Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad. Errores significativos

ANDRÉS NORTES CHECA
ROSA NORTES MARTÍNEZ-ARTERO
Universidad de Murcia

Resumen:
A lo largo de la enseñanza primaria y de la secundaria, la resolución de problemas está presente en todos los bloques de contenidos, de ahí que se haya querido conocer el comportamiento de los alumnos en una prueba importante. Partiendo de una muestra de exámenes de alumnos de la materia *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales* de la P.A.U. (Prueba de Acceso a la Universidad) de la Universidad de Murcia, en septiembre de 2009, se analizan las respuestas que dan a cada una de las diez cuestiones que constituyen la prueba, se pormenorizan las calificaciones, se detectan los errores más significativos y se comparan los estadísticos de cada una de las cuestiones y de los bloques, con la finalidad de aportar un estudio detallado en donde el profesorado pueda conocer la forma en que se contesta a esta prueba y en general como se enfrentan los alumnos ante la resolución de estos problemas y así contribuir a la mejora de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en este nivel.

Palabras clave:
Resolución de problemas, Prueba de Acceso a la Universidad, Enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Errores significativos.

Abstract:
As mathematics problem-solving is present in all blocks of content throughout primary and secondary education, we studied the performance of a group of students on a "Mathematics applied to social sciences" test which they had completed for the University Entrance Examination at the University of Murcia in September 2009. We analyzed the answers given to each of the ten items in the test, detailed the scores, detected the most significant errors and compared the statistical tests of each issue and block. Our ultimate aim was to elaborate a detailed analysis that may help teachers become aware of how students usually address the problems included in this type of tests.

Key words:
Problem solving. University entrance exam. Teaching and learning of mathematics. Significant errors.

Résumé:
Dans l'enseignement primaire et secondaire, la résolution de problèmes est présente dans tous les blocs de contenus. L'objectif ici a été de connaître le comportement des élèves à travers un test important. En se basant sur un échantillon d'examens de la «PAU» (Épreuve de l'accès a l'Université) de mathématiques appliquées à la matière de Sciences Sociales de l'Université de Murcie réalisée en septembre 2009, nous avons analysé les réponses données a chacune des dix questions qui constituaient l'épreuve. D'après les résultats détaillés, nous avons détecté les erreurs les plus significatives des élèves et effectué une comparaison statistique pour chaque question et chaque bloc, de contenus, dans le but de fournir une étude détaillée grâce à laquelle les enseignants pourraient apprendre comment les élèves répondent à ce test et de quelle manière ils affrontent la résolution des problèmes. Il s'agit donc d'améliorer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à ce niveau.

Mots-clés:
Résolution de problème, épreuve de l'accès à l'université, enseignement et apprentissage des mathématiques, erreurs significatives.

Fecha de recepción: 10/11/2009.
Fecha de aceptación: 15/04/2010.

Introducción

Descartes dijo: "Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para otros problemas", (recogido en Orton 1990, p. 51), dando a entender que cuando se resuelve un problema, posiblemente se haya aprendido a solucionar una variedad de problemas similares.

En los currículos oficiales de la enseñanza primaria y secundaria se destaca la resolución de problemas en matemáticas de la siguiente forma:

- En el R.D. 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas en la Educación primaria, en los criterios de evaluación correspondientes al Tercer Ciclo (5.º y 6.º) se menciona como último punto: "En un contexto de resolución de problemas sencillos, anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos para abordar el proceso de resolución" (MEC 2006, p. 43101).
- En el R.D. 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, en todos los cursos se ha incluido un bloque de contenidos comunes que constituye el eje transversal ver-

tebrador de los conocimientos matemáticos que abarca, haciendo referencia expresa a un tema básico en el currículo: la resolución de problemas (MEC, 2007a).

- En el R.D. 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, considera la resolución de problemas dentro de Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales como una dinámica que permite percibir las matemáticas "como una herramienta útil a la hora de interpretar con objetividad el mundo que nos rodea" (MEC 2007b, p. 45474).

Podemos pues decir en palabras de Orton (1990) que "la resolución de problemas puede considerarse como la verdadera esencia de las matemáticas" (p. 51) y matiza Cockcroft (1985) que "la resolución de problemas es consustancial a las matemáticas" (p. 90). De ahí que hayamos querido considerar la resolución de problemas dentro de un contexto especialmente importante como es la Prueba de Acceso a la Universidad, tomar una muestra y ver cómo responden los alumnos a la materia de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, cuál es su calificación y los errores mas corrientes que cometen con la finalidad de que el lector de este trabajo y en concreto el profesor de esta asignatura pueda tomar las medidas para evitarlo. Porque volviendo al R.D. (MEC 2007b) se menciona que en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales se debe "trabajar la fluidez y la precisión en el cálculo manual simple, donde los estudiantes suelen cometer frecuentes errores que les pueden llevar a falsos resultados o inducirles a confusión en las conclusiones" (p. 45474).

La resolución de problemas

Un problema es una tarea que la persona se enfrenta a ella y desea o necesita encontrar una solución, que no posee un procedimiento accesible y fácil de llegar a ella y hace intentos para lograrla.

Polya (1987) propone un modelo de resolución de problemas basado en cuatro etapas: 1) Comprender el problema; 2) Concebir un plan; 3) Ejecución del plan y 4) Visión retrospectiva (Examinar la solución obtenida). Este es el modelo más utilizado en matemáticas, ya que un problema es una tarea que tiene un interés, no hay una solución inmediata y se establecen caminos para resolverla. También hay que considerar que un problema representa un desafío para la persona que lo acepta, teniendo interés por sí mismo. Su resolución es un proceso que conlleva una serie de pasos.

Company y otros (1988) destacan como dificultades más comunes en la resolución de problemas: a) Una deficiente comprensión lectora, b) Una complejidad del texto, c) La representación mental del problema; d) Dificultad de localizar las metas a alcanzar que faciliten la solución; e) Familiaridad del sujeto con los procedimientos necesarios para resolver el problema; f) La utilización de un plan adecuado; g) El conocimiento del procedimiento operativo y factores afectivos.

Si se entienden las matemáticas como forma de pensar, afirman Resnick y Ford (1990), la consecuencia es que se conciba la resolución de problemas no solo como medio de enseñar los conceptos matemáticos, sino como objetivo fundamental en la enseñanza de las matemáticas, considerando Nortes (1992) "la resolución activa de problemas como el método más conveniente para aprender matemáticas" (p. 216).

