemplo, identificar evidencias del aprendizaje matemático de los estudiantes, como un medio para analizar el efecto de la enseñanza y poderla revisar, ha resultado ser difícil de desarrollar y depende de las condiciones en las que se constituyen los entornos de aprendizaje para los estudiantes para profesor (Morris, 2006).

## **1. Construcción del conocimiento e interacción**

Esta problemática de investigación ha puesto de manifiesto la necesidad de caracterizar los procesos de construcción colaborativa del conocimiento que ocurren en discusiones orquestadas por los formadores entre estudiantes para profesor y profesores en cursos de especialización (Even, 1999 y 2005; Lerman & Zehetmeier, 2008; Schrire, 2006). En este contexto, las características del proceso argumentativo de los estudiantes para profesor se relacionan con la forma de participación y la dimensión cognitiva del contenido del discurso que definen la calidad del discurso generado (Andriessen, Erkens, Van de Laak, Peters, & Coirier, 2003; Wever, Schellens, Valke, & Van Keer, 2006). En estos momentos, los resultados de las investigaciones realizadas están permitiendo ir más allá del nivel descriptivo de estas relaciones y están empezando a proporcionar una interpretación significativa de los procesos de construcción del conocimiento y caracterizando grados de adquisición generados (Schire, 2006).

Un contexto particular en el que se están desarrollando estas investigaciones es el que integra foros y debates virtuales como un espacio social que facilita la interacción entre los estudiantes para profesor (Schrire, 2006). Sin embargo, la descripción de la calidad de los procesos de comunicación que se generan utilizando los instrumentos de comunicación que proporciona la tecnología plantea nuevas cuestiones conceptuales y metodológicas. Desde un punto de vista conceptual, Wells (2002) indica que el discurso debe producir progreso en el sentido de qué compartir, cuestionar y revisar opiniones debe conducir a una nueva comprensión de todos los que participan pudiendo llegar a ser superior a la comprensión previa. Una característica adicional a esta hipótesis, que es esencial para que el discurso sea progresivo, es que el contenido del discurso sea considerado un “artefacto del conocimiento” sobre el que los participantes trabajan colaborativamente para mejorar en el sentido de la apropiación por parte de los individuos de los significados que permiten tomar decisiones competentes en contextos específicos. Esta hipótesis sobre el discurso y construcción del conocimiento plantea cuestiones en investigación en educación matemática que han empezado a ser exploradas. En particular, qué formas debe tomar el discurso para considerarlo vinculado a la construcción del conocimiento profesional necesario para enseñar matemáticas y qué tipo de condiciones permiten que esto ocurra de esta manera (Wells, 2002). Las investigaciones realizadas hasta este momento para intentar responder a estas cuestiones asumen que pensamiento y discurso son dos aspectos inseparables de un mismo fenómeno por lo que las aportaciones en los espacios de interacción social son consideradas indicativas de la forma de aprender al manifestar grados de instrumentalización del conocimiento (Andriessen et al., 2003; Rey, Penalva & Llinares, 2006; Prieto & Valls, 2010).

Algunos de los resultados obtenidos en este ámbito indican que la colaboración discursiva entre los estudiantes para profesor en este tipo de entornos de aprendizaje parece fomentar la construcción del conocimiento de didáctica de la matemática que es pertinente para la resolución de las tareas de planificar la enseñanza e interpretar las producciones matemáticas de los estudiantes (Herbst & Chazan, 2003). Este proceso de instrumentalización de las ideas de didáctica de la matemática con el fin de resolver determinadas tareas profesionales utiliza las experiencias previas de los estudiantes para profesor como punto de partida e incorpora los nuevos conocimientos, permitiendo generar nuevos significados al utilizar cuestiones reflexivas que requieren ampliación de información. En este sentido, las interacciones entre los participantes en los entornos de aprendizaje al intentar resolver determinadas

tareas profesionales parecen potenciarse cuando existe un foco de interés compartido haciendo que los estudiantes para profesor se impliquen en actividades conjuntas de identificar y analizar los diferentes aspectos de la enseñanza de las matemáticas, lo que les permite llegar a compartir un cierto nivel de comprensión de la situación.

La perspectiva teórica adoptada en la definición de este problema de investigación (Wells, 2002) subraya el hecho de que el proceso de implicación cognitiva de los estudiantes para profesor de matemáticas (o profesores en contextos de desarrollo profesional) ocurre en un contexto de interacción con otros mientras se resuelve algún tipo de problema con alguna significación para el resolutor. Este proceso de implicación cognitiva toma la forma de un diálogo en el que se proponen soluciones, se realizan añadidos, ampliaciones, objeciones y contraproposiciones desde las aportaciones de los demás (Schire, 2006). De esta manera se asume que el proceso de construcción del conocimiento únicamente tiene significación en el contexto de la acción e interacción conjunta mientras se resuelven problemas profesionales.

Las perspectivas socioculturales del aprendizaje desde las que se han generado las ideas que articulan esta manera de entender el proceso de construcción del conocimiento en los espacios de interacción social (Wells, 2002; Wenger, 1998) definen nuevos aspectos específicos sobre los que hay que indagar para mejorar nuestra comprensión de las relaciones entre las dimensiones personal y social en las que se articulan los procesos de construcción del conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas y del desarrollo de una “mirada profesional” como profesor de matemáticas. En particular, el aprendizaje de los estudiantes para profesor visto desde estas perspectivas socio-culturales tiene que ver con la manera en la que las personas se apropian y llegan a manejar “instrumentos conceptuales” para pensar y actuar (Wenger, 1998). En este contexto la negociación de los significados se sitúa en un proceso que implica participar y “reificar” (objetivizar) produciendo “objetos” (foco de atención alrededor de los cuales se organiza la negociación de los significados). En este proceso, el contenido de las interacciones cuando se están resolviendo tareas con significado para los estudiantes para profesor – e.g. el análisis de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas - puede funcionar como un “objeto mejorable” que proporciona el foco para ir produciendo un discurso que puede llegar a integrar el conocimiento generado. Aquí el texto escrito como una participación en un foro o debate virtual desempeña el papel de artefacto semiótico que apoya la reflexión y revisión recursiva que es una característica importante de la construcción del conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (Wells, 2002).

