Funciones y ecuaciones

Justo Cabezas Corchero - Mª de la Vega Vara Ganuza

justocabezas@terra.es - jcabezas@edu.juntaextremadura.net
vegavara@wanadoo.es - vvara@edu.juntaextremadura.net
Dpto. de Matemáticas. IES Sierra de San Pedro. La Roca de la Sierra

INTRODUCCIÓN

Creemos que ha llegado la hora de reconsiderar la utilización de las nuevas tecnologías en el aula. La generalización de su uso en todos los espacios del hombre, su implementación en la cultura actual y su realidad constante en el ámbito del estudio e investigación hace que debamos cerrar una primera etapa en donde, como en todas las creaciones del hombre llevadas a cabo para su comodidad, su misión ha sido la de reforzar los medios y las técnicas que empleaba previamente en la adquisición del pensamiento y del conocimiento.

La continuación en esta línea auxiliar, incompleta, introducida en educación como refuerzo de la forma de logro de los objetivos didácticos tradicionales, crea un antagonismo que ha de considerarse negativo, al aplicar medios suficientemente desarrollados como para que dejen su huella en el conocimiento con currículos que estaban diseñados sin ellos. O, en palabras de Dewey (1965): educar basándose en circunstancias pasadas es como adaptar a un organismo a un ambiente que ya no existe.

Así pensamos que las nuevas tecnologías han de ofrecer un nuevo camino para la educación, en donde desglosando cuidadosamente los contenidos tradicionales, construyamos nuevos currículos más concordes con la estructura actual de los medios de adquisición del conocimiento.

Concretando en las matemáticas, llama la atención el esfuerzo de las programaciones ofrecidas por la administración y confirmadas por los libros de texto en conservar la estructura del edificio matemático que, nos parece que raya a veces en lo pintoresco.

Como refrendo, obsérvese que los capítulos sobre «el uso de la calculadora y de los programas de ordenador» figuran aislados en muchos currículos, para evitar que «contaminen» las exposiciones clásicas, basadas en un supuesto orden epistemológico, las más de las veces construido de modo forzado (el número entero se conoce después del racional positivo, o el número real se incluye varios años después que números algebraicos e incluso transcendentes, como pi).

Los trabajos en el aula de matemáticas se han ido decantando por los algoritmos, distorsionando la realidad matemática. Por ejemplo, nuestros alumnos tienen la creencia muy generalizada de que para resolver una ecuación polinómica de tercer o mayor grado se emplea la Regla de Ruffini, lo que es una desviación notable de la realidad. Bien está que se estudie la regla por su aporte a diversos aspectos formativos y como base para otras cuestiones posteriores, pero su interés como medio para resolver ecuaciones es escaso o nulo; sin embargo, pocos currículos o libros de texto insisten en la necesidad de estudiar si una ecuación es resoluble algebraicamente o no y sobre qué significa ello; o sobre la eficacia de los procedimientos para la obtención de valores de las raíces suficientemente aproximados. O bien, consideremos los contenidos sobre procedimientos para las representaciones de curvas, que constituyen un apartado donde el alumno y el profesor quieren creer que el éxito está en hacer bien las sucesivas derivadas o los límites, pasando a un segundo lugar la representación, probablemente debido al escaso (nulo) número de alumnos que llegan correctamente a ella.

Así pues, debemos plantearnos reconducir la educación matemática para evitar estos y otros problemas Creemos que las nuevas tecnologías pueden y deben servir para ello. Mediante su mediación podemos sugerir nuevos contenidos, reorganizar otros, eliminar muchos y presentar en su justo lugar y medida los más, rehaciendo el discurso matemático en educación secundaria, fundamentando los conceptos y obviando la reiteración inútil de algoritmos, presentando unas matemáticas concordes con lo que son, eliminando las seudoconstrucciones que, entrecruzando el camino directo, permiten realizar la ilusión de que, al final del recorrido, se tienen conocimientos de esta materia. No deja de ser curioso el que los matemáticos desarrollen formas de pensamiento para encontrar los hechos matemáticos que no figuran en el aprendizaje de los alumnos, que se limitan al aprendizaje de hechos y procedimientos (Yerushalmy *et al.*, 1996).

Esta nuestra forma de pensar nos obliga a una praxis lo más intensa y novedosa posible, obligación acrecentada en este momento en el que desarrollamos nuestra labor en uno de nuestros nuevos centros de educación secundaria. Por ello presentamos este trabajo sobre ecuaciones, con una moderada reorganización de los contenidos sobre los procedimientos de resolución de las mismas que figuran en el currículum extremeño. Tiene la particularidad de que puede ser llevado a cabo con *soft* libre sobre gnuLinEx. Así hemos empleado la hoja de cálculo de Open Office y un sistema de cálculo simbólico, muPad.