Como dice Pérez (1994) "para resolver un problema hay que comprenderlo, traducirlo convirtiendo la información en términos matemáticos y eso exige además de conocimientos matemáticos, conocimientos lingüísticos, semánticos y de esquema" (p. 66).

La resolución de problemas se concibe generalmente como una actividad escolar cuyo principal objetivo es que el alumno alcance una meta quedando en segundo lugar el proceso seguido. Perales (2000) agrupa en tres bloques algunas variables que pueden influir en la tarea de resolver problemas: la naturaleza del enunciado, el contexto de la resolución y el solucionador, distinguiendo Pérez (1994) entre los expertos y los novatos, siendo los primeros más rápidos, cometen menos errores y aportan estrategias diferentes a las empleadas por los novatos.

En general los alumnos abordan la resolución de problemas (Caballero y otros, 2009) con procedimientos mecánicos y memorísticos, tienen escasos recursos para representar y analizar los problemas, no buscan distintas estrategias o métodos para la resolución. Además, el dominio afectivo influye en los procesos cognitivos en la resolución de problemas en el aspecto de las emociones, de las creencias y de las actitudes. También la inseguridad, el nerviosismo, la desesperación y la ansiedad les llevan al bloqueo ante una tarea. A este respecto Tobías (1978) –recogido en Nortes y Martínez (1996)- define la ansiedad ante las matemáticas como aquellos sentimientos de tensión, desvalimiento, indefensión y desorganización mental que una persona sufre cuando es instada a resolver un problema. Para Nortes y Martínez (1996) la ansiedad ante los exámenes de matemáticas disminuye conforme se acrecientan los sentimientos de autoeficacia y aumenta la seguridad personal, si bien mantener una ansiedad moderada puede facilitar el rendimiento del alumno.

En una actividad de resolución de problemas (Juidías y Rodríguez, 2007) se debe valorar el proceso de resolución, compartir el pensamiento matemático, estar expuesto a problemas matemáticos interesantes y útiles, y emplear recursos didácticos variados. Sin embargo, en un examen, algunas de estas características no se pueden poner de manifiesto.

La prueba

Como cada año las PAU se convocan en cada Comunidad Autónoma dos veces, en Junio y en Septiembre. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales es una asignatura que se estudia en primero y segundo curso de bachillerato y cuyo contenido es trabajado por aquellos alumnos que quieren estudiar diverso tipo de carreras, como Económicas, Magisterio, Informática, etc., aquellas que no son ni totalmente de Ciencias, como Ingenierías o Matemáticas, ni totalmente de letras como filologías. Como bien dice el R.D. (MEC, 2007b) "el amplio espectro de estudios a los que da acceso el bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales obliga a formular un currículo de la materia que no se circunscriba exclusivamente al campo de la economía o la sociología" (p. 45474). Se indica también que "las fórmulas, una vez que se les ha dotado de significado, adoptan un papel de referencia que facilita la interpretación de los resultados pero, ni su obtención, ni su cálculo y mucho menos su memorización, deben ser objeto de estudio" (p. 45474).

En cada convocatoria de las PAU en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales se proponen cinco bloques de contenidos y en cada bloque se presentan dos problemas para que el alumno conteste un problema de cada bloque, a elegir. En el protocolo del examen se indica el valor de cada problema de estos bloques y suele ser tradicional en la Comunidad Autónoma de Murcia presentar un bloque de Álgebra y Números, un segundo bloque que corresponde a la representación de una función o aplicación gráfica; un tercer bloque en donde se aplican derivadas o integrales, un cuarto bloque destinado a casos de probabilidad y un quinto y último, destinado a intervalos de confianza y a contraste de hipótesis.

El examen correspondiente a Septiembre de 2009 ha sido el siguiente:

BLOQUE 1 [3 PUNTOS]
Cuestión 1. Un señor acertó cinco números de la lotería primitiva, dos de los cuales eran el 23 y el 30. Propuso a sus hijos que si averiguaban los otros tres, se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en dos unidades al tercero; el segundo menos el doble del primero era diez unidades menor que el tercero y la suma de los tres era 24. ¿Cuáles son los tres números que faltan?
Cuestión 2. Una escuela prepara una excursión para cuatrocientos alumnos. La empresa de transportes dispone de ocho autocares de cuarenta plazas y diez de cincuenta plazas, pero solo dispone de nueve conductores. El alquiler de un autocar grande es de 80 euros y el de uno pequeño de sesenta euros. Calcular cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela ¿Cuántas plazas sobrarán? Identificar en el planteamiento las variables, las restricciones y la función a optimizar.
BLOQUE 2 [2 PUNTOS]
Cuestión 1. Dada la curva de ecuación $y=\dfrac{3x^2}{x^2+1}$ determinar: Dominio Máximos y mínimos Intervalos de crecimiento y decrecimiento Asíntotas
Cuestión 2. Dada la parábola de ecuación $y=x^2-8x+12$ hallar el punto en el que la recta tangente es paralela al eje de abscisas.
BLOQUE 3 [1,5 PUNTOS]
Cuestión 1. Hallar dos números cuya suma sea 20, sabiendo que su producto es máximo. Razonar el método utilizado.
Cuestión 2. Calcular el área de la región comprendida entre las curvas $y=4-x^2$ e $y=3x^2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

BLOQUE 4 [2 PUNTOS]
Cuestión 1. A un congreso de científicos asisten cien congresistas, de ellos ochenta hablan francés y cuarenta hablan inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que dos congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérpretes?
Cuestión 2. En un I.E.S. se realizan dos competiciones deportivas: baloncesto y fútbol. El 20% de los alumnos participan en la de baloncesto, de los cuales el 40% son de primero de bachillerato y el 30% participan en la de fútbol, de los cuales el 25% son de primer curso de bachillerato. Ningún alumno puede participar en dos competiciones. Elegido al azar un alumno, ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo de bachillerato?
BLOQUE 5 [1,5 PUNTOS]
Cuestión 1. El promedio de las *puntuaciones obtenidas en historia* por un número elevado de alumnos es de 6,50 puntos. Un determinado curso se examinaron cincuenta alumnos, obteniendo una puntuación promedio de 7,25 puntos. Suponiendo que la variable *puntuación obtenida en historia* es una normal con desviación típica igual a uno, ¿podemos afirmar con un nivel de significación de 0,05 que variaron las calificaciones?
Cuestión 2. Una muestra aleatoria simple de veinticinco estudiantes responden a una prueba de inteligencia espacial, obteniendo una media de cien puntos. Se sabe que la variable *inteligencia espacial de todos los alumnos* es una variable normal con una desviación típica igual a diez, pero se desconoce la media. ¿Entre qué límites se hallará la verdadera inteligencia espacial media de todos los alumnos, con un nivel de confianza de 0,99?