De esta manera, el proceso por el cual los estudiantes para profesor de matemáticas y los profesores de matemáticas en cursos de especialización aprenden a conceptualizar la enseñanza de las matemáticas se ve como un proceso en el que intervienen dos tipos de acciones cognitivas. Por una parte, desarrollar la capacidad de “identificar” aspectos de la enseñanza de las matemáticas que pueden tener incidencia en el desarrollo del aprendizaje matemático de los estudiantes y, por otra, “interpretar” dichos aspectos desde la información teórica procedente de didáctica de la matemática (Sherin, et al., 2010). Aquí la cuestión específica que se plantea es cómo influyen en el desarrollo de estas acciones cognitivas (i) la interacción entre los estudiantes para profesor cuando resuelven problemas profesionales, (ii) el conocimiento matemático necesario para la enseñanza (Ball, Thames, & Phelps, 2008) y (iii) la orquestación del formador. Las respuestas a esta cuestión pueden ayudar a explicar las características generales de la interacción colectivamente considerada y por tanto del proceso de aprendizaje generado.

## **2. ¿Qué estamos aprendiendo?**

Durante los últimos años se ha intentado dar respuestas a algunas de las cuestiones planteadas en esta agenda de investigación (Borba & Llinares, 2012). Un contexto específico ha sido el uso de entornos de aprendizaje multimedia que integraban espacios de interacción en línea (debates y foros), registros de la práctica (videos y/o descripciones de situaciones de aula en forma de casos), problemas profesionales - e.g. identificar e interpretar características del discurso matemático en el aula, interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, etc - y el conocimiento científico de didáctica de la matemática pertinente para la resolución de estos problemas profesionales (Callejo, Valls, & Llinares, 2007; Valls, Callejo & Llinares, 2008). Las aproximaciones generadas adoptan una metodología basada en los experimentos de enseñanza (design-based research; design experiments, Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003) en diferentes contextos de formación ya que la estructura de los entornos de aprendizaje diseñados influye en la manera en la que los participantes en los entornos de aprendizaje interactúan (forma de participar) y, por tanto, condiciona el proceso de construcción del conocimiento. La Figura 1 muestra las características de una plataforma web construida siguiendo estos principios en el que los entornos de aprendizaje integran espacios de interacción social con la tarea de analizar segmentos de enseñanza (problema profesional) y la incorporación de información teórica desde la didáctica de la matemática (Llinares, Valls & Roig, 2008).

En un contexto b-learning (integrando actividades presenciales con actividades apoyadas en una plataforma web) una cuestión importante es cómo caracterizar los procesos de construcción colaborativa del conocimiento que ocurren en discusiones asincrónicas (debates on-line) (De Wever, Schellens, Valcke & Van Keer, 2006). Aquí, las características del proceso argumentativo de los estudiantes para profesor se relacionan con otras dimensiones que definen la calidad del discurso generado, como son la forma de participar y el contenido del discurso (la información procedente de Didáctica de la Matemática como disciplina científica). Esta situación genera cuestiones específicas que intentan aportar una explicación de los procesos de construcción del conocimiento (su construcción gradual o ausencia de desarrollo) generados en dichos contextos. Desde un punto de vista conceptual, Wells (2002) indica que es en la interacción donde se puede producir progreso en el sentido de que, compartir, cuestionar y revisar opiniones puede conducir a una nueva comprensión de todos los que participan. Una característica adicional a esta hipótesis, esencial para que el discurso sea progresivo, es que el contenido del discurso sea considerado un “artefacto del conocimiento” sobre el que los participantes trabajan colaborativamente para mejorar (Llinares & Olivera, 2008). Esta hipótesis ha planteado cuestiones de investigación en educación matemática sobre qué formas debe tomar el discurso para considerarlo vinculado al desarrollo de una “mirada profesional” del profesor de matemáticas y qué tipo de condiciones permiten que esto ocurra.

The screenshot shows a web browser window with the URL [https://cv1.cgd.ua.es/WebCv/Docencia/Sesiones/Visu\\_sesionAV.asp?Asignatura=&IdSesion=57618pF](https://cv1.cgd.ua.es/WebCv/Docencia/Sesiones/Visu_sesionAV.asp?Asignatura=&IdSesion=57618pF). The main content area is titled "S1: DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA Y CARACTERÍSTICAS DEL AULA" and includes a video player, a list of materials, a list of debates, and a list of controls. The text in the main area describes the session's objectives, methodology, and the structure of the debate.

**S1: DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA Y CARACTERÍSTICAS DEL AULA**  
 (tiempo estimado de realización: 150 min.)

Esta sesión es la primera de un grupo de dos que tienen como objetivo introducirnos en la "Enseñanza de la Resolución de Problemas en Primaria como medio de aprendizaje. Selección y diseño".  
 En esta sesión podrás ver el video de un segmento de una clase de primaria en un colegio público, deberás leer algunos documentos para participar en debates y redactar un informe de síntesis.

**OBJETIVOS SESIÓN UNO:**

- Introducir el manejo de la herramienta "Sesiones Docentes".
- Relacionar la idea de *competencia matemática* y la *resolución de problemas* en *Primaria*.