El componente fundamental de la moderación aludida viene dado por dos factores: el primero la inserción en un nivel en el que los conceptos de ecuación y de función son ya conocidos por los alumnos, constituyendo nuestra propuesta solamente una presentación nueva del tema; el segundo porque el final enlaza de modo natural con el currículum tradicional, de modo que, si se desea, se puede mantener el resto de la materia intacto, aunque también es posible incorporar medios nuevos al resto de la programación.

La propuesta es un proyecto que ha sido experimentado de modo parcial, mostrándose en una primera prueba adecuado, pero sin que este primer año de funcionamiento de los centros la hayamos podido evaluar con rigor.

Presentamos en primer lugar una justificación de los cambios sugeridos, luego la introducción del tema para el alumno y finalmente un guión para seguir desarrollando el tema, (pues por su extensión el texto completo no tendría cabida en este lugar) en la seguridad de que el profesor puede continuarlo adaptándolo a su forma de impartir sus clases.

JUSTIFICACIÓN

Muchos conceptos en matemáticas están ligados a la idea de movimiento o, al menos, se ven reflejados en una secuencia visual. Tal ocurre, por ejemplo, con el concepto de límite, donde es más sencillo imaginarse una sucesión en movimiento (obsérvese el vocabulario: se emplea «tiende a») que la compleja definición de un término estático que determina una condición. Lo mismo ocurre con la definición de función donde la abscisa se concibe intuitivamente como móvil; por ello en las funciones que representan movimientos (por ejemplo la parábola) en determinados estudios se emplea la letra *t* de tiempo en vez de la *x*[1].

Hay muchas situaciones dinámicas donde el hombre estudia un instante concreto, plasmado estáticamente, hasta que en su desarrollo histórico llega a ser capaz de estudiar una evolución percibida con la vista. Aunque seguramente es intranscendente, no deja de ser curioso que esta dicotomía constituya también una especialización, en buena parte zonal, de nuestras células de la retina. Otros sentidos no han podido o sabido sujetar el tiempo y siempre se expresan en secuencias, como el oído. Puede incorporarse sonido al realizar una película, pero no puede incorporarse al crear una fotografía.

Quizás el mejor ejemplo de estudio de estas situaciones dinámicas esté constituido por este caso de la visualización de instantes. Comienza con la pintura y después la fotografía, que se mantienen como el reflejo de un instante de una evolución detectada con la vista. Pero prueba de que el ansia de movimiento prevalece es la imposición del cine y luego del video sobre la fotografía. En el transcurso de la evolución aparece un método intermedio: el diaporama. O la historieta, muy utilizada en todos los tiempos, que, aunque es una presentación en el mismo instante de distintos momentos, que desglosa el lector, para nuestros fines la podemos considerar análoga al diaporama.

Las personas no imaginamos hoy el video como una serie de fotografías muy seguidas, antes al contrario, detenemos una secuencia en el video para estudiar algún detalle. Ello sugiere la posibilidad de considerar que el proceso histórico ha pasado de la fotografía al cine por cuestión tecnológica, no por cuestión psicológica.

1 Probablemente la introducción del tiempo en la geometría, en el siglo XII, constituya el primer hallazgo histórico de esta idea de representación gráfica expresiva de movimiento si bien la noción de función puede atribuirse a Descartes (Vera, 1946).

Algo parecido ocurre en matemáticas al tratar de los conceptos que se intuyen como movimiento. Nos ceñiremos quizás al caso más extendido, el de función. La función es una película, tiene un valor para cada abscisa, para cada tiempo. Una detención en el tiempo, en la abscisa, indica una instantánea. La localización de una instantánea determinada encontrando el momento en que tuvo lugar es la ecuación. La función puede presentarse también, en algunos casos, como historieta o diaporama y en este caso se dice que está en una tabla.

Históricamente aparecen antes en matemáticas las fotografías. Mientras que desde hace cinco mil años se plantean ecuaciones, el concepto de función es muy posterior. Y sin embargo, el concepto de función, que incluye movimiento, no parece psicológicamente más difícil, aunque sí procedimentalmente, puesto que la representación con lápiz y papel de este movimiento suele ser compleja. Hay otros ejemplos en los que las dificultades psicológicas piden movimiento para su mejor entendimiento y uso. Cuando los niños aprenden alguna función en temprana edad lo hacen con un diaporama, para pasar luego a emplear cada fotografía: así aprenden primero la «tabla del siete» que a resolver ejercicios con la multiplicación (los alumnos al principio repiten mentalmente la tabla hasta que llegan al número solicitado).