La muestra

La muestra la constituyen 134 exámenes entregados de forma aleatoria en cuatro sobres y que se corresponden con alumnos de distintas localidades de la Comunidad Autónoma, pertenecientes a centros públicos y concertados y que se examinaron en distintas sedes (Murcia, Cartagena, Lorca,…).

De cada Bloque los alumnos eligen una cuestión. El porcentaje en la elección ha sido:

Tabla 1. Porcentajes

Bloque	**1.º**	**2.º**	**3.º**	**4.º**	**5.º**
Cuestión 1	52%	91%	25%	22%	23%
Cuestión 2	39%	8%	62%	70%	60%
En blanco	9%	1%	13%	8%	17%

De la lectura del cuadro vemos que la cuestión referida a estudiar una curva ha sido la contestada por el 91%, la mayor parte de los alumnos; de los 134 fueron 122 los que la eligieron y la que menos, obviamente, la alternativa a ésta en el mismo bloque, con tan solo el 8%. Por el contrario es en el primer bloque donde la elección ha estado más equilibrada con el 52% para la cuestión del sistema de ecuaciones y el 39% para la cuestión de programación lineal. El bloque de más alumnos que no contestaron a ninguna de las dos cuestiones en el quinto con el 17%.

Los resultados

1. Resultados generales de la muestra. Corregida la prueba, resultó como calificación más alta un 10 y como calificación más baja 0,2, siendo la nota media de los 134 alumnos 4,5 con una desviación típica de 2,2. Del total de los alumnos el 62,7% no llegaron al 5, el 22,4% obtuvo una calificación de aprobado entre 5 y 7; el 13,4%, obtuvo notable, entre 7 y 9, y tan solo el 1,5% obtuvo sobresaliente. Si queremos saber en qué calificación se encuentra la mediana y la moda, diremos que es en 4 puntos. Recogidos en una tabla resulta:

Tabla 2. Estadísticos

	Media	**Mediana**	**Moda**	**Des. típ.**
Estadísticos	4,5	4	4	2,2

El número de alumnos que se encuentra en el intervalo ($\bar{x}-\sigma$ $\bar{x}+\sigma$) = (2,3, 6,7) es 88, es decir el 65,7% de la muestra, lo que comparado con el caso de una distribución normal que es del 68,2%, nos acerca a una distribución casi simétrica (mediana=moda=4 y media=4,5) y ligeramente asimétrica a la derecha o positiva.

2. Resultados de las cuestiones en cada bloque.

Bloque 1. Cuestión 1. (Calificación 3 puntos). De 70 alumnos que contestaron esta cuestión, 25 alcanzaron la máxima puntuación, es decir que plantearon el sistema y llegaron a la solución correcta, mientras que tan solo 2 alumnos tuvieron la calificación de 0, no llegando a traducir correctamente el enunciado en ninguna de las tres ecuaciones. La media es de 1,71 y la desviación típica de 1,07. Esta cuestión fue aprobada (1,5 o más) por 38 alumnos, un 54% de los que la contestaron.

Bloque 1. Cuestión 2. (Calificación 3 puntos). De los 52 alumnos que contestaron a esta cuestión, tan solo 5 hicieron un planteamiento correcto y una resolución válida, siendo 5 los alumnos que obtuvieron la calificación de 0, no llegando ni a establecer la función objetivo, ni las restricciones, ni el resto. A diferencia de la cuestión anterior, en donde las puntuaciones estaban más concentradas, aquí están más dispersas debido a la enorme variedad de aspectos que el alumno puede responder y a la puntuación pormenorizada de cada una de éstas; así, la media resulta 0,89 y la desviación típica de 0,84, siendo 46,5 puntos la suma de los obtenidos por los 52 alumnos que contestaron. La desviación típica nos indica que la dispersión fue mayor en la cuestión 1, ya que fue 1,07 frente a 0,84 en la cuestión 2.

Bloque 2. Cuestión 1. (Calificación 2 puntos). Esta es la cuestión respondida por el mayor número de alumnos, 122, si bien su resultado no se corresponde porque fuera una cuestión sencilla que se supiera hacer, sino porque al tener varios apartados, invitaba a hacer alguno de ellos, mientras que en la cuestión alternativa sólo se establecía una pregunta. La media es 0,83 y la desviación típica 0,57, siendo 7 los que obtienen 2 puntos y 14 los que obtienen 0.

Bloque 2. Cuestión 2. (Calificación 2 puntos). Tan solo 10 alumnos contestaron a esta cuestión, de los cuales 4 obtuvieron 0 y sólo 1 obtuvo 2 puntos. Siendo la media 0,68 y la desviación típica 0,69. La media en este caso es inferior a la cuestión anterior y confirma que fueron menos los que se atrevieron a contestar a una cuestión en donde solamente se establecía una pregunta, si bien era casi inmediata, a diferencia de la cuestión alternativa. La desviación típica nos indica que en este bloque la dispersión fue en esta segunda cuestión superior.

Bloque 3. Cuestión 1. (Calificación 1,5 puntos). Fueron 33 los alumnos que se decantaron por maximizar una función, haciendo una derivada, frente a la alternativa de calcular el área de una región empleando una integral definida. El tiempo dedicado a resolver esta cuestión es muy inferior al dedicado al área y además con una posibilidad de cometer error muchísimo inferior. La calificación media obtenida por los alumnos en esta cuestión es 0,94 y la desviación típica 0,55, siendo 12 los que alcanzan la máxima puntuación y 5 los que se quedan en 0.

