La adquisición del conocimiento: una perspectiva cognitiva en el dominio de las matemáticas

Rosa María Pons Parra
José Manuel Serrano González-Tejero
Universidad de Murcia

Resumen:
Los autores parten de que en el conocimiento matemático es necesario distinguir entre lo que depende de una interpretación general de la realidad que depende de una epistemología general del individuo, y en donde la realidad matemática no es sino un subconjunto de esa realidad general, y los conocimientos específicos y los medios disponibles para solucionar los problemas y realizar con éxito las tareas cotidianas matemáticas que están fuertemente individualizados y sujetos a las presiones de la cultura. Para intentar dar una explicación que pueda dar respuesta simultáneamente a esta distinción heurística entre el sujeto psicológico y el sujeto epistémico, los autores se ubican en la metáfora del «aprendizaje como construcción de significados» y, tras efectuar una descripción de los cuatro elementos del aprendizaje (el procesador, los contenidos, los procesos y el contexto), realizan una sistematización de los procesos que, generalizándolos al campo de las matemáticas, permiten establecer las distintas actividades que el procesador efectúa para resolver un problema matemático, desde la traducción y representación del mismo, hasta su evaluación procesual, pasando por la descripción de los instrumentos necesarios para su correcta codificación y los mecanismos imprescindibles para conferirle un significado contextualizado.

Palabras clave:
Procesamiento de la información, constructivismo, conocimiento matemático, aprendizaje matemático.

Abstract:
The authors begin that in mathematical knowledge is necessary to distinguish between what depends on a general interpretation of reality that depends on a person's general epistemology, and wherein the mathematical reality is but a subset of that general reality, and expertise and resources available to solve problems and successfully carry out everyday tasks that are strongly individualized math and subject to the pressures of culture. To give an explanation that can respond simultaneously to the heuristic distinction between the psychological subject and epistemic subject, the authors are located in the metaphor of «learning as meaning construction» and, after carrying out a description of the four elements of learning (processor, content, processes and context), make a systematization of processes, generalising the field of mathematics, can provide for the processor carries out activities to solve a mathematical problem, since the translation and representation of same, until their evaluation as process through the description of the tools necessary for proper coding and mechanisms necessary to give it a meaning in context.

Key words:
Information processing, constructivism, mathematical knowledge, mathematical learning.

Résumé:
Les auteurs supposent que, dans la connaissance mathématique est nécessaire de distinguer entre ce qui dépend d'une interprétation générale de la réalité et ce qui dépend de l'épistémologie générale d'un individu, et dans lequel la réalité mathématique n'est qu'un sous-ensemble de cette réalité plus vaste, et expertise et les ressources disponibles pour résoudre les problèmes et mener à bien les tâches quotidiennes qui sont fortement individualisés mathématiques et soumis aux pressions de la culture. Pour tenter de donner une explication qui peut répondre simultanément à la distinction heuristique entre le sujet psychologique et sujet épistémique, les auteurs se trouvent dans la métaphore de «l'apprentissage comme la construction de significations» et, après avoir procédé à une description des quatre éléments de l'apprentissage (processeur, contenu, processus et le contexte), faire une systématisation des processus, pour généraliser au domaine des mathématiques, permet prévoir les activités que le processeur effectue pour résoudre un problème mathématique, puisque la traduction et la représentation des même, jusqu'à ce que leur évaluation en tant que processus à travers la description des outils nécessaires pour le codification et les mécanismes nécessaires pour donner un signifie dans leur contexte.

Mots clés:
Traitement de l'information, constructivisme, connaissance mathématique, apprentissage des mathématiques.

Fecha de recepción: 28-03-2011
Fecha de aceptación: 15-04-2011

Introducción

En el conocimiento matemático se puede distinguir lo que depende de una interpretación general de la realidad, y en donde la *realidad matemática* no es sino un subconjunto de esa realidad general, y los conocimientos específicos y los medios disponibles para solucionar los problemas y realizar con éxito las tareas cotidianas matemáticas (formales y no formales). En el primer caso, la interpretación de la realidad depende de una epistemología general del sujeto que engendra una determinada visión del mundo, centrada en la comprensión de la realidad y de sí mismo (sujeto epistémico). En el segundo caso los conocimientos que intervienen son esencialmente particulares y los modos de utilizarlos están fuertemente individualizados y sujetos a las presiones de la cultura (sujeto psicológico). Esta distinción heurística entre sujeto epistémico y sujeto psicológico, no hace más que reflejar formas complementarias del conocimiento del sujeto que tienden, bien hacia el conocimiento normativo, bien hacia el conocimiento pragmático y empírico. Por consiguiente, es necesario garantizar una comunalidad de enfoque a la hora de interpretar a ese sujeto cognoscente, en el seno de la cual el análisis

categorial del sujeto epistémico y el análisis funcional del sujeto psicológico, tengan no sólo la misma legitimidad, sino que además sean legítimamente complementarios (Serrano, González-Herrero y Pons, 2008).

A la luz del paradigma constructivista, que ahora parece dominar la investigación psicoeducativa, disponemos de dos fuentes básicas para alcanzar este propósito: el constructivismo socio-cultural (que emana de la posición adoptada por Vigotsky acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje) y el constructivismo cognitivo (fruto de los trabajos de Piaget y de la Escuela de Ginebra). En efecto, las cogniciones de los individuos se pueden considerar *dentro* de los contextos socio-culturales de actividad (posición vygotskiana de la cognición) o en la *interacción* con ellos (posición piagetiana de la cognición). Nosotros adoptaremos aquí la segunda de las posiciones.

Para Piaget (1976; pp. 11 y ss.), el sistema cognitivo humano se desarrolla gracias a los intercambios que el sujeto efectúa con su entorno (interacción), a partir de un programa inicial inscrito en el genoma (herencia) y merced a un centro funcional (memoria) que actúa como el compilador y la unidad central de procesos de un ordenador y que es el que hace posible la lectura y realización del programa (funcionamiento). A fin de que se produzca un desarrollo coherente estos tres elementos o factores "necesitan actuar de manera coordinada, por lo que es preciso la concurrencia de un cuarto factor que mantenga la armonía del sistema: la autorregulación" (Serrano y Calvo, 1991; p. 15). Esta posición concuerda con la metáfora del aprendizaje como construcción de significado, que surge en la década de los «70» y en la que el "papel del estudiante corresponde al de un individuo autónomo, auto-regulado, que conoce sus propios procesos cognitivos y tiene en sus manos el control del aprendizaje" (Beltrán, 1993; p. 19). Siguiendo esta metáfora se deben tomar en consideración cuatro elementos temáticos: el procesador, los contenidos, los procesos y el contexto de aprendizaje.