Sin embargo, en el estudio de las funciones en educación secundaria se emplea el mismo camino que en el estudio de secuencias visuales utilizó el hombre, creemos que, como en el cine, por la ausencia de medios tecnológicos. Pero no sería descabellado en estos niveles proponer una inversión de la exposición tradicional, tratando primero el movimiento y luego las imágenes fijas, tanto en historieta o diaporama como en fotografías fijas. Es decir, tratando primero las funciones y sus representaciones gráfica y tabular y luego las ecuaciones. Ello podría tener en cuenta las siguientes cuestiones:

Primera: Protagonismo de la representación gráfica de funciones (del cine) con medios tecnológicos. Es adecuado un sistema de cálculo simbólico.

Segundo: Recuperación de las tablas (diaporamas e historietas) como procedimiento de análisis. No deja de ser curioso que, al explicar a nuestros alumnos las representaciones gráficas, el último punto que se trata es el de dar algunos valores sencillos, cuando hoy es sencillo dar muchos valores. Un buen método es la utilización de la hoja de cálculo.

Tercero: Concepción de la ecuación como un problema de búsqueda dentro de una función: detección del valor de la abscisa que origina un determinado valor de la función. Un buen método para comenzar es la utilización de una traza en un sistema de cálculo simbólico. El proceso es parecido a la búsqueda de una imagen en un video: se tantea si la imagen que figura en la pantalla está antes o después que la que deseamos fijar. Luego el alumno deberá saber utilizar cualquier procedimiento para resolver ecuaciones, exactos (algebraicos con cualquier medio) o aproximados (tabular, numérico con cualquier método).

Cuarto: no creemos necesaria una rígida sujeción a la organización secuencial usual en los currículos de matemáticas para los niveles medios de educación sino más bien todo lo contrario. La solución de una ecuación mediante programas de ordenador quizás requeriría un orden en el que se separasen los procedimientos exactos de los aproximados (porque no existan procedimientos exactos), quedando la solución con lápiz y papel como una extensión de ambos cuando sea posible impartirla en el nivel en el que se está trabajando.

INTRODUCCIÓN AL TEMA PARA EL ALUMNO
Funciones y ecuaciones

INTRODUCCIÓN

Muchos de los alumnos de los institutos vienen en transporte escolar; otros lo hacen en ciclomotor y otros vienen andando. Ello es función de la distancia de su domicilio al Centro. Aunque los alumnos que viven a 15 Km. del Instituto no podían asistir a él cuando no existía el transporte escolar, sería ridículo no asistir al instituto hoy porque durante generaciones no se hizo por esta causa. Pero al contrario, no es sano para los alumnos que pueden venir andando abusar del ciclomotor: es más saludable hacer un poco de deporte. Parece que una persona que siempre hiciese sus desplazamientos, incluso los cortos, en un medio de locomoción tendría un cuerpo menos desarrollado, sano y capaz.

Algunas ecuaciones se pueden resolver con lápiz y papel y otras solamente con otros medios (calculadoras u ordenadores). Ello es función de su dificultad o del tiempo necesario para resolverla. Aunque las ecuaciones que son muy complicadas se reservaban para los expertos hasta hace poco, sería ridículo no resolverlas con los medios actuales porque durante generaciones así se hizo. Pero al contrario, no es sano para la agilidad mental abusar de la calculadora o el ordenador: es mejor desarrollar y ejercitar técnicas de cálculo. Parece que una persona que hiciese todos los cálculos con el auxilio de medios tecnológicos tendría una mente menos capaz a la larga[2].

En este tema aprenderás a resolver ecuaciones por distintos procedimientos, tanto con lápiz y papel como con el ordenador, usando en este caso dos programas: la hoja de cálculo de Open Oficce y un sistema de cálculo simbólico (CAS a partir de ahora), muPad. Así podrás emplear el medio que consideres adecuado en cada caso.

Vas a utilizar dos conceptos que ya conoces y que están muy relacionados: el de función y el de ecuación. Comenzaremos dando definiciones y ejemplos de ambas para en seguida pasar a la relación citada. Luego verás cómo resolver las ecuaciones.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Una función es una expresión de la forma $y = f(x)$ tal que, a cada valor de la x corresponde a lo más un valor de la y.

---

[2] Basado en una idea de Kutzler (1999).

Por ejemplo son funciones

$$y = x^2 - x \; ; \quad y = e^{-x}; \; y = \frac{1}{+\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

que también escribiremos como

$$f(x) = x^2 - x \; ; \quad f(x) = e^{-x}; \; f(x) = \frac{1}{+\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Para cada número real x la función $f(x)$ es otro número real. Para encontrar el valor de $f(x)$ que corresponde a un valor determinado de la variable basta sustituir la x por dicho valor. Por ejemplo, para el encontrar el valor de la función $f(x) = x^2-x$ para $x = 3$ basta sustituir 3 en la expresión x^2-x obteniendo el número real 3^2-3, es decir, 6.