Bloque 3. Cuestión 2. (Calificación 1,5 puntos). Fueron 83 los alumnos que se decantaron por calcular el área de la región del plano comprendida entre dos curvas, el 62%, y la media obtenida 0,77 y la desviación típica 0,53, siendo 16 alumnos los que obtienen la máxima calificación de 1,5 y 16 los que obtienen 0. En esta cuestión, donde el aprobado estaría en 0,75, los alumnos que contestaron superaron el aprobado con la media indicada. Las desviaciones típicas son similares, por lo que no hay diferencias en la dispersión.

Bloque 4. Cuestión 1. (Calificación 2 puntos). Del total de 134 alumnos de la muestra son 29 los que responden a ella, y en donde mayor número de ceros hay, en total son 24 y 3 que alcanzan la mayor puntuación, 2, y el resto 2 alumnos que tienen una puntuación intermedia. Esto es así porque al tratarse de un problema de probabilidad con una sola pregunta el reparto de puntos está asociado a la contestación y al proceso seguido. La media en esta cuestión es 0,28 y desviación típica 0,64.

Bloque 4. Cuestión 2. (Calificación 2 puntos). De los 94 alumnos que contestaron su media fue de 1,29 y su desviación típica de 0,82, superando el aprobado en este caso establecido en 1. Además 46 alumnos contestaron correctamente obteniendo la máxima calificación y 18 obtuvieron cero. Al contestar a esta segunda cuestión muchos más alumnos que a la cuestión 1, también hace que la dispersión sea mayor, 0,82 frente a 0,64.

Bloque 5. Cuestión 1. (Calificación 1,5 puntos). A esta cuestión contestaron 31 alumnos, con una calificación media de 0,60 y una desviación típica de 0,41, no alcanzando ninguno la puntuación máxima y siendo 5 los alumnos con 0 puntos. En esta cuestión, al tener que señalar claramente la hipótesis nula y la alternativa, el intervalo de aceptación/rechazo y la respuesta a si variaron las calificaciones, supuso que los alumnos, al no considerar todos los aspectos al contestar, no obtuviera ninguno esa calificación de 1,5.

Bloque 5. Cuestión 2. (Calificación 1,5 puntos). De los 80 alumnos que contestaron a esta cuestión, alcanzaron una media de 1,08 y una desviación típica de 0,53, siendo 42 los que lo tienen correctamente contestado y tan solo 10 los que alcanzaron una puntuación nula. Esta respuesta era inmediata con tan solo una sencilla operación y no tenía, como en la otra cuestión de este bloque, varios pasos previos a la respuesta. En este último bloque ocurre como en el anterior que hay mayor dispersión donde hubo mayor número de respuestas.

Pasadas estas medias a una calificación sobre 10 para poder compararlas, resulta la siguiente tabla:

Tabla 3. Medias

Medias (sobre 10)	**Bloque 1.º**	**Bloque 2.º**	**Bloque 3.º**	**Bloque 4.º**	**Bloque 5.º**
Cuestión 1	5,7	4,2	6,3	1,4	4
Cuestión 2	3	3,4	5,1	6,5	7,2
Media ponderada	4,5	4,1	5,4	5,3	6,3

Lo que nos indica que se alcanza la mayor puntuación en la cuestión 2 del bloque 5, en donde tan solo tenían que calcular un intervalo de confianza, una fórmula, y la más baja en el cálculo de una probabilidad, en la cuestión 1 del bloque 4, en donde el enunciado había que leerlo con detenimiento para poder distinguir y deducir las probabilidades de los datos. Además son cinco las cuestiones en donde se obtienen una media superior a 5 y otras cinco cuestiones en donde no se alcanza el aprobado.

Forma de resolución de los problemas

Perales (2000) llama solucionador al agente activo del proceso de resolución de un problema, es decir al sujeto "resolvedor", que necesita un conocimiento teórico de la materia, un conocimiento procedimental que incluye unas habilidades cognitivas, una predisposición a la tarea y otras relativas al carácter del sujeto (como la ansiedad), la edad y el sexo. De ahí que nos fijemos en como el "resolvedor" de problemas ha llevado a cabo su labor.

Bloque 1. Cuestión 1.

Los alumnos que contestaron a esta cuestión tenían dos caminos para desarrollarla. Una vez establecido el sistema de ecuaciones, podían hacerlo resolviéndolo por el Método de Gauss o directamente por sustitución de una incógnita en las otras dos ecuaciones. Por el Método de Gauss lo resolvieron el 85% y el 15% directamente. En el primer caso, siguiendo un procedimiento adquirido y reiterado de forma insistente, ya que sale todos los años, mientras que el segundo intentando un proceso un poco más creativo, máxime cuando el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas con una sencilla sustitución nos aportaba el valor de una incógnita y las otras dos eran ya casi inmediatas. Esto demuestra que el algoritmo adquirido, sea el que sea, como en este caso, se supone que nos lleva a la solución aunque sea un poco más largo el camino como es el caso del Método de Gauss. Tan solo dos alumnos resolvieron el sistema por el procedimiento más sencillo:

$a+b=c+2$

$b-2a=c-10$

$a+b+c=24 \Rightarrow a+b+c=(a+b)+c=(c+2)+c=24 \Rightarrow c=11$

Sustituyendo: $a+b=13$ y $b-2a=1 \Rightarrow b=9$ y $a=4$.

Bloque 1. Cuestión 2.

Aquí en esta cuestión hay una dispersión tan grande en las respuestas, que nos lleva, como decíamos antes, a una dispersión grande de resultados. Claramente había que especificar la función objetivo, las restricciones, dibujar la región factible y obtener la solución óptima que minimiza el coste de la excursión. En esta cuestión y en la anterior de este bloque los errores que presentaremos más adelante indican la falta de atención y la ligereza con que se utilizan determinados conceptos matemáticos.

Bloque 2. Cuestión 1.

