anales de psicología
2008, vol. 24, nº 2 (diciembre), 169-179

ISSN edición impresa: 0212-9728. ISSN edición web (www.um.es/analesps): 1695-2294

TEMA MONOGRÁFICO: Psicología de las matemáticas

Presentación: Acerca de la naturaleza del conocimiento matemático

José Manuel Serrano*

Universidad de Murcia

Resumen: Este trabajo efectúa un análisis de las diferentes investigaciones que se presentan en este número monográfico de Psicología de las matemáticas y se concluye que, directa o indirectamente, todas ellas presentan como denominador común la importancia del conocimiento declarativo (saber qué), procedimental (saber cómo) y condicional (saber cuándo) y, a través de diferentes algoritmos de la multiplicación, se demuestra la indisociabilidad de estos tres tipos de conocimiento en el ámbito de las matemáticas.
Palabras clave: Conocimiento declarativo; conocimiento procedimental; conocimiento condicional; algoritmos de multiplicación.

Title: Presentation: About the nature of mathematical knowledge.
Abstract: This work makes an analysis of the various investigations that are presented in this monograph number of Psychology of Mathematics and concludes that, directly or indirectly, all of them have in common the importance of declarative (know what), procedural (know how) and conditional (know when) knowledge, and through various algorithms of multiplication, demonstrating the inseparability of these three types of knowledge in the domain of mathematics.
Key words: Declarative knowledge; procedural knowledge; conditional multiplication algorithms.

En el conocimiento matemático se puede distinguir lo que depende de una interpretación general de la realidad -y en donde la *realidad matemática* no es sino un subconjunto de esa realidad general- y los conocimientos específicos y los medios disponibles para solucionar los problemas y realizar con éxito las tareas cotidianas matemáticas (formales y no formales). En el primer caso, la interpretación de la realidad depende de una epistemología general del sujeto que engendra una determinada visión del mundo, centrada en la comprensión de la realidad y de sí mismo (sujeto epistémico). En el segundo caso, los conocimientos que intervienen son esencialmente particulares y los modos de utilizarlos están fuertemente individualizados y sujetos a las presiones de la cultura (sujeto psicológico). Esta distinción heurística entre sujeto epistémico y sujeto psicológico, no hace más que reflejar formas complementarias del conocimiento del sujeto que tienden, bien hacia el conocimiento normativo, bien hacia el conocimiento pragmático y empírico. Por consiguiente, los psicólogos instruccionales debemos de garantizar una comunalidad de enfoque a la hora de interpretar a ese sujeto cognoscente, en el seno de la cual el análisis categorial del sujeto epistémico y el análisis funcional del sujeto psicológico, tengan no sólo la misma legitimidad, sino que además sean legítimamente complementarios. Si esto es válido para todo tipo particular de conocimiento, es especialmente deseable, diríamos que indeclinable, cuando se trata del conocimiento matemático.

Esta dualidad del conocimiento matemático fue ya asumida por Ryle (1949) en la década de los «40», cuando estableció la diferencia entre conocimiento declarativo (que nos permite "saber que") y conocimiento procedimental (que nos permite "saber cómo"). Las relaciones entre estos dos tipos de conocimientos han generado un conjunto de hipótesis que tienen en común la necesidad de introducir un nuevo tipo de conocimiento: el conocimiento estructural.

En efecto, algunos autores parten de una *hipótesis de secuencialidad*, en donde el conocimiento declarativo es necesario para construir el conocimiento procedimental, y describen el conocimiento estructural como el que "media en la conversión del conocimiento declarativo en procedimental y facilita la aplicación de éste" (Jonassen, Beissner y Yacci, 1993; p. 4). Otros autores parten de una *hipótesis de indisociabilidad* y, en el seno de esta segunda hipótesis, merecen especial atención los últimos trabajos de la ingente obra piagetiana (Piaget, 1974; 1976) y, en general, los trabajos emanados de la Escuela de Ginebra (Inhelder y Cellérier, 1992).

Para Piaget (1976), el sistema cognitivo humano está constituido por dos subsistemas: El subsistema I (que es el sistema de «comprender» o «estructural») y el subsistema II (que es el sistema de «saber hacer» o «procedimental»), es decir que, para Piaget, «conocer» es, indisociablemente, «comprender» y «saber hacer». Por ello, Piaget e Inhelder introducen un nuevo par dialéctico en la teoría piagetiana vinculado a la función reguladora de la inteligencia: estructuras *versus* procedimientos o, si se quiere, conocimiento declarativo *versus* conocimiento procedimental (Inhelder y Piaget, 1979).