**METODOLOGÍA**

1. VISIONAR EL VIDEO:  
 -3ªPrimariaS1-Web: "Presentación del contexto y de la tarea. Formulación y Resolución de Problema en 3º de Primaria"

2. LEER DOCUMENTOS DE APOYO:  
 -Transcripción del video 3ªPrimariaS1-Web: "Presentación del contexto y de la tarea. Formulación y Resolución de Problema en 3º de Primaria"  
 -Doc. 1. "Matemáticas escolares y llegar a ser matemáticamente competente". Resumen del apartado "Matemáticas escolares y llegar a ser matemáticamente competente" del documento Llinares (2003) Matemáticas escolares y competencia matemática. (pp 13-15). En M.C. Chamorro (Coord.) Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Pearson- Prentice hall.  
 -Doc2. "Características principales de las aulas que potencian el desarrollo de la Competencia Matemática" Traducción-resumen del documento "Introducing the critical features of classrooms" en Hiebert, J. et al. (1997) Making sense. Teaching and learning mathematics with understanding. Heiseemann, Portsmouth, NH. (pp 7-11)

3. PARTICIPAR EN EL DEBATE QUE CORRESPONDA A TU APELLIDO SIGUIENDO LAS CUESTIONES PLANTeadas EN LA PRESENTACIÓN DEL MISMO:  
 -Debes responder a la cuestión planteada al inicio del debate:  
 "¿Cómo la tarea y la gestión que realiza la profesora apoya el desarrollo de la competencia matemática?"  
 -Debes dar tu opinión sobre las aportaciones de tus compañeros usando los documentos de apoyo.  
 -Debes consensuar una opinión general con el resto de compañeros participantes en el debate.  
 El debate permanecerá activo desde el miércoles 4 de enero de 2006 hasta las 12 de la noche del viernes 13.

4. PRODUCIR UN INFORME-SÍNTESIS EN GRUPO RELATIVO A  
 -la relación existente entre la competencia matemática y la enseñanza de la resolución de problemas.  
 -lo que habéis aprendido en esta sesión y cómo esta herramienta ha favorecido este aprendizaje.  
 El espacio de trabajo creado para realizar el informe-síntesis permanecerá activo desde el miércoles 11 de enero 2006 hasta las 12 de la noche del viernes 13.

**MATERIALES**

- características\_principales\_del\_aula.pdf ( 141,70 Kbyte )
- Competencia\_Matemática.pdf ( 173,27 Kbyte )
- transcripcion\_video3PrimariaS1-web.pdf.zip ( 121,88 Kbyte )
- 3PrimariaS1-web.zip ( 6,13 Kbyte )

**DEBATES**

- Debate S1. Intervalo A-G (NO activo)
- Debate S1. Intervalo I-R (NO activo)
- Debate S1. Intervalo S-V (NO activo)
- Espacio de TrabajoS1. Intervalo A-G (NO activo)
- Espacio de TrabajoS1. Intervalo I-R (NO activo)
- Espacio de TrabajoS1. Intervalo S-V (NO activo)

**CONTROLES**

- practica sesion 0

Figura 1. Plataforma en la que se insertan los entornos de aprendizaje estructurados para integrar espacios de interacción social con la tarea de analizar segmentos de enseñanza desde video-clips y la incorporación de información teórica.

El análisis de la relación entre las formas de participar y la calidad cognitiva del discurso generado en un debate virtual (Clark, Sampson, Weinberger, & Erkens, 2007) entendida como una manifestación de la construcción del conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, ha empezado a proporcionar información sobre la manera en la que los estudiantes para profesor instrumentalizan las ideas teóricas de didáctica de la matemática en el análisis de la enseñanza de las matemáticas. Además, las características de la estructura argumentativa generada por los estudiantes para profesor emergen como una variable con poder explicativo de cómo se da el proceso de instrumentalización en estos contextos. Estos resultados han puesto de manifiesto que la relación entre las dimensiones sociales y personales del aprendizaje pueden ayudarnos a explicar el aprendizaje en este tipo de entornos. Algunos de los resultados obtenidos los podemos sintetizar en tres apartados:

- Interacción, negociación de significados y construcción del conocimiento
- Instrumentalización del conocimiento de didáctica de la matemática, y
- Características de las estructuras argumentativas

## 2.1. Interacción, negociación de significados y construcción del conocimiento

Para Llinares y Valls (2009, 2010) analizaron cómo 61 estudiantes para maestros de primaria participaban en un contexto b-learning durante 4 semanas formado por entornos de aprendizaje diseñados ad hoc (Figura 1) que tenían como objetivo aprender a identificar aspectos relevantes de la enseñanza de la resolución de problemas, identificar características de los problemas de matemáticas en la educación primaria y realizar propuestas de problemas reflejando estas características. Los resultados mostraron que la interacción entre los estudiantes para maestros fue cada

vez más alta y motivada por las contribuciones de otros estudiantes. Los intercambios proporcionaron la oportunidad de identificar y refinar las interpretaciones dadas a los diferentes aspectos de la enseñanza de las matemáticas que eran relevantes para comprender las decisiones de enseñanza de un maestro. Este proceso de refinamiento de las interpretaciones fue motivado por el tipo de tarea propuesta en el entorno de aprendizaje y por el hecho de tener que compartir con otros lo que se estaba comprendiendo. En la tarea inicial los estudiantes para maestro tenían que ver segmentos de lecciones de matemáticas que mostraban sesiones de enseñanza de la resolución de problemas y debían identificar las características de estas lecciones relacionándolas con el aprendizaje matemático de los alumnos (características del problema, interacción maestro-alumnos, ...) y luego diseñar propuestas de acción. Los resultados indicaron que la estructura de estos entornos –el contexto y las tareas propuestas – favorecía la implicación en la negociación de los significados de los estudiantes para maestro en un intento de ampliar su comprensión de la situación. Sin embargo, las acciones de identificar e interpretar los aspectos relevantes de la enseñanza (el contenido de las interacciones) no resultó una tarea fácil aunque la implicación con los demás ayudó a los estudiantes para maestro a generar argumentos cada vez con un mayor nivel cognitivo (Tabla 1). En este caso, la generación de una mayor calidad en las participaciones en los debates en-línea estuvo vinculada un aumento gradual del reconocimiento de la utilidad de la información teórica para identificar e interpretar los sucesos de la clase de matemáticas y para realizar las propuestas de acción. Por consiguiente, en estos entornos, la información teórica proporcionada ayudó a los estudiantes para maestro a empezar a “mirar con sentido” la enseñanza de las matemáticas. Es decir, el uso de la información teórica en la resolución de la tarea propuesta fue lo que permitió caracterizar diferentes niveles de construcción del conocimiento y de desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” (Tabla 1).