La mayoría de los alumnos, cuando llegaron a este bloque se lanzaron a contestar esta cuestión, fue el 91% del total de la muestra. Aquí se pedían en concreto cuatro cosas: a) Dominio, b) Máximos y mínimos, c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y d) Asíntotas. El dominio se contestaba con un ligero razonamiento, sin necesidad de realizar ningún cálculo, pero en el caso de hacerlo, había que llevarlo a cabo correctamente, cosa que como veremos más adelante, no siempre se hizo y dio origen a varios errores de apreciación. Para los máximos y mínimos, la primera derivada nos llevaba a una expresión en donde el denominador era siempre positivo y el numerador era 6x, que nos determinaba en que punto había máximo o mínimo. Para el tercer apartado, conocido el punto y dando valores en una tabla era más que suficiente para conocer el intervalo de crecimiento y el de decrecimiento. Por último, la aplicación del concepto de asíntota vertical, horizontal y oblicua llevaba a la respuesta oportuna de este apartado. Sin embargo, la media de 0,83 (sobre 2) y la desviación de 0,57, indica que algo falló por el camino. En problemas como éste en donde hay muchos cálculos que hacer, aunque sean sencillos, nos indica lo difícil que es conseguir una puntuación alta, ya que se va sumando de poco en poco hasta alcanzar el total.

Bloque 2. Cuestión 2.

Han sido 10 alumnos los que han respondido a esta cuestión que en principio no tenía mayor dificultad que la de calcular la pendiente de una recta tangente a una curva, que es paralela al eje de abscisas y que se resolvía en una línea. Sin embargo, solo uno contestó correctamente, haciendo el planteamiento y la resolución bien.

Bloque 3. Cuestión 1.

Se trataba de hallar dos variables conocida su suma y sabiendo que su producto es máximo. Ocurre en este bloque como en el bloque anterior, ya que esta cuestión se resuelve en dos líneas y la cuestión 2 a elegir con ella, conlleva más operaciones. El poner la función a maximizar, utilizar la suma de las dos variables para expresar la función a maximizar con una sola variable, derivar e igualar a cero para obtener el valor de esa incógnita y luego sustituir su valor en la expresión de la suma y determinar el valor de la otra variable es un proceso casi mecánico, podríamos decir que se trata de un algoritmo. Quizás es menos tratado en clase y se hacen menos ejercicios de este tipo y eso probablemente hizo que los alumnos no la eligieran más.

Bloque 3. Cuestión 2.

Se trata de un problema que la mayoría de los alumnos utiliza un mismo procedimiento. Primero igualar la variable y de cada función para determinar los valores de la variable x que constituyen los puntos de corte. Después, dibujar las dos curvas para hacernos una idea del área que se va a determinar y por último calcular la integran definida que nos dará el valor del área. El no obtener todos la máxima calificación es debido a que algunos no calculan correctamente los puntos de corte de las dos curvas, otros representan de forma incorrecta las curvas y también los hay que no calculan bien la integral definida dando valores negativos o de cero al área.

Bloque 4. Cuestión 1.

En la primera cuestión de probabilidad solamente hacía falta efectuar una representación adecuada y un razonamiento claro de la situación. Aquí no había una fórmula para aplicar y aunque contestaron 29 alumnos a esta cuestión, 24 obtuvieron la calificación de cero, porque no comprendieron lo que allí se estaba pidiendo. Una pregunta que hicieron varios alumnos a lo largo del examen era: "Si hay 100 congresistas, ¿cómo pueden ser 80 los que hablan francés y 40 los que hablan inglés?" Es la cuestión que tiene el peor resultado, como vemos en la última tabla.

Bloque 4. Cuestión 2.

Esta cuestión es más típica y la resuelven la mayoría de los alumnos utilizando un diagrama de árbol sin más. Algún alumno se despistó porque no se indicara que el bachillerato lo constituye primero y segundo curso, aunque eso es evidente, y algún otro se despistó también porque la pregunta no iba referida a los alumnos que no practicaban deporte. No obstante de los 94 alumnos que optaron por esta cuestión, 46 contestaron correctamente a la pregunta.

Bloque 5. Cuestión 1.

Aquí se trataba de plantear un contraste de hipótesis poniendo claramente la hipótesis nula y la alternativa, establecer la región de aceptación/rechazo y resolver. Como en casos anteriores al ser varias las cosas a realizar paso a paso en alguna de ellas hubo un *lápsus* en la mayoría de alumnos y la puntuación es baja.

Bloque 5. Cuestión 2.

Aquí nuevamente se trata de aplicar una fórmula y ver los extremos de un intervalo. Una vez obtenido el valor de la tabla de distribución normal, el resto es inmediato. La cuestión alcanza la puntuación más alta de las diez analizadas.

Errores más significativos

Bloque 1. Cuestión 1.

Un señor acertó cinco números de la lotería primitiva, dos de los cuales eran el 23 y el 30. Propuso a sus hijos que si averiguaban los otros tres, se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en dos unidades al tercero; el segundo menos el doble del primero era diez unidades menor que el tercero y la suma de los tres era 24. ¿Cuáles son los tres números que faltan?

Hemos observado dos tipos de errores fundamentales. Uno es la no comprensión correcta del enunciado que lleva a escribir las ecuaciones de forma incongruente y otro es, una vez resuelto el sistema, ver si las soluciones tienen sentido en el contexto del problema. Vamos a indicar unas cuantas de las respuestas aportadas por los alumnos atendiendo a esta clasificación y se podrá ver lo que decimos anteriormente.

- Falta de comprensión del enunciado. (Siendo x, y, z el primero, el segundo y el tercer número, respectivamente)

a) $-2x+y+z=10$	i) $x+y \geq 2z$; $y-2x<10z$
b) $2x-y-8z=0$; $23y+30z=0$	j) $2x+2y=z$; $y-2x=10+z$
c) $x+y=2z$; $y-2x=-10z$	k) $2x+2y=z$; $y-2x=10+z$
d) $x+y=z-2$; $y-2x=z+10$	l) $2(x+y)=z$
e) $y-2x=10-z$	m) $x+y=2-z$; $y-x2=10+z$
f) $x+y=3z$; $y-2x=10-z$	n) $2x+2y=z$; $y-2x=-10$
g) $x+y=2z$; $y-2x=10-z$	o) $x+y-2z=0$; $-2x+y-10z=24$
h) $x+y=z+3$	p) $x+y \geq 2z$; $y-2x \leq 10z$

- Soluciones sin sentido. En este contexto los números no pueden ser negativos ni fraccionarios ni superiores a 49, sin embargo, algunas de las respuestas fueron:

a) x=4,67; y=8,33; z=11
b) x=-4; y=15; z=13
c) z=22; y=14/3; x=-8/3
d) x=11, y=66; z=75
e) x=-1; y=-4; z=3
f) x=56; y=48; z=16
g) x=0; y=-13; z=11
h) z=-24; y=112; x=-64
i) z=11; y=8,33; x=21,33

Bloque 1. Cuestión 2.