El procesador

Al hablar de procesador nos referimos a un sistema que trata la información de forma secuencial mediante tres almacenes: el registro sensorial, la memoria de trabajo y la memoria a largo plazo.

El *registro sensorial*, constituido por las memorias sensoriales, recoge la información que llega a los receptores y la mantiene sólo décimas de

segundo, tiempo suficiente para que actúen sobre ella los mecanismos de extracción de rasgos o de reconocimiento de patrones. Este almacén, si bien presenta este importante constreñimiento temporal es ilimitado en relación al material informativo que puede recoger. La información que no interesa desaparece dejando paso a nuevos inputs informativos, aunque una pequeña parte puede almacenarse, de manera no consciente (sin procesar) en la memoria a largo plazo (percepción subliminal). La información que se considera relevante pasa a la memoria de trabajo.

La *memoria de trabajo* constituye el sistema donde el individuo maneja la información necesaria para interactuar adecuadamente con el ambiente y es un almacén en el que la información permanece también durante un corto intervalo de tiempo, aunque más prolongado que en el registro sensorial, pero presenta un constreñimiento espacial añadido, ya que sólo cabe en ella una pequeña parte del aluvión informativo que llega al registro sensorial, de manera que aunque la información es más duradera que la almacenada en las memorias sensoriales, está limitada a 7±2 elementos (*bits* o unidades de información) durante, aproximadamente 10-20 segundos (*span* de memoria), si no se utilizan estrategias de repaso.

Las funciones generales de este sistema de memoria suministran el contexto para la percepción, ayudan al recuerdo y posibilitan la retención de información, ofrecen una explicación de los sucesos inmediatamente anteriores, constituyen un apoyo para el aprendizaje de nuevo conocimiento, formulan metas inmediatas, ajustan, confirman y/o ratifican las decisiones tomadas y permiten la comprensión del ambiente en un momento dado y el inicio de los planes para una tarea específica en un contexto concreto. Debido a las limitaciones de capacidad, cuando una persona realice una determinada función, las demás no se podrán llevar a cabo en ese momento.

La memoria de trabajo está constituida por un sistema supervisor (Ejecutivo Central) y dos almacenes secundarios especializados en información verbal (Lazo Articulatorio) y visual o espacial (Agenda Viso-espacial).

- El *Ejecutivo Central* coordina los recursos del sistema y los distribuye por diferentes almacenes, denominados *esclavos*, según la función que se pretenda llevar a cabo. Se centra, por lo tanto, en tareas activas de control sobre los elementos pasivos del sistema (almacenes de información).

- El *Lazo Articulatorio* (también llamado bucle fonológico) se encarga del almacenamiento pasivo y mantenimiento activo de información oral. Además, es responsable de la transformación automática del lenguaje presentado de forma visual a su forma fonológica, por lo que, a efectos prácticos, procesa la totalidad de la información verbal. Su capacidad de almacenamiento no es constante (el clásico número mágico de Miller, 7±2), sino que disminuye a medida que las palabras a recordar son más largas.
- La *Agenda Viso-espacial* es el almacén del sistema que trabaja con elementos de carácter visual o espacial y su función consiste en mantener este tipo de información. La capacidad de almacenamiento de elementos en la «Agenda Viso-espacial» se ve afectada —como en el «Lazo Articulatorio»— por la similitud de sus componentes, siempre y cuando no sea posible traducir los elementos a su código verbal (porque el «Lazo Articulatorio» esté ocupado con otra tarea).

Se ha investigado cómo la limitación de recursos de la memoria de trabajo afecta a la ejecución de varias tareas simultáneas y se ha llegado a la conclusión de que, en líneas generales, el rendimiento en tareas simples empeora cuando éstas requieren la participación de un mismo almacén secundario (lazo o agenda), por ejemplo, escribir un texto y atender a lo que se dice en la canción. Sin embargo cuando las actividades se llevan a cabo de forma separada en los dos almacenes o subsistemas (por ejemplo, escuchar una noticia y ver unas imágenes por televisión) la ejecución no se ve alterada. Cuando la complejidad de las tareas aumenta y se requiere el procesamiento de información controlado por el «Ejecutivo Central», la ejecución en ambas tareas se ralentiza pero no empeora.

La *memoria a largo plazo* es el elemento del procesador donde se almacenan recuerdos vividos, conocimiento acerca del mundo, imágenes, conceptos, estrategias de actuación, etc. No tiene limitaciones ni con relación a la capacidad de espacio de almacenaje (dispone de capacidad desconocida y contiene información de distinta naturaleza), ni al grado de duración temporal. Se considera como la «base de datos» en la que se inserta la información, a través de la «memoria de trabajo», para poder posteriormente hacer uso de ella.

Una distinción fundamental para el problema que nos ocupa es la

que establece un almacén para hechos, conceptos y principios (Memoria Declarativa) y otro para procedimientos y estrategias (Memoria Procedimental).

La *memoria procedimental* puede considerarse como un sistema de ejecución, implicado en el aprendizaje de distintos tipos de habilidades que no están representadas como información explícita sobre el mundo y se activan de modo automático, como una secuencia de pautas de actuación, ante las demandas de una tarea. Consisten en una serie de repertorios motores (escribir) o estrategias cognitivas (hacer un cálculo) que llevamos a cabo de manera automática o automatizada. El aprendizaje de estas habilidades se adquiere de modo gradual, principalmente a través de la ejecución y la retroalimentación que se obtenga de esta, sin embargo, también pueden influir las interacciones posibles con la «memoria declarativa». El grado de adquisición de estas habilidades depende de la cantidad de tiempo empleado en practicarlas, así como del tipo de entrenamiento que se lleve a cabo y requieren que se realicen óptimamente sin demandar demasiados recursos atencionales que pueden estar usándose en otra tarea al mismo tiempo.