Tabla 1. Niveles de construcción del conocimiento y de desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” (Llinares & Valls, 2009)

Niveles	Caracterización
N1. Descriptivo	El estudiante responde describiendo de manera “natural” lo que ve, sin utilizar aquellas ideas de la teoría que son necesarias y relevantes para analizar la situación.
N2. Retórico	Uso de ideas teóricas de los documentos para construir un discurso, sin establecer relaciones entre estas ideas o de ellas con la situación. Se podría decir que falta cohesión en el discurso.
N3. Identificación e inicio de un uso instrumental de la información	Identifica uno o varios aspectos relevantes de la situación y los interpreta utilizando ideas teóricas y los relaciona o no entre ellos.
N4. Teorizar-conceptualizar. Integración relacional	La información teórica se transforma en herramienta conceptual. Las herramientas conceptuales se identifican y se usan integrándolas para dar una respuesta a la tarea.

Desde el punto de vista del aprendizaje - el conocimiento construido y el desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” - se puso de manifiesto la



existencia de grados de desarrollo (Tabla 1) que fueron determinados por las creencias de los estudiantes para maestro sobre lo que debía ser un problema de matemáticas, sobre los objetivos de una sesión de resolución de problemas en la educación primaria y cuál debía ser el papel del maestro en estas sesiones. Una segunda variable que ayuda a explicar el aprendizaje generado en estos entornos fue la manera en la que la información teórica fue usada por los estudiantes para maestro para identificar e interpretar los sucesos del aula. Es decir, la manera en la que la información teórica fue instrumentalizada en el proceso de aprendizaje (Verillon & Rabardel, 1995).

## **2.2. Instrumentalización del conocimiento de Didáctica de la Matemática**

El proceso de instrumentalización de la información procedente de didáctica de la matemática en la resolución de problemas profesionales es un aspecto clave para entender el proceso de aprendizaje en contextos b-learning a través de entornos de aprendizaje como se mostró en las primeras investigaciones realizadas (Llinares & Valls, 2009, 2010). La identificación de las características de la interacción que mediaban los procesos de construcción del conocimiento puso de manifiesto la importancia de la manera en la que las ideas teóricas eran integradas en el discurso generado por los estudiantes para profesor cuando estaban resolviendo problemas profesionales. Para aportar información en relación con esta cuestión, en la investigación de Prieto y Valls (2010) se caracterizó cómo los estudiantes para maestro instrumentaban los significados de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva para la planificación de la enseñanza (tipos de problemas, niveles de dificultad, estrategias que suelen emplear los alumnos de primaria). El análisis de las aportaciones de 9 estudiantes de un grupo de 53, a un debate en línea, determinó diferentes grados de instrumentalización de las ideas sobre los problemas aritméticos elementales que pusieron de manifiesto niveles de complejidad del aprendizaje del conocimiento necesario para ser maestro. Los niveles de instrumentalización de las ideas teóricas se caracterizaron considerando la manera en la que los estudiantes para maestro relacionaban los tipos de problemas aritméticos elementales, los niveles de dificultad y los diferentes tipos de estrategias de resolución empleados por los alumnos de primaria. Esta manera de caracterizar el aprendizaje ponía de manifiesto las dificultades de los estudiantes para maestro para comprender la relación entre el pensamiento matemático de los alumnos de primaria sobre la adición y sustracción y los diferentes tipos de problemas. La tabla 2 muestra las categorías generadas en relación con el uso del conocimiento de didáctica de la matemática que indican niveles de desarrollo del conocimiento y de la competencia docente “mirar con sentido” en el ámbito particular de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva. Las categorías en relación al uso del conocimiento identificadas se pueden relacionar con los niveles de construcción del conocimiento que han sido descritos previamente (Tabla 1).

La manera como los estudiantes para maestro usaron la información teórica en las distintas situaciones de negociación es una manifestación del aprendizaje producido durante el debate en línea. De esta manera, la instrumentación de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva de una etapa producida por los estudiantes para maestro durante el debate en línea es manifestación de una comprensión más amplia del conocimiento sobre los problemas y la resolución de problemas como medios de aprendizaje matemático en Educación Primaria. Los resultados de esta investigación permitieron identificar diferencias en el grado de

instrumentación de estos tópicos, con un mayor énfasis en el uso instrumental de las tres categorías de problemas (cambio, combinación y comparación) frente al uso de información en relación con las diferentes estrategias empleadas por los alumnos en su resolución.