Una escuela prepara una excursión para cuatrocientos alumnos. La empresa de transportes dispone de ocho autocares de cuarenta plazas y diez de cincuenta plazas, pero solo dispone de nueve conductores. El alquiler de un autocar grande es de 80 euros y el de uno pequeño de sesenta euros.

a) Calcular cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela
b) ¿Cuántas plazas sobrarán?

Identificar en el planteamiento las variables, las restricciones y la función a optimizar.

En esta cuestión se encuentran errores desde escribir la función objetivo a las restricciones y por último a la interpretación.

- Función objetivo (Siendo x el número de autocares grande e y el número de autocares pequeños)

a) f(x, y) = 80x+70y
b) f(x, y) = 50x+40y
c) f(x, y) = x+y
d) 60x+80y=0
e) f(x)=8x+10y

- Restricciones: (Sin sentido en la mayoría de casos)

a) $8x+40y \leq 9$; $10x+50y \leq 9$
b) $8x+40y \leq 400$; $10x+50y \leq 400$
c) $8x+10y \leq 9$
d) $x+y \geq 9$; $8y \geq 40$; $10x \geq 50$
e) $40x+50y \leq 9$
f) $8x+40y+z=60$; $10x+50y+9z=80$
g) $8x \leq 40$; $10y \leq 50$; $x \leq y$
h) $40x+8y \leq 400$; $10x+8y \leq 400$; $y \leq 50$; $x \leq 40$
i) $x+y \geq 400$; $8x+10y \leq 9$

j) $x+y \geq 9 \Rightarrow y= \frac{9}{x}$
k) $8x+40y \geq 400$; $10x+50y \geq 400$
l) $x+y \leq 400$; $8x+40y \leq 60$; $10x+50y \leq 80$

- Soluciones (Sin comprobar si tienen sentido en el contexto del enunciado):
  a) Se necesitan 0 autobuses de 40 plazas y 40 autocares de 50 plazas
  b) Se necesitan como mínimo 5 autobuses grandes y 4 pequeños y evidentemente sobrarían 620-400=220 asientos libres
  c) 1 de 50 plazas, 1 de 40 plazas y sobran 280 plazas
  d) 9 grandes y 9 pequeños
  e) A(1,125; 0) y B(0; 1,125). Lo más económico sería A. Como hay que alquilar los autobuses enteros, lo más económico sería alquilar un autobús pequeño, por 70, que uno grande por 80€ (Si alquiláramos 1,125 autobuses pequeños tendríamos que pagar dos autobuses). Sobrarían 400-40=360 plazas.

Bloque 2. Cuestión 1.

Dada la curva de ecuación $y= \frac{3x^2}{x^2+1}$ determinar: Dominio Máximos y mínimos Intervalos de crecimiento y decrecimiento Asíntotas

Aquí se han encontrado errores en los distintos apartados.

- En el cálculo del dominio:
  a) $x^2+1=0 \Rightarrow x=\pm 1$
  b) Al comprobar que $x^2+1=0$ no tiene solución en el campo real, ponen: No tiene dominio
  c) $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\sqrt{-1}=0$
  d) $x^2+1=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0$ y $x=-1$
- En el cálculo de máximos y mínimos:
  a) Al calcular la derivada primera: $f´(x)= \frac{6x}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=-6$
  b) Idem: $6x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{6}$
  c) Idem: $6x=0 \Rightarrow x=6$ y $x=-1$

d) Idem: $6x=0 \Rightarrow x=6$

e) $f'(x) = \frac{6x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow (x^2+1)^2 = 0 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=-1$

f) Idem: $(x^2+1)^2=x^4+1$

g) Idem: $(x^2+1)^2=0 \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}=-0{,}5$

h) $\frac{6x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{2} = 3x$

i) $\frac{6x}{(x^2+1)^2} = 6x+1=0 \Rightarrow x=6-1=5$

- En el cálculo de intervalos de crecimiento y decrecimiento: Al no obtener el punto donde puede existir máximo o mínimo los intervalos no se calculan adecuadamente. Además, el no efectuar una representación aproximada, porque no lo pedía el problema, hizo que sobresalieran algunos errores como:
  a) La función no crece ni decrece, es constante
  b) Máximo en $+\infty$ y mínimo en $-\infty$
  c) Máximo = $]-\infty, -1[$; Mínimo = $[0, 1]$
  d) No tiene máximos ni mínimos (hace el dibujo aproximado con un mínimo en (0, 0))

- Asíntotas: Al efectuar mal el cálculo del dominio, en muchos casos establecen asíntotas verticales en 1 y en -1. Hay un alumno que calcula el valor m de la asíntota oblicua y=mx+n, así:

$$m= \frac{\frac{3x^2}{x^2+1}}{x} = \frac{3x^2}{x^3+x}$$

Bloque 2. Cuestión 2.

Dada la parábola de ecuación $y=x^2-8x+12$ hallar el punto en el que la recta tangente es paralela al eje de abscisas.

Al ser pocos los alumnos, 10 en concreto, que contestaron a esta cuestión no hemos constatado muchos errores a señalar. Uno muy significativo es el siguiente:

$f(x)=x^2-8x+12 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}-8+12$

Bloque 3. Cuestión 1.

Hallar dos números cuya suma sea 20, sabiendo que su producto es máximo. Razonar el método utilizado.

En esta cuestión hemos constatado algunos errores significativos, unos referidos a operaciones algebraicas y otros referidos a falta de comprensión del enunciado, como los siguientes:

a) f(x): $x+y=20 \Rightarrow f(x)=x(20-x)=20 \Rightarrow f(x)=20x\cdot 2x$
b) $f(x)=(20-y)+y=20 \Rightarrow f(x) = 20 \Rightarrow f(x) = 1$
c) $(20-y)y=20y-y$
d) $P=(20-b)b=20-b^2 \Rightarrow P'=-2b \Rightarrow P'=0 \Rightarrow b=-2$
e) $x+y=0$; $x\cdot y=$máximo
f) P máx:$xy=20-y\cdot y=20-y^2 \Rightarrow y^2=20 \Rightarrow y=4{,}47$

Bloque 3. Cuestión 2.