La unidad que organiza la información almacenada en la «memoria procedimental» es la regla de producción que se establece en términos de condición-acción, siendo la *condición* una estimulación externa o una representación de ésta en la memoria operativa y la *acción* una modificación de la información en la «memoria declarativa» o en el contexto.

La *memoria declarativa* contiene información referida al conocimiento sobre el mundo y las experiencias vividas por cada persona (*memoria episódica*), así como información referida a un conocimiento general que está especialmente relacionado con conceptos extrapolados de situaciones vividas (*memoria semántica*). Tener en cuenta estas dos subdivisiones de la «memoria declarativa» es importante para entender de qué modo la información matemática está representada y es recuperada de manera diferencial. La organización de los contenidos en la «memoria episódica» está sujeta a parámetros espacio-temporales; esto es, los eventos que se recuerdan representan los momentos y lugares en que se presentaron. Sin embargo, la información representada en la «memoria semántica» sigue una pauta conceptual, de manera que las relaciones entre los conceptos se organizan en función de su significado. Otra característica que diferencia ambos tipos de representación se refiere a que

los eventos almacenados en la «memoria episódica» son aquellos que han sido explícitamente codificados, mientras que la «memoria semántica» posee una capacidad inferencial y es capaz de manejar y generar nueva información que nunca se haya aprendido explícitamente, pero que se halla implícita en sus contenidos.

Las estrategias

Como acabamos de ver, cada elemento del procesador presenta algunas limitaciones que pueden ser superadas con mecanismos de control adecuados. Uno de los mecanismos que puede servir para superar estas limitaciones son las estrategias.

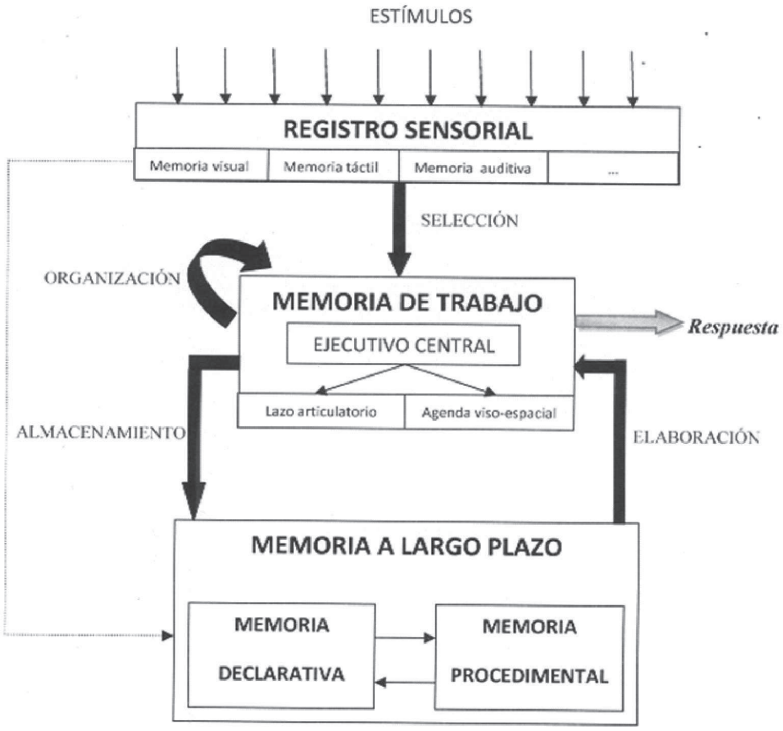
Una primera estrategia que se puede utilizar para proteger la fragilidad del sistema y compensar la limitación de procesamiento, se encuentra vinculada a los procesos atencionales. En efecto, dado que la cantidad de mensajes que pueden llegar al registro sensorial es enorme y que el canal de procesamiento sólo puede actuar secuencialmente, tratando los elementos de uno en uno, tiene que existir algún medio que permita *seleccionar* los «inputs» que van a ser procesados, determinando cuáles son relevantes y cuáles no, a la hora de abordar la información que nos permita resolver una situación-problema. Este mecanismo de selección filtra selectivamente la información de manera que los estímulos seleccionados serán procesados y los no atendidos se desvanecen o, en el mejor de los casos, quedan relegados a un segundo plano, por lo que no llegarán a ser procesados. Esta estrategia general o mecanismo de selección atencional recibe el nombre de *estrategia de selección* y va desde el registro sensorial a la memoria de trabajo.

Con relación a la memoria de trabajo hemos indicado que presenta dos grandes limitaciones, por una parte la limitación de su capacidad de almacenamiento que oscila entre 5 y 9 unidades de información (*bits*) y, por otra, su escasa duración temporal (entre 10 y 20 segundos antes que se produzca pérdida de información relevante). Para compensar esta dos limitaciones, podemos utilizar una nueva estrategia que consiste en organizar los materiales informativos que se deben procesar, agrupándolos en unidades de orden superior, es decir, transformando las "unidades simples" en "unidades complejas" (sería algo así como transformar los *bits* en *bytes*), de manera que la capacidad de almacenamiento aumenta considerablemente (continuando con la metáfora del ordenador, y según

la capacidad de bits de la memoria, pasaríamos a poder almacenar entre $2^5 = 32$ y $2^9 = 512$ "unidades" de información) sobre todo si se transforman los *bytes* en *chunks*. Esta estrategia recibe el nombre de *estrategia de organización* y va de la memoria de trabajo a la memoria de trabajo, permitiendo multiplicar su potencia.

Finalmente, existe otra estrategia general de procesamiento que recibe el nombre de estrategia de elaboración y que posibilita que la información entrante se relacione con la que existe en el registro del sujeto, de manera que los materiales nuevos son asimilados a los conocimientos que se poseen que, a su vez, deben transformarse para acomodarse a su estructura, haciéndolo más significativo y más fácil de recuperar.

Las tres grandes estrategias cognitivas generales descritas constituyen lo que se conoce con el nombre de *condiciones del aprendizaje significativo* (Cuadro 1).