A veces la función se considera definida solamente un intervalo. Por ejemplo la función

$$f(x) = +\sqrt{1 - x^2}$$

está definida solamente en el intervalo $[-1,1]$.

EJERCICIO 1.1

Encuentra el valor de la función e^{-x} para $x= 3/2$. Usa la calculadora.

EJERCICIO 1.2

Halla el intervalo en el que están definidas las funciones

a) $f(x) = +\sqrt{9 - x^2}$

b) $\dfrac{1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

Vas a estudiar, sobre todo, aspectos teóricos de las funciones, pero no pierdas de vista que las funciones nacen muchas veces de representar un fenómeno. Por ejemplo, la distancia y en Km. recorrida por un vehículo que viaja a una velocidad de 90 km/h al cabo de un tiempo x viene dada por la expresión $y=90x$ o $f(x) =90x$.

ESTUDIAR UNA FUNCIÓN

Con frecuencia interesa estudiar los más variados aspectos de una función, puesto que ello aclara el fenómeno que representa.

Puedes estudiar estos aspectos de una función de muchas formas, aunque quizás las más frecuentes sean dos: representándolas en un papel cuadriculado (como hacen las enfermeras con las temperaturas de los enfermos o un sismógrafo con las oscilaciones de la tierra) o mediante una tabla.

Veamos un ejemplo detallado. Los farmacéuticos han estudiado los procesos de absorción de un fármaco y han llegado a la conclusión de que, generalmente, su velocidad de absorción (cantidad de fármaco absorbido por unidad de tiempo, por ejemplo, en el intestino) disminuye proporcionalmente a la cantidad de fármaco que falta por absorberse. Vamos a analizar el hecho para estudiarlo a partir de la función que lo representa. Para ello comencemos escribiendo formalmente lo que sucede en cada hora.

Tiempo (horas)	Fármaco no absorbido
0	10,00
1	8,00
2	6,40
3	5,12
4	4,10
5	3,28
6	2,62
7	2,10
8	1,68
9	1,34
10	1,07

Se administran Q_0 unidades de un fármaco. Supongamos que en la primera hora se absorben el *20%*, es decir, $0.2\ Q_0$. Entonces, a final de la primera hora queda

$$Q_1 = Q_0 - Q_0 * 0.2 = Q_0 (1 - 0.2)$$

Para ver la cantidad que queda al final de la segunda reiteramos el procedimiento, tomando primero como cantidad inicial la que queda al final de la primera hora, Q_1, que luego sustituiremos por su expresión en función de Q_0. Es decir,

$$Q_2 = Q_1 - Q_1 * 0.2 = Q_1 (1- 0.2) = Q_0 (1-0.2)^2$$

Al final de la tercera hora queda

$$Q_3 = Q_2 – Q_2 * 0.2 = Q_2 (1- 0.2) = Q_0 (1-0.2)^2 (1-0.2) = Q_0(1-0.2)^3$$

Así que la función que expresa la cantidad de fármaco que resta por absorber a la hora *t* es

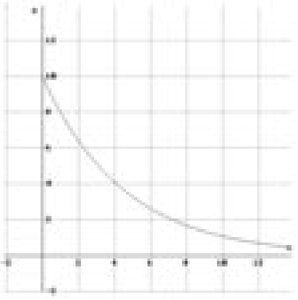
$$Q_t= Q_0(1-0.2)^t$$

o

$$Q_t= Q_0 0.8^t$$

Esta función la puedes estudiar:

- Mediante una tabla (hacemos, por ejemplo, $Q_0 = 10$) como la que figura al margen y en ella puedes ver algunas propiedades como, por ejemplo, que la función parece ser decreciente y que decrece al principio de la tabla más rápidamente que al final.
- Mediante un gráfico, tal y como muestra la figura, donde puedes volver a apreciar las propiedades que ya has visto en la tabla.
- Esta función genera un modelo que se puede aplicar a muchas otras situaciones. Por ejemplo, por citar alguna, a la supervivencia de muchas especies de pájaros, peces, insectos y crustáceos cuya tasa de mortalidad es constante o la cantidad de elemento radiactivo de un cuerpo que resta al pasar el tiempo.



DEFINICIÓN DE ECUACIÓN

Como sabes una ecuación o, dicho con más rigor, una ecuación con una sola incógnita en R con coeficientes en R, es cualquier expresión de la forma $f(x) = 0$.