Calcular el área de la región comprendida entre las curvas $y=4-x^2$ e $y=3x^2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

Aquí nos encontramos con unos errores de expresiones matemáticas, ya que encontramos la integral que no va acompañada del diferencial dx, en otros casos se sigue poniendo el signo de la integral cuando ya se ha realizado pero que lo utilizan a modo de corchete, en otros casos una deficiente representación gráfica de las curvas hace que los limites de integración sean erróneos y sobretodo la equivocación mencionada en bloques anteriores de las expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones. Algunos casos son:

a) $4x^2-4=0 \Rightarrow 4(4x)-4=0 \Rightarrow x=4$ y $x=0$
b) $-4x \Rightarrow 2 \Rightarrow +4=0 \Rightarrow x=\{-1, 0\}$
c) $-4x^2+4=0 \Rightarrow -4x^2=-4 \Rightarrow x^2 = \frac{-4}{-4} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$
d) $x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}$ y $x=\sqrt{-1}$ (no existe)
e) $4x^2-4=0 \Rightarrow x(4x-4)=0 \Rightarrow x=0$ y $x=1$

Bloque 4. Cuestión 1.

A un congreso de científicos asisten cien congresistas, de ellos ochenta hablan francés y cuarenta hablan inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que dos congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérpretes?

En este primer caso de probabilidad, ya indicábamos la pregunta más repetida, pero los errores se han centrado en no recordar que el valor máximo de la probabilidad es 1. Algunos casos son:

a) Probabilidad = 3200
b) Probabilidad = 3,45
c) Probabilidad = 3
d) P (de que no se entiendan) = 80x20+40x60=4000
e) También hay un caso extraño que responde con: $P = \frac{2}{80}$

Bloque 4. Cuestión 2.

En un I.E.S. se realizan dos competiciones deportivas: baloncesto y fútbol. El 20% de los alumnos participan en la de baloncesto, de los cuales el 40% son de primero de bachillerato y el 30% participan en la de fútbol, de los cuales el 25% son de primer curso de bachillerato. Ningún alumno puede participar en dos competiciones. Elegido al azar un alumno, ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo de bachillerato?

Aquí en esta cuestión también el error más repetido es obtener valores para la probabilidad superiores a 1 y dejarlo. Así:
a) P = 1,08
b) P = 1,025
c) La probabilidad de que salga un alumno de 2.º es 34,5

Bloque 5. Cuestión 1.

El promedio de las *puntuaciones obtenidas en historia* por un número elevado de alumnos es de 6,50 puntos. Un determinado curso se examinaron cincuenta alumnos, obteniendo una puntuación promedio de 7,25 puntos. Suponiendo que la variable *puntuación obtenida en historia* es una normal con desviación típica igual a uno, ¿podemos afirmar con un nivel de significación de 0,05 que variaron las calificaciones?

En esta cuestión hay errores en cuanto a establecer las hipótesis del contraste, de establecer intervalos, de contestar si variaron o no las calificaciones y de calcular el valor de las tablas correspondiente al nivel de significación.

Bloque 5. Cuestión 2.

Una muestra aleatoria simple de veinticinco estudiantes responden a una prueba de inteligencia espacial, obteniendo una media de cien puntos. Se sabe que la variable *inteligencia espacial de todos los alumnos* es una variable normal con una desviación típica igual a diez, pero se desconoce la media. ¿Entre qué límites se hallará la verdadera inteligencia espacial media de todos los alumnos, con un nivel de confianza de 0,99?

En esta última cuestión, como en caso anterior hay errores al calcular el valor de las tablas correspondiente al nivel de confianza o poner correctamente donde corresponde el valor de la media muestral, o el valor del tamaño de la muestra o hacer las operaciones correctamente, pero no encontramos otro tipo de errores.

Los errores cometidos por los alumnos, como indica Pérez (1994) pueden informar de las dificultades de procedimiento de tipo técnico o estrategias que tiene el alumno además del tipo de teorías o creencias que maneja en un momento determinado. En la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas los errores deben ser considerados como fuente de información para el profesor en lugar de cómo fracaso del alumno.

Algunas conclusiones finales

Para obtener un buen resultado en cualquier acción hay que mostrar una actitud positiva y las actitudes hacia la resolución de problemas han sido consideradas como un componente de peso en las actitudes hacia las matemáticas (Castro, 2008). Los alumnos que se presentan a las PAU, estamos seguros que tienen una actitud positiva hacia la resolución de problemas, pero según hemos constatado en la corrección de la prueba y en la forma de contestar, reiteran los tres aspectos que Scheerer (1963) menciona y que cita Orton (1990): 1) Nos mostramos inclinados a hacer supuestos iniciales que no están incluidos en el planteamiento del problema; 2) Hay una negativa a aceptar una desviación cuando parece que está demorándose el logro del objetivo requerido y 3) La habituación que se tiene una vez acomodados en la rutina, hace no buscar un método más rápido.

De hecho, se pone de manifiesto en las dos cuestiones del bloque 1, en donde se hacen supuestos iniciales que no están incluidos en el enunciado del problema. Algunos, aún cuando no ven salida a su planteamiento no lo varían y los hay que reiteran un procedimiento que conocen, no pensando en otro más rápido. En una tabla presentamos el porcentaje de alumnos que responden bien y mal a cada cuestión.

Tabla 4. Bloque 1

BLOQUE 1	**Bien**	**Mal**	**Resto**	**Total**
Cuestión 1	25 (36%)	2 (3%)	43 (61%)	70
Cuestión 2	5 (10%)	5 (10%)	42 (80%)	52

En el segundo bloque queda comprobado con el 91% de respuestas al estudio de la curva que es mejor contestar a una cuestión porque se conoce el procedimiento que a reflexionar sobre otro enunciado “nuevo” que es más inmediato que el anterior y más fácil de llegar al final. El cuadro aquí es:

Tabla 5. Bloque 2

BLOQUE 2	**Bien**	**Mal**	**Resto**	**Total**
Cuestión 1	7 (6%)	14 (11%)	101 (83%)	122
Cuestión 2	1 (10%)	4 (40%)	5 (50%)	10

En el bloque 3, al igual que en los dos bloques anteriores, podemos afirmar que los mayores errores se cometen cuando se trabaja con expresiones algebraicas, ya que en otros aspectos, se puede contestar mal porque se desconoce el procedimiento a seguir o porque en algún punto se abandona, pero cuando el planteamiento es bueno, es lamentable que no se llegue hasta el final porque un error algebraico, en muchos casos grave, lo impide.