Cuadro 1: El procesador

Finalmente, el propio procesador establece una especie de control ejecutivo que planifica y supervisa todas las decisiones (y sus posibles consecuencias), por lo que debe desarrollar un conjunto de estrategias vinculadas al logro efectivo de este control ejecutivo: son las estrategias metacognitivas.

Los contenidos

Todos los sujetos poseen los mismos elementos sistémicos y, en principio, se supone que también poseen los mismos mecanismos característicos del sistema, pero existen diferencias, no sólo en la capacidad de esos elementos, sino también en la manera de utilizarlos.

Ya desde los comienzos del siglo pasado, tanto desde la psicología genética (Piaget, 1936), como desde la psicología cognitiva (Bartlett, 1932), se proponía que los individuos poseen patrones generales de conocimiento (esquemas) que se organizan en estructuras a las cuales se asimilan los nuevos conocimientos que, a su vez, necesitan efectuar un proceso de acomodación a "lo nuevo" que las enriquece. Parece sensato suponer que esos esquemas se encuentran representados en la memoria en forma de redes semánticas complejas que se pueden utilizar independientemente o en coordinación con otros esquemas. Estos esquemas son "componentes conceptuales centrales que pueden ser representados por nódulos relacionados entre sí por diversos enlaces que indican relaciones diferentes como rasgos, propiedades, funciones o tipos" (Beltrán, 1993, p. 24).

Los esquemas abarcan todo lo que la persona conoce (incluida la metacognición), cree y siente de sí misma, de otras personas o de sucesos, tanto desde una perspectiva semántica, como episódica o afectiva, por lo que, al contener un registro de experiencias individualizadas, son idiosincrásicos. En definitiva, los esquemas abarcan la visión que el sujeto tiene del mundo.

De acuerdo con la división de la memoria a largo plazo, Piaget (1976) organiza los esquemas del sujeto en dos subsistemas: El subsistema I (que es el sistema de «comprender» o «estructural») y el subsistema II (que es el sistema de «saber hacer» o «procedimental»), es decir que, para Piaget, «conocer» es, indisociablemente, «comprender» y «saber hacer». Por ello, Piaget e Inhelder introducen un nuevo par dialéctico en la teoría piagetiana vinculado a la función reguladora de la inteligencia:

estructuras *versus* procedimientos o, si se quiere, siguiendo la terminología propuesta hasta ahora, conocimiento declarativo *versus* conocimiento procedimental (Inhelder y Piaget, 1979).

El conocimiento declarativo lo constituyen los hechos, los conceptos y los principios, es generado por un tipo de esquemas que Piaget (1976) denomina esquemas presentativos y nos permite comprender las razones (saber por qué). Es un tipo de conocimiento normativo que se representa mediante redes proposicionales o ideas.

El conocimiento procedimental lo constituyen los procedimientos, es generado por esquemas procedimentales y nos permite saber hacer. Es un tipo de conocimiento pragmático que se representa en forma de producciones (reglas de condición-acción) que tienen la estructura *si-entonces*, en donde el si especifica la condición o condiciones que deben existir para que se den un conjunto de acciones y el entonces enumera las acciones que tienen lugar cuando se cumplen las condiciones de la clausula si.

Sin embargo, aunque sólo existen dos subsistemas cognitivos (comprender y saber hacer) y parece que ambos se encuentran dotados de los instrumentos adecuados para su constitución y desarrollo (esquemas presentativos y esquemas procedimentales), es necesario recurrir a un tercer conjunto de esquemas porque existe un conocimiento que es indisociablemente declarativo y procedimental. Este tercer conjunto de esquemas es denominado por Piaget con el nombre genérico de esquemas operatorios y son los instrumentos cognitivos básicos que garantizan el *interplay* necesario para la apropiación del conocimiento matemático que es, a la vez, normativo y pragmático (Serrano, 2006).

El conocimiento en general, y el conocimiento matemático en particular, consisten pues en ideas, conceptos y procedimientos unidos mediante sistemas de relaciones. Estas ideas, representadas por sus nódulos correspondientes, y las relaciones que se establecen entre ellos pueden estar pobremente o densamente empaquetadas, pueden tener numerosas rutas de acceso a ellas o escasas, pueden estar débilmente estructuradas y, por lo tanto, aunque se encuentren disponibles, son difíciles de recuperar, pero también pueden estar fuertemente unidas y, por ello, fácilmente accesibles.

Los procesos

Los resultados del aprendizaje dependen de una serie de procesos y, por tanto, interesa identificar cuáles son esos procesos para construir modelos de los mismos que mejoren la calidad del aprendizaje. Los procesos de aprendizaje tienen dos particularidades. En primer lugar que pueden darse de manera diferenciada entre los sujetos, dando lugar diferentes estrategias. En segundo lugar que los procesos deben ser ejecutados por los alumnos y deben ser ejecutados todos. El problema es que los distintos autores no han llegado a un consenso sobre cuáles son esos procesos, ni desde una perspectiva cualitativa (cuáles son), ni desde una perspectiva cuantitativa (cuántos son). Sin embargo, con diferentes nomenclaturas, todos están de acuerdo en que los procesos deben activar los distintos elementos del procesador, de manera que, a pesar de las discrepancias, se nos muestra un panorama prometedor en la investigación en torno a los procesos de aprendizaje (Cuadro 2).

Cuadro comparativo de los procesos de aprendizaje

Gagné	Cook-Mayer	Rohwer	Shuell	Beltrán	Pons
Expectativas			Expectativas	Sensibilización	Activación
Atención	Selección	Selección	Atención	Atención	Focalización
Codificación	Adquisición	Comprensión	Codificación	Adquisición	Codificación
Almacenaje	Construcción	Memoria	Comparación	Personalización	Construcción
Recuperación	Integración	Recuperación	Repetición	Recuperación	Adquisición
Transfer		Integración		Transfer	Generalización
Respuesta		Auto-control			
Refuerzo			Evaluación	Evaluación	Evaluación

Cuadro 2. Procesos de aprendizaje

La propuesta efectuada por nosotros establece una secuenciación basada en siete grandes fases: activación, focalización, codificación, construcción, adquisición, generalización y evaluación.