Tabla 2. *Proceso de instrumentalización del conocimiento: Categorías de uso del conocimiento de didáctica de la matemática (Prieto & Valls, 2010; p. 68)*

Categorías	Descripción de las Categorías
Categoría 1. Argumentos desde conocimiento previos	El estudiante para maestro realiza una descripción “natural” de algunos aspectos de los PAE de estructura aditiva desde su experiencia previa.
Categoría 2. Uso retórico de las ideas teóricas	El estudiante para maestro hace uso “retórico” de las ideas teóricas proporcionadas sin establecer relaciones entre estas ideas y las evidencias empíricas contenidas en los problemas de la colección: acciones, estructura y/o cantidades presentes en los problemas.
Categoría 3. Inicio de la instrumentalización de las ideas teóricas	El estudiante para maestro empieza a hacer uso instrumental de una categorización semántica de los PAE de estructura aditiva de una etapa, los niveles de dificultad y/o las estrategias de resolución de estos problemas, relacionándolas con las evidencias empíricas contenidas en los problemas de la colección.
Categoría 4. Uso integrado de las ideas teóricas como instrumentos conceptuales	El estudiante para maestro hace uso integrado de las ideas teóricas proporcionadas para analizar los problemas de la colección relacionándolas en todo momento con las evidencias empíricas contenidas en estos problemas.

Esta investigación permitió identificar los procesos de interacción que usa el texto escrito como una variable que favorece la instrumentalización del conocimiento de didáctica de la matemática. El análisis de esta variable que determina el proceso de instrumentalización del conocimiento generado en los entornos de aprendizaje b-learning fue el foco de la investigación de Penalva, Rey y Llinares (2011). En esta investigación participaron 65 maestros en un curso de especialización organizado mediante estudios de casos. El objetivo específico de este entorno de aprendizaje fue aprender a interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes centrado en el tópico de los algoritmos de cálculo (en particular en el aprendizaje del algoritmo de la división). En esta investigación la manifestación del aprendizaje se caracterizó como un cambio en el discurso generado. Este cambio en el discurso se dio en la medida en la que los maestros vinculaban las evidencias descritas en el caso a las ideas sobre la representación de los números y al papel que desempeñan en la realización de los algoritmos (el valor de posición y la idea de agrupamiento; la descomposición múltiple de los números y la aritmética informal). El análisis de este proceso de instrumentalización mostró que algunos maestros no fueron capaces de superar los niveles de uso retórico del conocimiento. Este hecho indica que el uso adecuado del conocimiento procedente de didáctica de la matemática en las tareas de interpretar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes y planificar intervenciones para ayudar a superarlas no es un proceso fácil. Sin embargo, el mecanismo que ayudó a que algunos maestros realizaran un uso relacional de las ideas teóricas (lo que les situaba en un nivel 3 de construcción del conocimiento según la caracterización realizada en las investigaciones anteriores tabla 1) fue la necesidad de realizar aclaraciones a sus compañeros en relación con lo aportado previamente en el debate en línea. Es decir,

las formas en las que se participaba en el debate determinaban posibles desarrollos (Tabla3).

Tabla 3. *Categorías de la forma de participar en el debate en línea (Penalva et al., 2011)*

Respuesta	Aportación inicial referida a la propia tarea. Contestación a las preguntas realizadas por el moderador a lo largo del debate.
Preguntas de reflexión	Preguntas que inducen a una mayor reflexión sobre un tema en un momento dado a lo largo del debate: revisión de la aportación, ampliación de la información... Incluye tanto las preguntas que se producen a lo largo del discurso de un grupo como las preguntas que lanza un grupo participante de forma directa.
Preguntas de aclaración	Aportaciones que demandan la aclaración de un concepto-idea utilizado por un grupo participante.
Respuestas de aclaración	Respuestas que emiten los grupos ante las preguntas de aclaración o las preguntas de reflexión realizadas por alguno de los grupos participantes.
Disconformidad	Manifiesta disconformidad hacia la aportación a la que se dirige
Refutación	Manifiesta disconformidad hacia la aportación a la que se dirige, se acompaña con argumentos que apoyan su idea.

En este sentido, las participaciones que tomaron la forma de refutaciones se generaron en un contexto dirigido a negociar los significados y, por tanto, pueden ser entendidos como de búsqueda de una comprensión compartida. Además, las intervenciones pidiendo aclaraciones y justificaciones a los argumentos propuestos dieron la oportunidad a los maestros a realizar aclaraciones pertinentes y crearon la necesidad de tener que particularizar los significados de las ideas teóricas al contexto específico. Este proceso permitió que algunos maestros empezaran a usar las ideas sobre el significado de la representación de los números y el papel que desempeñan las representaciones en la comprensión de los algoritmos relacionándolos con la evidencia descrita y llegando a modificar su discurso. Sin embargo, este proceso de uso de las ideas procedentes de la didáctica de la matemática para interpretar el pensamiento matemático de los alumnos estuvo mediado por diferentes identidades que emergieron durante la interacción (Sfard & Prusack, 2011) vinculadas a la experiencia previa de los maestros participantes (Penalva, Rey & Llinares 2011).

### 2.3. Características de las estructuras argumentativas

El papel de la interacción en los procesos de negociación de los significados y su influencia en la instrumentalización del conocimiento de didáctica de la matemática hizo emerger como una cuestión relevante el análisis de las estructuras argumentativas de una discusión en línea cuando se está aprendiendo a analizar la enseñanza de las matemáticas.

Para aportar información en relación con este aspecto, en la investigación de Roig, Llinares y Penalva (2011) se analizó la estructura argumentativa de una discusión en línea entre 29 estudiantes para profesor de enseñanza secundaria cuando estaban identificando e interpretando aspectos de la comunicación matemática como un rasgo característico de la enseñanza de las matemáticas. Esta tarea de los

estudiantes para profesor estaba integrada en un entorno de aprendizaje con la estructura dada en la Figura 1. Para realizar el análisis se usó el esquema de un argumento de Toulmin (2003) centrando la atención en cómo los estudiantes para profesor establecían la relación entre las conclusiones, los datos y en cómo planteaban las garantías en relación con las características del patrón de discusión y del patrón extractivo/focalización en diferentes momentos de un segmento de una lección (Figura 2). Los argumentos sobre cómo debían ser consideradas las características de la interacción matemática en el aula y las diferencias entre los diferentes patrones de interacción en una lección de matemáticas reflejaban los procesos de negociación de los significados y cómo se empezaba a instrumentalizar el conocimiento de didáctica de la matemática.