Por ejemplo son ecuaciones:

$x^2-x = 0;\ \ 2^x-8 = 0;\ \ ln(x^3-3x)- e = 0$

Evidentemente una ecuación puede estar escrita sin que en uno de los miembros de la igualdad sea cero. Por ejemplo las anteriores ecuaciones se pueden escribir como

$x^2 = x;\ \ 2^x = 8$ ó $ln(x^3-3x) = e$

O bien la expresión

$5xe^{-x} + 2\pi= 3x^2+3x+7;$

es una ecuación, pues se puede escribir en la forma

$5xe^{-x} - 3x^2 - 3x+ 2\pi - 7= 0$

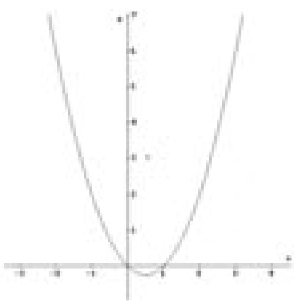
RESOLVER UNA ECUACIÓN

Resolver una ecuación en el campo de los números reales es encontrar, si existen, los números reales, llamados soluciones o raíces, que verifican la igualdad.

Por ejemplo, resolver la primera de las ecuaciones es encontrar los números reales (*0* y *1* en este caso) tales que al sustituirlos en la expresión la convierte en una igualdad numérica: *1-1=0* y también *0-0=0.*

RELACIÓN ENTRE FUNCIÓN Y ECUACIÓN

Observando la definición de función y ecuación la ecuación $f(x) = 0$ puedes entenderla como la de la función $y = f(x)$ cuando la *y* vale cero. Es decir, puedes concebir que resolver una ecuación es hallar el valor de la abscisa donde la gráfica corta al eje OX.



Así, resolver la ecuación

$x^2-x = 0$

es encontrar los puntos donde la función

$f(x)=x^2-x$

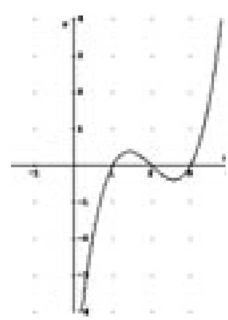
se anula, o sea, donde $f(x) = 0$. Si representas la función $f(x) = x^2-x$ los valores *1* y *0* que hemos encontrado como solución son los valores donde la ordenada se anula, como puedes ver en la figura.

Veamos otro ejemplo.

Resolver la ecuación $(x-2)(x-3)(x-4) = 0$ es encontrar los números que verifican la igualdad. O lo que es igual, resolver la citada ecuación es encontrar la intersección de la función

$f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)$

con el eje *OX*. Resuelta tanto de modo algebraico como gráfico la ecuación tiene por soluciones *1*, *2*, y *3*.



EJERCICIO 1.3

Escribe de dos modos qué es resolver la ecuación

$x^3-3x^2+ x-3 = 0$

No se trata de resolverla, sino de enunciar qué es resolverla de dos formas distintas.

No todas las ecuaciones tienen solución. Ello se puede ver con frecuencia por cualquiera de los dos procedimientos que estamos estudiando, bien intentando resolverla mediante cálculos, bien estudiando los puntos de corte de la función. En todo caso, si la ecuación o la función proceden de la matematización de un fenómeno, debes reflexionar siempre sobre el significado que ello tiene.

Así, volviendo a la función que expresa la absorción de un fármaco podrías plantearte cuánto tiempo es necesario para la eliminación total del mismo. Y observar que:

- La ecuación, $Q_0 0.8^t = 0$ no tiene soluciones, pues *0.8* elevado a cualquier número es un número siempre positivo.
- La función $Q_t = Q_0 0.8^t$ no corta al eje *OX*.
- En el modelo matemático que hemos elegido siempre quedaría alguna cantidad de fármaco por absorber (aunque retires muchas veces el 80% de una cantidad, siempre queda algo; otra cuestión en que en la práctica llegue a ser cero).

EJERCICIO 1.4

Con el enunciado: encuentra un número tal que al elevarlo al cuadrado y sumarle *1* se obtenga *0*, repite los razonamientos del ejemplo anterior

SOLUCIÓN ALGEBRAICA DE UNA ECUACIÓN

Las soluciones se pueden obtener a veces algebraicamente. Por ejemplo, en el caso de

$$x^2 - \sqrt{21}x + 3\sqrt{21} - 9 = 0$$

se obtienen inmediatamente mediante la fórmula que conoces para resolver la ecuación polinómica de segundo grado:

$$x_1 = 3 \;; \quad x_2 = \sqrt{21} - 3$$

En el caso en que la ecuación es resoluble mediante un cálculo algebraico las soluciones, si existen, son exactas, como ocurre en el ejemplo anterior.

Las soluciones a cualquier ejercicio o problema debes escribirlas siempre que sea posible (cualquiera que sea el procedimiento por la que has resuelto la ecuación) de modo exacto. Si una ecuación te da como resultado $\sqrt{3}$ no debes entregar 1.7 o alguna otra aproximación, sino $\sqrt{3}$. Otra cuestión es que luego vayas a aplicar el resultado a alguna situación que se beneficie en tiempo o esfuerzo en su aproximación. Hay algunas excepciones: es el caso, por ejemplo, de la probabilidad de un suceso, que tradicionalmente se expresa en cifras decimales.