La fase de *activación* representa el estragal del aprendizaje y se encuentra configurado, por tres procesos: la motivación, la emoción y la actitud.

El aprendizaje escolar es de naturaleza propositiva, lo que equivale a decir que se encuentra orientado hacia metas y estas metas hunden sus raíces en el concepto de necesidad, en el más puro sentido de la psicología de inspiración funcional de Edouard Claparède (Serrano, 2003; pp. 32-34), en primer lugar, porque toda actividad es fruto de una necesidad a la que tiende a satisfacer (ley de la necesidad), en segundo lugar, porque toda acción tiende a alcanzar una meta que interesa en un momento específico (ley del interés) y, en tercer lugar porque la capacidad de reacción de un organismo se encuentra siempre ajustada a sus necesidades (ley de autonomía funcional). Luego el primer paso de todo proceso de enseñanza y aprendizaje es el descubrimiento o la generación de necesidades en el sujeto que harán que el aprendizaje sea motivante.

Por lo que se refiere a la emoción conviene destacar, de manera prioritaria, la influencia de la ansiedad en el logro académico. La ansiedad, en su vertiente positiva, dinamiza los procesos de aprendizaje y facilita la recogida de información y su procesamiento y, en su vertiente negativa, inhibe e incluso llega a neutralizar la eficacia de los recursos del alumno a la hora de aprender. En cuanto a las actitudes, consideradas en su triple vertiente (cognitiva, afectiva y conductual), no es necesario profundizar en el hecho de que, si son positivas, constituyen un elemento facilitador del aprendizaje y, si son negativas, pueden ser una rémora para el mismo. En este sentido hemos de tener en cuenta que los aprendizajes que debe efectuar un estudiante, generarán un nivel de ansiedad óptimo y una buena actitud hacia los mismos, siempre que:

- originen conductas β (Piaget, 1978; pp. 5-7), es decir, que conduzcan a procesos de «equilibración mayorante» (ibid.; pp. 34-44) que, en términos vygotskianos, equivaldría a situarnos en la «zona de desarrollo potencial» del alumno (Vygotsky, 1984), lo que nos obligará a efectuar un análisis logocéntrico que establezca la secuenciación más adecuada de los contenidos a aprender, y
- antes de comenzar el aprendizaje se utilicen organizadores previos adecuados que posibiliten salvar la distancia entre lo que el sujeto ya sabe y lo que tiene que aprender y, de esta manera se permita la transición entre el significado lógico del contenido y el significado psicológico, es decir, que desde la perspectiva de Ausubel (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983), se active o se cree el inclusor pertinente al contenido que se debe adquirir.

La utilización de organizadores previos efectivos permitirá la activación de los procesos atencionales, dando con ello entrada a la fase de *focalización*. Debido a la propia naturaleza de los organizadores previos (contenidos introductorios de mayor nivel de generalidad que el material que debe ser aprendido), los procesos atencionales tienen, en un primer momento un sentido global encaminado a saber cuál es la demanda, pero como el canal de procesamiento es limitado y sólo se pueden presentar los contenidos de uno en uno, necesariamente debe existir un filtro (ya tenga un carácter de todo-o-nada o atenuador) que preserve la integridad del canal de procesamiento y seleccione la parte del input informativo que interesa procesar. En este sentido las estrategias de selección determinan cuánta información deberá llegar a la memoria de trabajo y, sobre todo, qué clase de información debe llegar, generando con ello un proceso de atención selectiva.

Una vez seleccionado el material comienza la fase de *codificación* en la que el sujeto debe preparar el material para darle sentido e interpretarlo significativamente y, para ello, la primera acción que debe realizar es la de estructurar y organizar los contenidos de manera que sean coherentes entre sí, lo que supone que, en primer lugar, debe activar un conjunto de categorías y/o relaciones que se encuentran disponibles en su memoria a largo plazo, por lo que deberá poner en marcha estrategias de elaboración, que nosotros llamaremos primarias porque su misión no es la de aprender el material sino la de categorizarlo. Una vez categorizado, el material deberá ser estructurado, estableciendo relaciones entre esas categorías por lo que habrán de ponerse en marcha estrategias de organización, que serán primarias por cuanto los procesos que efectúa el sujeto giran en torno al material que debe aprender.

Una vez organizado el material empieza la actividad verdaderamente constructiva del sujeto, que nosotros hemos denominado fase de *construcción*, por cuanto el alumno lo que debe hacer es establecer redes semánticas entre los contenidos (estrategias de organización secundaria), que posibiliten una estructura de los contenidos a la que sus esquemas (declarativos, procedimentales u operatorios) puedan conferir un significado personal (estrategias de elaboración secundaria).

El material aprendido significativamente puede interesar al sujeto, no sólo en un momento determinado, sino de manera permanente (fase de *adquisición* permanente). Para almacenar y retener los conocimientos, además de que las estrategias de organización y elaboración secunda-

rias ayudan a este menester, el sujeto dispone de otras estrategias que facilitan la retención y el mantenimiento del material en la memoria a largo plazo: son las estrategias de almacenamiento. A pesar de que el mantenimiento del material aprendido en la memoria a largo plazo, parece presentar una evidencia incontestable, no se tiene una información muy precisa del mismo, sin embargo parece muy probable que los conocimientos declarativos queden almacenados en forma de redes semánticas y los contenidos procedimentales lo hagan en forma de producciones. Los conocimientos (esquemas) una vez codificados, representados y almacenados en la memoria a largo plazo, no se comportan de manera estática sino que sufren diversas transformaciones (procesos de acomodación) que básicamente son de tres tipos: acumulación, refinamiento y reestructuración (Rumelhart y Norman, 1988).

Como el aprendizaje no termina con la adquisición y retención de un contenido es necesaria una fase que posibilite la *generalización* de lo aprendido. En efecto, si los aprendizajes se circunscribieran a un contenido específico, tendrían muy poca utilidad en la vida de una persona porque debería estar repitiendo el aprendizaje cada vez que un elemento contextual cambiara, por tanto es necesario que los sujetos se doten de una serie de estrategias que permitan transferir lo aprendido a otras situaciones. Esto supone que los procesos de abstracción que se efectúan sobre los contenidos, extrayendo la información de los propios materiales (abstracción empírica) se complemente con procesos de abstracción extraídos de sus propias acciones (abstracción reflexiva) y puedan ser aplicados a otras situaciones que se producen en planos equivalentes, paralelos o supraordinados (abstracción reflejante). Las estrategias cognitivas que posibilitan este trabajo cognitivo reciben el nombre de estrategias de generalización o transfer.