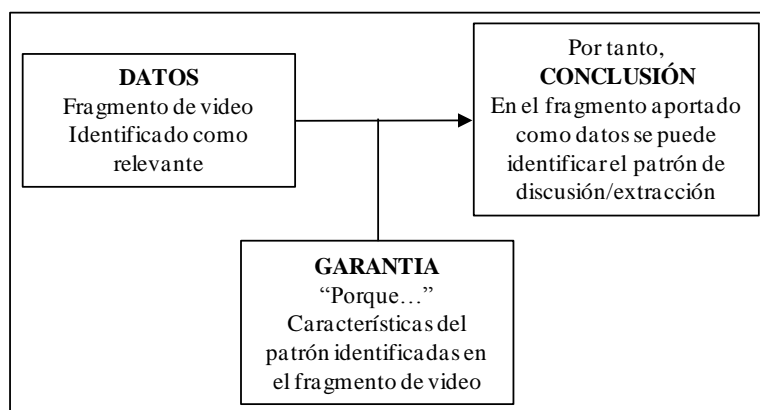


Figura 2. Estructura de un argumento (Toulmin, 2003) usada para identificar las características de las estructuras argumentativas en los debates en línea (Roig et al., 2011; p. 48).

En las interacciones durante el debate en línea, los estudiantes para profesor podían aceptar los datos presentados para apoyar la conclusión expuesta pero no aceptar necesariamente que esta conclusión se derivase de los datos presentados, es decir, podía ser que los estudiantes para profesor cuestionaran la validez de las garantías presentadas. Cuando esto ocurre en una discusión, el estudiante para profesor que ha presentado la conclusión puede apoyar las garantías refinándolas mediante *cualificadores modales* que permiten expresar grados de confianza y enfrentarse a *refutaciones* que establecen las condiciones por las cuales no se puede aceptar la conclusión presentada (Figura 3). Estos elementos de la estructura de un argumento, propuestos por Toulmin (2003), han permitido proporcionar una descripción de las argumentaciones generadas en el debate en línea para identificar características de la estructura argumentativa. El uso del esquema de Toulmin se hace con el objetivo de identificar características de la discusión en línea que permite a los estudiantes para profesor aprender a identificar aspectos relevantes en una situación de enseñanza (en este entorno de aprendizaje, en particular, sobre la comunicación matemática en el aula) e intentar validar estas interpretaciones con otros (Mason, 2002). Es decir, el uso del esquema de Toulmin permite mostrar cómo los desafíos a los argumentos inicialmente presentados pueden conducir a los estudiantes para profesor a refinar las garantías presentadas y cómo las interacciones con otros pueden llegar a centrar el debate, determinando en qué condiciones son apropiadas estas garantías.

En esta investigación se identificaron tres rasgos característicos de las estructuras argumentativas: (i) el proceso por el cual los estudiantes se veían obligados a refinar las garantías propuestas para apoyar sus argumentos; (ii) las interacciones en las que los estudiantes discutían cómo se debe establecer una conclusión para ser admitida (Figura 3); y (iii) cuándo se ponía en duda la conclusión presentada por algún compañero. Estos resultados indican que el proceso por el cual los estudiantes para profesor identificaban aspectos relevantes en una lección de matemáticas y cómo discutían las garantías o el papel que éstas debían desempeñar en relación con los datos y la conclusión alcanzada es una oportunidad para la instrumentalización del conocimiento de didáctica de la matemática. Este proceso de instrumentalización hay que entenderlo como la integración de las ideas teóricas procedentes de didáctica de la matemática en el discurso generado cuando se está interpretando la enseñanza de las matemáticas y por tanto pueden ser consideradas evidencias del aprendizaje (en este caso del desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” la comunicación matemática en una lección como un aspecto relevante de la enseñanza de las matemáticas).

<p><b>APOYA</b> Apoya la manera en que ha establecido su conclusión</p>	<p><b>A ver qué opinas (para A08) (CADENA 2 - FOCO 1 - UNIDAD 3/I66 - A12)</b> No estoy de acuerdo contigo. No tienen por qué cumplirse todas las propiedades de los patrones, sino que el ejemplo cumpla más o menos esas características. De hecho, creo (opinión personal) que es muy difícil encontrar un ejemplo que cumpla a la perfección todo. La principal característica que te marca que es un patrón de discusión (creo yo) es que, en este caso, la solución del ejercicio es el punto de partida. Posteriormente, la respuesta le servirá al profesor, para explicar e] porqué dos finuras son simétricas con respecto a un eje a partir del concepto de punto simétrico.</p>
<p><b>DUDA</b> Plantea las limitaciones de las garantías presentadas por A12</p>	<p><b>Weeeeno (CADENA 2 - FOCO 1 - UNIDAD 3/I67 - A08)</b> Sé que es difícil encontrar algo que coincida a la perfección, pero el considerarse que se cumpla "más o menos" va en función de las interpretaciones... Tú dices que comienza con la solución al ejercicio y, por ello, es patrón de discusión. Yo creo que, para que éste sea el motivo que fundamente la argumentación, habría que estar seguro de que el alumno ha trabajado antes (que en este caso no lo sabemos, puede que sí, puede que no ¿y si sale a la torera y lo hace bien de pura casualidad? ¿Sería efectiva la labor del profesor?) y por eso he comentado lo de la actitud del profesor, porque dado que no lo sabemos seguro (que aun así, yo lo daría por hecho) la actitud del profesor me pareció muy adecuada al patrón de discusión.</p>