Si utilizas el ordenador, en cualquiera de los casos en que hayas de usar una aproximación decimal, calcula de modo exacto y luego aproxima: el error cometido en la aproximación será menor que si calculas todo aproximadamente.

Si una ecuación es resoluble algebraicamente un sistema de cálculo simbólico la resolverá de este modo generalmente y, por tanto, entregará las soluciones exactas.

Para ello debes utilizar el comando **solve**

Así para resolver la ecuación

$x^2 - 34\cdot x + 17 = 0$

en el campo real debes escribir

solve (x^2-34*x+17, real)

Y en la pantalla tendrás las soluciones:

$\{x = 17 - 4\cdot\sqrt{17} / x = 4\cdot\sqrt{17} + 17\}$

Ello significa al sustituir $17 - 4\cdot\sqrt{17}$ en la ecuación dada, ésta se convierte en una identidad y lo mismo ocurre con $4\cdot\sqrt{17} + 17$.

Si deseas comprobar gráficamente las soluciones puedes representar la función.

Para representar en muPad la función *f(x)* se edita

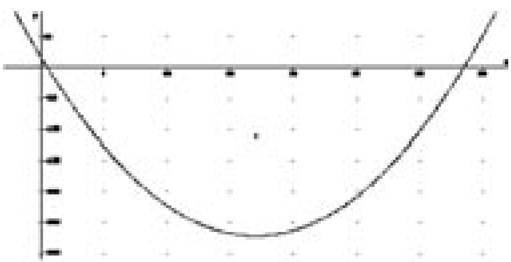
Plotfunc2d(f(x))

En concreto para representar

$f(x) = x^2 - 34\cdot x + 17$

has de escribir

Plotfunc2d(x^2-34*x+17)



Con lo que verás que resolver la ecuación también significa que la función $f(x)= x^2 - 34\cdot x + 17$ corta al eje de abscisas en esos puntos (aproximadamente *-0,51 y 33,49*) como puedes ver en la gráfica (ten cuidado al leer la escala: los dos ejes tienen distinta unidad, lo que utilizaremos a veces).

EJERCICIO 1.5

Resuelve algebraicamente

$$sen\left|\ln x^2\right| = 0$$

(has de escribir en muPad sin(abs(ln(x^2)))

EJERCICIO 1.6

Representa gráficamente con la hoja de cálculo la anterior función entre -5 y +5

EJERCICIO 1.7

Representa en muPad la función anterior

Si la ecuación no tiene soluciones obtendrás

{}

lo que indica que no existe solución real, es decir, que no existen números reales que la transformen en igualdad al sustituirse en la *x* o, si quieres, que la función

$f(x) = x^2 - 34\cdot x + 17= 0$

no corta al eje de abscisas.

Si una ecuación no admite solución algebraica el CAS te lo puede indicar escribiendo nuevamente la expresión en el centro de la línea y entonces tendrás que utilizar otros métodos para resolverla

Por ejemplo, si intentas

Solve ($x^7 - x^3 - 1$, real)

Obtienes

$x^7 - x^3 - 1$

lo que indica en general que la ecuación no es resoluble algebraicamente.

SOLUCIONES APROXIMADAS DE UNA ECUACIÓN

Si una ecuación no es resoluble de modo algebraico hay que utilizar otros procedimientos, que ya no serán exactos.

Los procedimientos aproximados dan soluciones tan aproximadas como se desee, números decimales en general. Podemos distinguir entre procedimientos numéricos y gráficos.

Aunque los procedimientos numéricos para resolver ecuaciones con lápiz y papel los estudiarás el próximo curso, bueno es que sepas, como te imaginas, que los CAS tienen implementados estos procedimientos.

Pero también creemos que es interesante que conozcas otros procedimientos numéricos menos usados, como puede ser construir una tabla de valores de la función y encontrar aproximadamente el punto donde la *f(x)* vale cero. Es evidente que la aproximación que obtendrás pocas veces te será rentable pues habrás de invertir bastante tiempo. Pero la hoja de cálculo te permite usar este método con mayor velocidad, por lo que a veces puedes tenerlo en cuenta.

Aunque en este caso no es necesario, en otros necesitarás mejorar la precisión mediante *zoom* al utilizar un CAS y con la hoja de cálculo mejorar los valores mediante una interpolación en la tabla o utilizando también un *zoom* tal y como indica el siguiente ejemplo.

Para resolver la ecuación

$x^7 - x^3 - 1 = 0$

puedes ensayar, por ejemplo, construir una tabla entre *-10* y *10* con paso de *0,1*. Para ello, como sabes, escribirás en las casillas A1 *-10*, en la A2, *-9,9* y luego, seleccionando las dos, arrastrarás la cruz hacia abajo hasta llegar a *10*. Luego, en la casilla B1 escribirás la ecuación que, como fórmula que es, editarás como =A1^7-A1^3-1. Luego arrastra para copiar hasta la línea donde figura *10*.