Finalmente, una última fase completa los procesos de aprendizaje: la *evaluación*. La evaluación tiene por finalidad comprobar que el sujeto ha alcanzado las competencias propuestas o auto-propuestas y su valor reside en comprobar que las expectativas establecidas durante la fase de activación (motivación) han sido cumplidas.

La generalización y evaluación de lo aprendido es posible gracias a la existencia de un control ejecutivo que nos permite planificar nuestro propio aprendizaje, activar el conocimiento episódico y semántico disponible y necesario para abordar las situaciones-problema, coordinar las estrategias a la hora de tratar el material informativo, tomar decisiones a

la hora de efectuar cambios de estrategias, regular los procesos y evaluar los resultados. Este control ejecutivo es el que se conoce en la actualidad como *proceso metacognitivo* y que, al implicar el conocimiento de los procesos sobre los que debe ejecutar el control, supone el control del conocimiento por el conocimiento y determina lo que conocemos como *aprender a aprender*.

Las fases y procesos que acabamos de analizar constituyen una cadena procesual cognitiva en la que los distintos momentos están estrechamente relacionados, de manera que entre ellos no sólo se establece una semejanza formal sino una continuidad diacrónica (comienza en la activación y termina en la evaluación) y sincrónica, ya que en cada momento se puede ver una auténtica implicación de todos los procesos (se atiende, se comprende, se almacena, se recupera, etc.).

Activación	Detección y/o generación de necesidades MOTIVACIÓN Determinación del nivel de desarrollo de los instrumentos cognitivos implicados en los procesos de aprendizaje Secuenciación del contenido (análisis logocéntrico) Organizadores previos EMOCIÓN ACTITUD
Focalización	Activación de los procesos atencionales ATENCIÓN GLOBAL Administración de claves de selección ESTRATEGIAS DE SELECCIÓN ATENCIÓN SELECTIVA
Codificación	Activación de categorías y/o sistemas de relaciones ESTRATEGIAS DE ELABORACIÓN PRIMARIA RECUPERACIÓN INICIAL Conexiones y relaciones entre los datos externos ESTRATEGIAS DE ORGANIZACIÓN PRIMARIA
Construcción	Establecimiento de relaciones semánticas entre los datos externos ESTRATEGIAS DE ORGANIZACIÓN SECUNDARIA RECUPERACIÓN RECONSTRUCTORA ESTRATEGIAS DE ELABORACIÓN SECUND ARIA
Adquisici ón	Transferencia de la información de la MEMORIA DE TRABAJO a la MLP ESTRATEGIAS DE ALMACENAMIENTO
Generalización	Procesos de abstracción reflexiva ESTRATEGIAS DE TRANSFER
Evaluación	Eficacia, eficiencia y satisfacción del proceso Cumplimiento de las expectativas

Cuadro 3. Fases, procesos y estrategias de aprendizaje

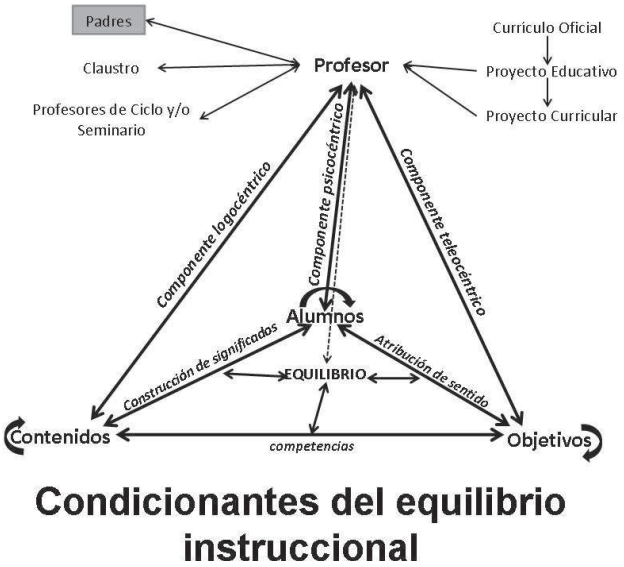
Los contextos

Nadie se puede imaginar un procesamiento de la información en el vacío. Como proponía Kurt Lewin (1935), la conducta de una persona ha de deducirse de una totalidad de hechos coexistentes y estos hechos tienen el carácter de un «campo dinámico» en el que el estado de cada una de las partes del campo depende de todas las otras. Como ya hemos dicho, el aprendizaje es una actividad vinculada a propósitos e intenciones particulares que se produce en contextos y situaciones específicas. Individuo y contexto constituyen, por tanto un todo interdependiente.

Cuando se examina el comportamiento humano en situaciones en las que se deben resolver problemas de la vida y en contacto con el entorno social y tecnológico, observamos que las personas parecen pensar en asociación con otros y con la ayuda de herramientas y medios que la cultura les proporciona y lo que caracteriza sus actos cognitivos (también los afectivos) es que los entornos socio-culturales y artificiales, que supuestamente "están fuera de sus cabezas", no sólo son estímulos y guías, sino que, en realidad, son vehículos de su propio pensamiento. Dewey (1884; p. 285) decía que "el concepto de ambiente es necesario para la idea de organismo, y con la concepción de ambiente aparece la imposibilidad de considerar la vida psíquica como algo individual y aislado que se desarrolla en el vacío".