Figura 3. Ejemplo de interacción “Discutiendo sobre cómo se debe establecer una conclusión para que sea admitida” (Roig et al., 2011; p. 54)

Los resultados de estas investigaciones indican que los estudiantes para profesor pudieron llegar a reificar (Wenger 1998) algunos aspectos de la enseñanza de las matemáticas al tener la oportunidad de generar un foco compartido de interés cuando estaban resolviendo determinadas tareas centradas en el análisis de la enseñanza de las matemáticas. Esto fue así ya que les permitió desarrollar un repertorio compartido de “recursos” (naciones teóricas de didáctica de la matemática que les permitían centrar su discurso y focalizar los contenidos de la interacción).

De manera resumida, los resultados de estas investigaciones han permitido ampliar nuestra comprensión de cómo estudiantes para profesor conceptualizan la enseñanza de las matemáticas en un contexto online, mediante:

- La caracterización de diferentes trayectorias personales de construcción del conocimiento generadas en discusiones asincrónicas determinadas por los ambientes de aprendizaje diseñados. Los aspectos que ayudan a explicar el aprendizaje generado son: (i) la manera en la que la información teórica fue usada para organizar e interpretar los aspectos de la enseñanza de las matemáticas analizados, (ii) las características de las implicaciones con los otros (formas de participar y estructura de los argumentos), y (iii) el papel desempeñado por las creencias de los estudiantes para profesor filtrando qué mirar y cómo interpretar (Van Es & Sherin, 2002).
- La identificación de características de las estructuras argumentativas que ponen de manifiesto aspectos de la relación entre la dimensión personal y social del aprendizaje en entornos b-learning de aprendizaje. Los resultados han mostrado tres características de las estructuras argumentativas generadas por los estudiantes para profesor en un debate en línea que determinan oportunidades para su aprendizaje: (i) refinar garantías para apoyar una conclusión, (ii) discutir sobre cómo se debe establecer una conclusión para que sea admitida y (iii) poner en duda las conclusiones, y
- La identificación de elementos para empezar a configurar un modelo sobre el proceso de construcción del conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de una mirada profesional del profesor de matemáticas contemplando la relación entre la dimensión personal y la dimensión social, en relación con (i) el papel desempeñado por la actividad de escribir en los foros que favorece el proceso de instrumentalización de la información teórica durante la resolución de los problemas profesionales, y (ii) la emergencia de la idea de “identidad de ser maestro/ profesor de matemáticas” como elemento explicativo de las trayectorias de aprendizaje generadas en estos entornos.

### **3. Prospectiva y nuevas cuestiones de investigación**

Los resultados obtenidos han permitido identificar como una competencia docente relevante del profesor el ser capaz de identificar e interpretar aspectos de la enseñanza de las matemáticas que pueden ayudar a explicar el aprendizaje matemático de los estudiantes, y además nos han proporcionado información para caracterizar niveles de desarrollo de esta competencia. La importancia de esta competencia docente viene dada porque diferencia a un profesor de matemáticas de alguien que no es profesor y viene caracterizada por el modo y el contexto de uso del conocimiento de matemáticas y de didáctica de la matemática en determinadas situaciones. La idea es que cuando alguien llega a formar parte de una disciplina profesional (como es el ser maestro o profesor de matemáticas) llega a ser diestro en “mirar con sentido” un cierto conjunto de fenómenos de una manera particular (Sherin et al., 2010) que puede poner de manifiesto modos diferentes de uso del conocimiento (replicar, aplicar, interpretar y asociar) (Eraut, 1996) que es lo que consideramos una mirada profesional del hecho de ser maestro/ profesor de matemáticas. La conceptualización una “mirada profesional” pone de manifiesto que esta competencia docente genérica debe particularizarse considerando lo específico del conocimiento de didáctica de la matemática en determinados ámbitos curriculares (Jacobs, Lamb & Philipp, 2010; Fernández, Llinares & Valls, 2012). De manera específica, los resultados obtenidos apoyan el tener que seleccionar como foco particular de la observación el

pensamiento matemático de los estudiantes y subraya la necesidad de aportar información sobre las características de esta competencia docente considerando dominios matemáticos particulares.

En estos momentos, las investigaciones en didáctica de la matemática sobre el pensamiento matemático de los estudiantes aportan información que permite hacer operativa esta particularización en contextos específicos (Fernández, Valls & Llinares, 2011). Una de las necesidades planteadas es determinar en qué medida un estudiante para profesor empieza a usar diferentes ítems de conocimiento desde dominios específicos de didáctica de la matemática para identificar aspectos relevantes de la comprensión matemática de los estudiantes. Aquí, emerge la necesidad de caracterizar el desarrollo de la capacidad de interpretar el aprendizaje matemático de los estudiantes en dominios de contenido específicos como un aspecto de la competencia docente “mirar con sentido”.

### Reconocimientos.

Este trabajo ha recibido el apoyo del proyecto I+D+i del Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación, España, EDU2011-27288.