Enseguida verás que para valores menores que *-2* y mayores que *2* las ordenadas son muy grandes en valor absoluto tal y como muestran las secciones de tabla que se obtienen y que puedes ver adjuntas.

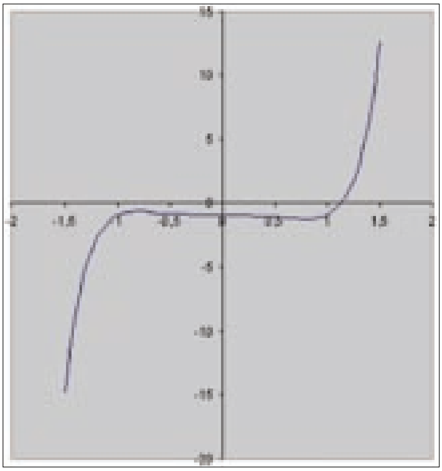
9,7	8078914,77
9,8	8680313,14
9,9	9319682,18
10	9998999

-10	-9999001
-9,9	-9319684,18
-9,8	-8680315,14
9,7	-8078916,77

Por tanto vamos a eliminar las filas que no tengan un valor entre *–1,5* y *1,5* en la primera columna.

0,7	-1,2606457
0,8	-1,3022848
0,9	-1,2507031
1	-1
1,1	-0,3822829
1,2	0,8551808
1,3	3,0778517
1,4	6,7973504

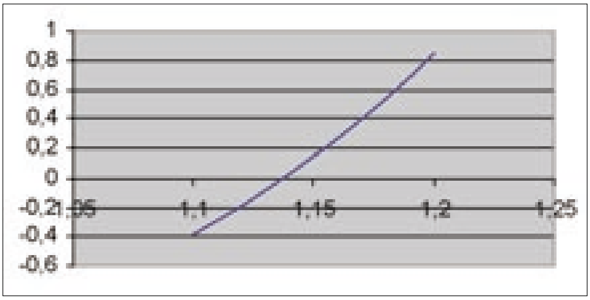
La representación de la función en este segmento es la de la figura adjunta, por lo que parece que tiene una solución entre *1* y *1,5*.



Si observas la tabla para los valores que te mostramos, la función pasa de ser negativa a positiva entre *1,1* y *1,2*, luego la raíz está entre estos dos valores, de modo que puedes tomar, por ejemplo, *1,5* como solución de la ecuación, cometiendo un error menor de una décima.

En el caso de que necesites más aproximación, puedes reiterar el procedimiento, estudiando ahora la función entre *1,1* y *1,2* con el paso que desees, siempre que tenga capacidad la hoja de cálculo (de todas formas podrás reiterarlo si así no fuese con menor paso y luego acotando la raíz nuevamente).

1,1	-0,3822829
1,11	-0,29147085
1,12	-0,19424659
1,13	-0,09029152
1,14	0,02072479
1,15	0,13914488
1,16	0,26532373
1,17	0,39962912
1,18	0,5424419
1,19	0,69415642
1,2	0,8551808



EJERCICIO 1.7

Resuelve aproximadamente la ecuación

$$\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x} + 1 = 0$$

Utilizando la hoja de cálculo

ALGUNOS CONSEJOS PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN

Antes de lanzarte en pos de una solución de una ecuación reflexiona ante su expresión. En general te ayudarán los siguientes pasos:

Si la ecuación es fácilmente resoluble de modo algebraico ve andando, no tomes el autobús. Una ecuación de primer grado solamente necesita unos segundos para resolverse con lápiz y papel. Si lo deseas (por ejemplo en una ecuación de segundo grado) puedes contrastar tus soluciones con la representación gráfica de la función, que es inmediata con muPad.

Si la ecuación no es conocida, dedícale, no obstante, un momento antes de intentar resolverla compulsivamente a base de pulsar teclas. Es posible que con una fácil manipulación puedas llegar rápidamente y con elegancia a la solución. Por ejemplo la ecuación

$e^{2x}-2e^{x}+1 = 0$

puedes escribirla como

$(e^{x})^{2}-2(e^{x})+1 = 0$

que es una sencilla ecuación de segundo grado donde la incógnita, en vez de ser x es e^x y su solución es inmediata:

$$e^x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

Y como $e^x = 1$, resulta ser $x=0$.

La misma observación puede hacerse para cualquier ecuación polinómica, que has de ojear para ver si puedes obtener alguna solución por Ruffini.

Es posible que la ecuación se pueda resolver algebraicamente, pero desconozcas cómo. Así que la siguiente opción es usar el ordenador. Lo más rápido es usar muPad con la opción solve. En este caso es muy aconsejable representar la función para contrastar tus soluciones.