Entonces, si los procesos sociales y los entornos en los que se desarrollan esos procesos, deben ser considerados como partes inseparables del proceso cognitivo "individual", tal vez tengamos que llegar a un nuevo concepto de cognición que, sin olvidar el elemento "solista", nos conduzca a la idea de "cognición distribuida". Decimos que sin olvidar el procesamiento individual, porque no todas las concepciones están "constantemente" distribuidas, ni todas "pueden" estarlo, ya que toda teoría que intente dar cuenta de los desarrollos y los cambios que se producen en las personas sometidas a situaciones de enseñanza y aprendizaje, no puede prescindir de la referencia a las representaciones mentales de los individuos que, por otra parte, son la "sustancia" presente en todas las situaciones en las que hay cogniciones distribuidas (Salomon, 2001). Por otra parte, pero en el mismo orden de cosas, partiendo de la *hipótesis del acceso equivalente*, según la cual lo que importa es el *tipo de conocimiento* presente, la manera en que se lo *representa*, la facilidad con la que se lo *recupera* y el modo como es *construido*, antes que

el sitio en el que todo eso se realiza, Perkins (2001) ha probado que las funciones ejecutivas pueden estar (y de hecho lo están) socialmente distribuidas, lo que se manifiesta cuando hacemos referencia a los aprendizajes que ocurren en el aula (interacción entre iguales, interacción profesor-alumno, interacción profesor-alumnos-contenidos, interacción profesor-alumnos-metas, interacción alumnos-contenidos-metas, etc.), tal y como se refleja en la unidad de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje (tetraedro instruccional) propuesta por nosotros (Cuadro 4). Sin embargo, este autor también ha probado que el conocimiento de orden superior, en las formas de heurísticas, modelos de explicación y formas de indagación, al no estar representado en ninguna parte, no puede ser distribuido y sólo satisface los criterios de la hipótesis de acceso equivalente "dentro" de la persona individual.



Cuadro 4. El tetraedro instruccional (modificado de Serrano y Pons, 2008)

Por tanto, sin negar la especificidad de la adquisición del conocimiento en el contexto del aula, que presenta numerosos campos dinámicos, y sin negar tampoco su determinante influencia en la adquisición de competencias por parte del alumno, hemos de admitir, como decía Salomon (ibid.) que no todos los procesos de adquisición de los conocimientos suponen cogniciones distribuidas, sino que antes bien, las

cogniciones individuales modifican los contextos, tanto o más que los contextos pueden modificar las cogniciones individuales, por lo que no resulta realista hablar de *distribución* sino de *interacción* o más correctamente, como propone C. Coll (Coll y Solé, 2001) de *interactividad*, es decir, de interacciones en torno a un contenido. Desde esta perspectiva, hablar del aula como contexto supone aunar en un sistema de conjunto los elementos físicos del contexto (espacio, material, etc.), los elementos psicológicos (afectos, emociones, expectativas, representaciones mutuas, actitudes, etc.) y los procesos que los participantes llevan a cabo para co-construir el contexto.

El conocimiento matemático

Desde nuestra perspectiva, si las cogniciones del sujeto que aprende se deben considerar en interacción con el contexto en torno a un contenido, la estructura del contenido puede ser determinante en este proceso. En este sentido, nosotros sabemos que los contenidos matemáticos tienen un alto nivel de especificidad que se caracteriza por presentar un alto grado de abstracción y generalidad, ser de naturaleza esencialmente deductiva, apoyarse en un lenguaje formal y específico y ser de naturaleza teórica, impersonal y atemporal (Onrubia, Rochera y Barberá, 2001; pp. 488-489). Sin embargo las matemáticas tienen una dimensión mucho más pragmática y constituyen una actividad socio-cultural e históricamente situada marcada por los criterios de utilidad e intencionalidad y basada en prácticas tan cotidianas como contar, medir, localizar, diseñar o jugar (Bishop, 1999).

Cuando consideramos en relación de simultaneidad ambos aspectos, las matemáticas se nos aparecen como un dominio de naturaleza biunívoca. En efecto, por un lado las matemáticas se basan en la ordenación y la organización de los objetos en el espacio y en el tiempo generando sistemas matemáticos prácticos y, por otro lado, estas actividades espacio-temporales de ordenación y clasificación generan sistemas simbólicos, estructurados jerárquicamente, que devienen en objetos del pensamiento, al margen del mundo real, que dan lugar a sistemas matemáticos formales. Puesto que, como acabamos de decir, el conocimiento matemático es biunívoco, "aprender matemáticas" supone la coordinación de ambos significados en situación de interdependencia, y aquí es donde se sitúa el problema del aprendizaje de esta disciplina.

Los alumnos mantienen en compartimentos estancos ambos significados de las matemáticas, sin alcanzar casi nunca su coordinación, generando una especie de "esquizofrenia semántica" que dificulta el aprendizaje de esta disciplina (Martí, 1996).

Siguiendo las fases y procesos que hemos establecido en la introducción de este trabajo, para un correcto procesamiento del conocimiento matemático es necesario, en primer lugar activar el procesador (fase de activación) y para ello hemos de tener en cuenta que debemos:

- Anclar el aprendizaje de las matemáticas en situaciones auténticas y significativas para los alumnos (generación de necesidades).
- Activar y emplear, como punto de partida, el conocimiento matemático previo de los alumnos (formal y práctico).
- Organizar y secuenciar los contenidos, asegurando la interrelación entre las distintas capacidades implicadas en el contenido que será objeto de aprendizaje.
- Atender los aspectos motivacionales, afectivos y actitudinales implicados en la adquisición del contenido.

A continuación comienza la actividad del procesador, y como el aprendizaje es una actividad socialmente mediada, todas las actividades serán llevadas a cabo mediante procesos de interacción encaminados a negociar los distintos significados (conceptuales, heurísticos, algorítmicos y estratégicos) que deban ir construyéndose.

En la fase de focalización, el alumno debe generar una representación coherente del problema, para que pueda tener una visión global de la situación a la que se enfrenta, lo que Mayer (2002) denomina «traducción del problema». Esta visión del problema posibilita que se pueda determinar qué información es relevante para su resolución. Por ejemplo, si se le plantea a un niño el problema: "Pedro tiene que ir de A hasta C, pasando por B, para hacer frente a la sed compra dos botellas de agua en A, pero al llegar a B le dan otras dos botellas. La distancia de A hasta B es de 300 hm y la de B hasta C es de 12 km ¿cuántos km ha recorrido? Primero debe elaborar una representación global de la situación (el problema es de cuantificación, la pregunta dice que cuantifique sólo las distancias), lo que le permitirá concluir que las botellas de agua no son relevantes para la solución del problema.