### Referencias

- Andriessen, J., Erkens, G., Van de Laak, C., Peters, N., & Coirier, N. (2003). Argumentation as negotiation in electronic collaborative learning. En J. Andriessen, M. Backer & D. Suthers (eds.) *Arguing to learn. confronting cognition in computer-supported collaborative learning environment* (pp. 79-115). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Borba, M.C., & Llinares, S. (2012). Online mathematics teacher education: overview on an emergent field of research. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, 44(6), doi 10.1007/s11858-012-0457-3.
- Borko, H., Jacobs, J., Eiteljorg, E., & Pittman, M.E. (2006). Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teachers Education*. doi:10.1016/j.tate.2006.11.012.
- Callejo, M.L., Valls, J., & Llinares, S. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza. Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la Escuela*, 61, 5-21.
- Clark, D.B., Sampson, V., Weinberger, A., & Erkens, G. (2007). Analytic frameworks for assessing dialogic argumentation in online learning environments. *Educational Psychology Review*, 19(3), 343-374.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments. *Educational Research*, 32(1), 9-13.
- De Wever, B., Schellens, T., Valcke, M., & Van Keer, H. (2006). Content analysis schemes to analyze transcripts of online asynchronous discussion groups: A review. *Computers & Education*, 46, 6-28.
- Eraut, M. (1996). *Developing professional knowledge and competence*. London: The Falmer Press.

- Even, R. (2005). Integrating knowledge and practice in the development of providers of professional development for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(4), 343-357.
- Fernández, C., Valls, J., & Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente mirar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín et al (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV*, (pp. 351-360). SEIEM: Ciudad Real, España.
- Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 44(6), 747-759. doi 10.1007/s11858-012-0425-y.
- Fortuny, J.M., & Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación matemática*, n° 1, 23-37.
- Herbst, P., & Chazan, D. (2003). Exploring the practical rationality of mathematics teaching thorough conversations about videotaped episodes: The case of engaging student proving. *For the learning of Mathematics*, 23(1), 2-14.
- Hiebert, J., Morris, A., Berk, D., & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education*, 58(1), 47-61.
- Jacobs, V.R., Lamb, L.L., & Philipp, R.A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Kersting, N.B., Givvin, K.B., Sotelo, F.L., & Stigler, J.W. (2010). Teachers' analyses of classroom video predict student learning of mathematics: Further explorations of a novel measure of teacher knowledge. *Journal of Teacher Education*, 61(1-2), 172-181.
- Lerman, S., & Zehetmeier, S. (2008). Studies on face-to-face communities and networks of practising mathematics teachers. En T. Wood (Serie Editor) & K. Krainer (Volume Editor), *International handbook of mathematics teacher education. Participants in mathematics teacher education: individuals, teams and networks*, Vol. 3, (pp. 133-254). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Lin, P. (2005). Using research-based video-cases to help pre-service primary teachers conceptualize a contemporary view of mathematics teaching. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 3, 351-377.
- Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez & P.Boero (eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.Past, Present and Future* (pp.429-460). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.
- Llinares, S., & Olivero, F. (2008). Interactions and new forms of discourse in prospective mathematics teachers' learning. The role of information and communication tools. En T. Wood & K. Krainer (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education. participants in mathematics teacher education: individuals, teams and networks*, Vol. 3. (pp. 155-180). Rotterdam: Sense Publishers.
- Llinares, S., & Valls, J. (2009).The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science*, 37(2), 247-271.
- Llinares, S., & Valls, J. (2010).Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment.*Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(2), 177-196.



- Llinares, S., Valls, J., & Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, 20(3), 31-54.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- Morris, A. (2006). Assessing pre-service teachers' skills for analyzing teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 471-505.
- Penalva, M.C., & Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la Educación Secundaria. En J.M. Goñi (Coord.) *Didáctica de las Matemáticas*, (pp. 27-51). Barcelona: GRAO.
- Penalva, M.C., Rey, C., & Llinares, S. (2011). Identidad y aprendizaje de estudiantes de psicopedagogía. Análisis de un contexto b-learning en didáctica de la matemática. *Revista Española de Pedagogía*, 248, 101-118.
- Penalva, M.C., Escudero, I., & Barba, D. (Eds.) (2006). *Conocimiento, entornos de aprendizaje tutorización para la formación del profesorado de matemáticas. Construyendo comunidades de práctica*. Grupo Proyecto Sur: Granada.
- Prieto, J.L., & Valls, J. (2010). Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro. *Educación Matemática*, 22(1), 57-85.
- Rey, C., Penalva, M.C., & Llinares, S. (2006). Aprendizaje colaborativo y formación de asesores en matemáticas: Análisis de un caso. *Cuadrante*, XV, 95-120.
- Roig, A.I., Llinares, S., & Penalva, M.C. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores en un entorno en línea. *Educación Matemática*, 23(3), 39-65.
- Santagata, R., Zannoni, C., & Stigler, J.W. (2007). The role of lesson analysis in pre-service teacher education: An empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 123-140.
- Schrire, S. (2006). Knowledge building in asynchronous discussion groups: going beyond qualitative analysis. *Computers & Education*, 46, 49-70.
- Sherin, M. G., Jacobs, V.R., & Philipp, R.A. (Eds) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.
- Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, 34(4), 14-22.
- Star, J.R., & Strickland, S.K. (2007). Learning to observe: using video to improve pre-service teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 107-125.
- Stein, M.K., Grover, B.W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488.
- Toulmin, S. (2003). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Ediciones Península.
- Valls, J., Callejo, M.L., & Llinares, S. (2008). Dialecticas en el diseño de materiales curriculares y entornos de aprendizaje para estudiantes para maestro en el Área de Didáctica de la Matemática. *Publicaciones*, 38, 89-103.
- Van Es, E., & Sherin, M.G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10, 571-596.
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumental activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77-101.

- Wells, G. (2002, 2º ed.). *Dialogic inquiry. Towards a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wever, B., Schellens, T., Valcke, M., & Van Keer (2006). Content analysis schemes to analyze transcripts of online asynchronous discussion groups. A review. *Computers & Education*, 46, 6-28.

### **Referencia al autor**

Salvador Llinares. Departamento de Innovación y Formación Didáctica.  
Universidad de Alicante. [sllinares@ua.es](mailto:sllinares@ua.es)