Tabla 6. Bloque 3

BLOQUE 3	**Bien**	**Mal**	**Resto**	**Total**
Cuestión 1	13 (39%)	5 (15%)	15 (46%)	33
Cuestión 2	16 (19%)	16 (19%)	51 (62%)	83

En el bloque 4 es común la utilización de porcentajes en la probabilidad y que al pasarlos a tantos por uno para considerar el valor de la probabilidad hace que en algunos casos se cometan errores de poner como probabilidad datos que tenemos en porcentaje. En otros casos el no delimitar bien los datos y las incógnitas o el no efectuar una representación adecuada, bien sea un diagrama de Venn o un diagrama de árbol hace que no se resuelva correctamente. Los menos aplicaron aquí una expresión o fórmula generalizada.

Tabla 7. Bloque 4

BLOQUE 4	**Bien**	**Mal**	**Resto**	**Total**
Cuestión 1	3 (10%)	24 (83%)	2 (7%)	29
Cuestión 2	46 (49%)	18 (19%)	30 (32%)	94

En el bloque 5 en la cuestión del intervalo de confianza los alumnos ponen la expresión que conocen y de forma mecánica lo resuelven; sin embargo, en la cuestión del contraste de hipótesis tiene dificultad en el planteamiento, en la región de aceptación/rechazo y en la contestación.

Tabla 8. Bloque 5

BLOQUE 5	**Bien**	**Mal**	**Resto**	**Total**
Cuestión 1	0 (0%)	5 (16%)	26 (84%)	31
Cuestión 2	41 (51%)	11 (14%)	28 (35%)º	80

Analizando toda la prueba, la cuestión que ha tenido la máxima puntuación en un porcentaje más alto es la 5.2 con el 51% y en media un 7,2, lo que nos indica que el alumno contesta mejor a aquella cuestión que consiste en aplicar bien una fórmula y por el contrario contesta peor a aquella cuestión en donde aplica incorrectamente una fórmula o procedimiento inmediato. Véase la cuestión 4.1 que tiene la mínima puntuación (0) con un porcentaje más alto con el 83% y una nota media de 1,4.

En el otro extremo correspondiente a la máxima puntuación en un porcentaje más bajo es en 5.1 (0%) y una nota media de 4.

Hay cuestiones como la 1.2, la 2.1 y la 5.1 en donde el 80% o más tienen una puntuación que no es la máxima ni la mínima. Por el contrario en la 4.1 sólo es del 7%.

Por bloques, es el bloque 3 el más seguro a la hora de contestar ya que las dos cuestiones y la media ponderada superan el 5, mientras que el bloque 2 es el que alcanza la puntuación media ponderada más baja suspendiendo en las dos cuestiones. Por último el bloque 5 y gracias a la contestación de la cuestión 5.2 con una nota media de 7,2 (puntuación más alta) alcanza la media ponderada mayor con 6,3.

Se tienen otros estudios como los de Espinel y otros (2006, 2007) que abordan una muestra de las PAU de junio de 2005 de Canarias, ya que un conocimiento de los errores más frecuentes supone una gran ayuda para el profesor de secundaria. También García Alonso y García Cruz (2005) analizaron los resultados de las cuestiones de estadística de las PAU de 2002 en Canarias y Miralles, (2009), hace otro tanto en las XIV JAEM.

La resolución de problemas en las PAU puede servir para conocer mas de cerca cómo los alumnos se enfrentan ante una situación que necesitan resolverla con éxito. Con nuestro estudio queremos efectuar una aportación más en la resolución de problemas y detección de errores, y contribuir a la mejora de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en este nivel.

Referencias bibliográficas

Bagazgoitia, A. y otros (1997). *La resolución de problemas en las matemáticas del nuevo bachillerato*. Bilbao: Universidad del País Vasco.

Caballero, A. y otros (2009). Resolución de problemas de matemáticas y control emocional. En *Actas XIII Simposio de la SEIEM*. Santander: Universidad de Cantabria.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España.

En *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Badajoz: SEIEM.

Cockcroft (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Company, J. y otros (1988). *El aprendizaje del cálculo y la resolución de problemas*. Alicante: Promolibro.

Espinel, M.C. y otros (2006). La inferencia estadística en la PAU. En *Actas XXIX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Tenerife: SEIO.

Espinel, M.C. y otros (2007). Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en secundaria. *Números 67*. Abril 2007.

García Alonso, I. y García Cruz, J.A. (2005). Algunos resultados sobre la actuación de los alumnos en las cuestiones de estadística en la P.A.U.. En *Actas de las XI Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, 733-738. Canarias: Gobierno de Canarias, Consejería de educación, cultura y deporte.

Juidías, J. y Rodríguez, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación 342*, 357-286.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas en la Educación primaria*. BOE 8.12.2006. Madrid.

MEC (2007a). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. BOE 5.1.2007. Madrid.

MEC (2007b). *Real Decreto 1467/2007 de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. BOE 6.11.2007. Madrid.

Miralles, I. (2009). Dificultad subjetiva de la prueba de Matemáticas de las PAU. ¿Qué eligen los alumnos?". En página web: www.xivjaem.org (Última consulta 13.10.2009).

Nortes, A. (1992). Resolución de problemas. *Bordón 44(2)*, 213-216.

Nortes, A. y Martínez, R. (1996). Ansiedad ante los exámenes de matemáticas. *Épsilon 34*, 111-120.

Perales, F.J. (2000). *Resolución de problemas*. Madrid: Síntesis.

Pérez, M.P. (1994). La solución de problemas matemáticos. En Pozo y otros: Solución de problemas, 54-83. Madrid: Santillana.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: MEC-Morata.

Polya, G. (1987). *Cómo plantear y resolver problemas*. (Decimocuarta reimpresión). México: Trillas.

Pozo, J.I. y otros (1994). *La solución de problemas*. Madrid: Santillana.

Resnick, L. y Ford, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós-MEC.