Una vez construida una representación (o representaciones) de la situación-problema el sujeto debe codificar el problema y establecer co-

nexiones y relaciones entre los datos del problema (fase de codificación). En nuestro ejemplo, se debe poner a disposición de la solución algún conocimiento semántico (no se pueden sumar cantidades que no están en la misma unidad de medida), algún conocimiento esquemático (ser capaz de reconocer el tipo de problema) como que el problema es de sumar, etc., lo que nos muestra que para establecer relaciones y conexiones entre los datos externos hemos de recuperar información de nuestras memorias declarativa y/o procedimental (proceso de asimilación).

Posteriormente habrá que construir el significado del problema (acomodación de los esquemas a la realidad, para conferir un significado a la misma). En esta fase (construcción) es donde el conocimiento estratégico se hace más evidente porque se ponen en marcha estrategias de organización y elaboración secundarias, junto con estrategias metacognitivas (control ejecutivo). Supongamos que el conocimiento declarativo (semántico) que se aplica para la resolución del problema es que 1 km = 10 hm y que el conocimiento procedimental (algorítmico), como se refleja en la solución es el propio de la multiplicación y la adición. La solución se expresaría de la siguiente manera (organización de los datos en función de los conocimientos previos): 300 hm = 300 hm; 12 km. (12 x 10 = 120) = 120 hm; 300 hm + 120 hm = 420 hm. Sin embargo, como la solución del problema debe expresarse en km se debe producir un cambio (refinamiento) en los esquemas que conducirán la reversibilidad del conocimiento de manera que si 1 km = 10 hm, entonces, 1 hm = 0'1 km, por lo que la solución sería 420 hm x 0'1 = 42 km.

Este nuevo conocimiento será almacenado en la memoria a largo plazo (almacenamiento) y estará disponible para otras situaciones y al servicio del control ejecutivo para organizar y planificar nuevas situaciones.

Igualmente, este conocimiento estará disponible para solucionar problemas de capacidad o peso (transfer horizontal) y, posiblemente, de superficie y volumen (transfer vertical).

Finalmente, si el individuo evalúa la eficacia y la eficiencia de lo aprendido y ha concluido el proceso de manera satisfactoria, su motivación por el aprendizaje de nociones matemáticas, su autoconcepto como aprendiz en matemáticas y su actitud hacia la disciplina, el profesor y los compañeros habrá cambiado positivamente.

Para concluir debemos mencionar que las perspectivas basadas en el constructivismo cognitivo y el socio-constructivismo nos han dejado hasta el momento propuestas muy interesantes para comprender mejor

los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como son los trabajos de Becker y Selter (1996), Bruer (1995), de Corte, Greer y Verschaffel (1996) o Mayer (2002).

Referencias bibliográficas

Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Bartlett, F.C. (1932). *Remembering: A study in experimental and social psychology*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Becker, J.P. y Selter, C. (1996). Elementary school practices. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 511-564). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Beltrán, J. (1993). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

Bishop, A.J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Bruer, J.T. (1995). *Escuelas para pensar. Una ciencia del aprendizaje en el aula*. Barcelona: Paidós.

Coll, C. y Solé, I. (2001). Enseñar y aprender en el contexto del aula. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (comps.), *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la educación escolar* (pp. 357-386). Madrid: Alianza Editorial.

De Corte, E., Greer, B. y Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. En D.C. Berliner y R.C. Calfee (eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 491-549). New York: Simon & Schuster MacMillan.

Dewey, J. (1884). The new psychology. *Andover Review*, *2*, 278-289.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1979). *Procédures et structures*. Archives de Psychologie, 47, 165-176.

Lewin, K. (1935). *A dynamic theory of personality*. New York: McGraw-Hill.

Martí, E. (1996). Psicopedagogía de las matemáticas. En J. Escoriza, R. González, A. Barca y J.A. González (eds.), *Psicología de la instrucción. Vol. 5: Psicopedagogías específicas: Áreas curriculares y procesos de intervención* (pp. 1-29). Barcelona: EUB.

Mayer, R.E. (2002). *Psicología de la educación. El aprendizaje en las áreas de conocimiento*. Madrid: Prentice Hall.

Onrubia, J., Rochera, M.J. y Barberá, E. (2001). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (comps.), *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la educación escolar* (pp. 487-508). Madrid: Alianza Editorial.

Perkins, D.N. (2001). Person-plus: a distributed view of thinking and learning. En G. Salomon (ed.), *Distributed cognitions. Psychological and educational considerations* (pp. 88-110). Cambridge: Cambridge University Press.

Piaget, J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1976). *El comportamiento, motor de la evolución*. Buenos Aires: Nueva Visión.

Piaget, J. (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*. Madrid: Siglo XXI.

Rumelhart, D.E. y Norman, D.A. (1988). Representation in memory. En R.C. Atkinson, R.J. Herrnstien, G. Lindzey y R.D. Luce (eds.), *Steven's Handbook of Experimental Psychology: Learning and Cognition*, Vol. II (pp. 511-588). Toronto: Wiley.

Salomon, G. (2001). Editor's introduction. En G. Salomon (ed.), *Distributed cognitions. Psychological and educational considerations* (pp. 11-22). Cambridge: Cambridge University Press.

Serrano, J.M. y Calvo, M.T. (1991). *Introducción a la Psicología Genética y sus relaciones con las disciplinas afines del curriculum universitario*. Murcia: Servicio de Publicaciones del ICE.

Serrano, J.M. (2003). *Psicología de la Instrucción. Vol. 1: Historia, concepto, objeto y método*. Murcia: DM Editor.

Serrano, J.M. (2006). *La construcción del concepto de número: Implicaciones para la Educación Infantil*. Valladolid: Editorial de la Infancia.

Serrano, J.M., González-Herrero, M.E. y Pons, R.M. (2008). *Aprendizaje cooperativo en matemáticas*. Murcia: Edit.um.

Serrano, J.M. y Pons, R.M. (2008). La concepción constructivista de la instrucción: hacia un replanteamiento del triángulo interactivo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 38*, 681-712.

Vygotsky, L.S. (1984). Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. *Infancia y Aprendizaje, 27/28*, 105-116.