Así la ecuación $x^3 - x^2 - 2 = 0$ es resoluble algebraicamente, pero probablemente desconoces el procedimiento, puesto que no figura en los contenidos que debes de saber.

Basta editar

solve $(x^3 - x^2 - 2)$

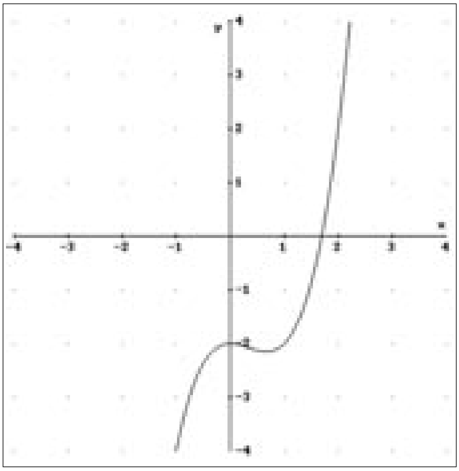
para obtener

$$x = \left(\frac{28}{27} - \frac{\sqrt{87}}{9}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\sqrt{87}}{9} + \frac{28}{27}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}$$

O, aproximando

x = 1.695620769

Lo que era de esperar vista la representación gráfica de la función $f(x) = x^3 - x^2 - 2$.

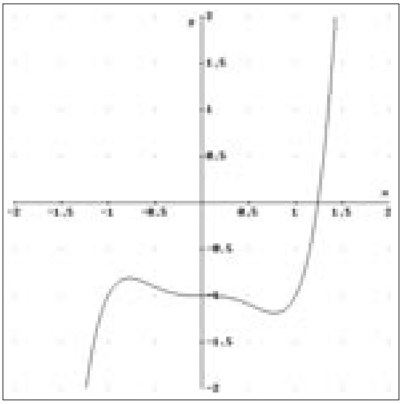


Y, si la ecuación no es resoluble algebraicamente tendrás que acudir a procedimientos aproximados. Cómo hacer estos procedimientos con lápiz y papel lo estudiarás el próximo curso, pero es más rápido y fiable hacerlo con el ordenador. Para ello representa primero la función, puesto que los procedimientos aproximados suelen dar una única solución de las muchas que puede haber.

Una vez representada la función pide resolver la ecuación con solve::numeric. Comprueba que la solución es la que te interesa o acota el segmento donde deseas otra nueva solución.

Por ejemplo la ecuación que sigue, a pesar de que su expresión parece sencilla, probablemente no es resoluble por procedimientos algebraicos

$x^5 - x^3 - 1=0$



por lo que al intentar

solve ($x^5 - x^3 - 1$)

el ordenador devuelve

$x^5 - x^3 - 1$

Pero con

Numeric::solve($x^5 - x^3 - 1$)

obtendrás

x = 1.236505703

lo que era de esperar vista la representación gráfica de la función $f(x)= x^5- x^3 - 1$

CONTINUACIÓN DEL TEMA

II Algunas funciones y ecuaciones

INTRODUCCIÓN

FUNCIONES Y ECUACIONES POLINÓMICAS O DE FRACCIONES POLINÓMICAS

FUNCIÓN Y ECUACIÓN POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO

FUNCIÓN

a) En papel cuadriculado
b) Con la hoja de cálculo
c) Con un CAS

ECUACIÓN

FUNCIÓN Y ECUACIÓN POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

FUNCIÓN

a) En papel cuadriculado
b) Con la hoja de cálculo
c) Con un CAS

ECUACIÓN

a) Con lápiz y papel.
b) Con la hoja de cálculo
c) Con un CAS

FUNCIONES Y ECUACIONES POLINÓMICAS DE TERCER Y CUARTO GRADO

FUNCIÓN

a) En papel cuadriculado.
b) Con la hoja de cálculo
c) Con un CAS

ECUACIÓN

a) Con lápiz y papel. Casos particulares sencillos.
b) Con la hoja de cálculo
c) Con un CAS

FUNCIONES Y ECUACIONES CON RADICALES

LAS FUNCIONES Y ECUACIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICAS

BIBLIOGRAFÍA

- DEWEY, J. (1965). La educación de hoy. Losada.
- YERUSHALMY, M. (respons.). (1996). Impact of technology on the curriculum. En ALSINA et al. (coord.) *Proceedings of the 8 th ICME*. Sevilla, **171-174**.
- VERA, F. (1946). Breve historia de la matemática. Buenos Aires. Losada. **74; 145**.
- KUTZLER, b *(1999).* The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching
- Mathematics. En *B.Kutzler.com/bk//a-pt/ped-tool.htm. (8-5- 2003).*