El conocimiento declarativo lo constituyen los hechos, los conceptos y los principios, es generado por un tipo de esquemas que Piaget (1974) denomina esquemas presentativos y nos permite comprender las razones (saber por qué). Es un tipo de conocimiento normativo.

El conocimiento procedimental lo constituyen los procedimientos, es generado por esquemas procedimentales y nos permite saber hacer. Es un tipo de conocimiento pragmático.

Las características generales comparadas de estos dos tipos de conocimiento son las que aparecen en la Tabla 1.

* **Dirección para correspondencia** [Correspondence address]: José Manuel Serrano. Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación. Facultad de Educación. Universidad de Murcia. Campus de Espinardo. 30100 Murcia (España). E-mail: serrano@um.es

Tabla 1: Comparación de las características generales del conocimiento declativo y el conocimiento procedimental.

Conocimiento declarativo	Conocimiento procedimental
No está sujeto a variaciones espacio-temporales (intemporal).	Está sujeto a variaciones espacio-temporales.
Está dirigido a comprender las razones (saber por qué).	Está dirigido a alcanzar un objetivo (saber hacer).
Necesita de comprensión consciente, sobre todo a partir del nivel operacional.	La comprensión consciente puede ser útil, pero no necesaria..
Se desarrolla mediante encajes sucesivos (el conocimiento superado se integra en el que le supera)	Se desarrolla mediante una cadena secuencial, sustituyendo cada enlace al anterior, al menos parcialmente.
Consiste en lograr el enriquecimiento cognitivo encontrando leyes de composición entre conocimientos y estructuras anteriores.	Consiste en lograr el enriquecimiento cognitivo a través de la variedad: Alcanzar el objetivo por caminos diferentes.

Sin embargo, aunque sólo existen dos subsistemas cognitivos (comprender y saber hacer) y parece que ambos se encuentran dotados de los instrumentos adecuados para su constitución y desarrollo (esquemas presentativos y esquemas procedimentales), es necesario recurrir a un tercer conjunto de esquemas porque existe un conocimiento que es indisociablemente declarativo y procedimental. Este tercer conjunto de esquemas es denominado por Piaget con el nombre genérico de esquemas operatorios y son los instrumentos cognitivos básicos que garantizan el *interplay* necesario para la apropiación del conocimiento matemático que es, a la vez, normativo y pragmático.

Tomemos, a modo de ejemplo, el caso de la multiplicación de números naturales. Por sistema de números naturales se suele entender el sistema algebraico $N^* = [N, +, \cdot, 0, 1]$ con dos operaciones binarias -la adición (+) y la multiplicación (·)- que satisface un conjunto de axiomas que permiten definir el conjunto de los números naturales como un anillo minimal con elemento neutro en las dos operaciones.

Dos de estos axiomas, los más relevantes para nuestro ejemplo, son la asociatividad de ambas operaciones

$$[a + (b + c) = (a + b) + c \quad y \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c]$$

y la distributividad de la multiplicación respecto a la adición

$$[a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c]$$

Para resolver la composición de cualesquiera de los posibles pares de elementos respecto a la ley de composición interna *producto* ($a \cdot b = c$ / $a,b,c, \in N$), el algoritmo más tradicional es el llamado algoritmo vertical o clásico de la multiplicación. Supongamos que deseamos multiplicar 325 x 24, el procedimiento sería el siguiente: Colocamos el 24 debajo del 325 de manera que las unidades queden debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc. A continuación trazamos una línea y, debajo de ella, el resultado de multiplicar el 4 (unidades) por 325, luego multiplicamos el 2 (decenas) y lo colocamos debajo del resultado anterior corriendo un lugar. Finalmente sumamos los resultados de los dos productos, tal y como se puede observar en el siguiente ejemplo 1:

	3	2	5
	x	2	4
1	3	0	0
6	5	0	
7	8	0	0

Ejemplo 1: Algoritmo vertical.

La base conceptual de este algoritmo se sitúa en uno de los axiomas del anillo de los números naturales (N, +, ·): la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición. En efecto, lo que hace el algoritmo es descomponer el multiplicador en dos decenas y cuatro unidades (20 + 4) y luego se multiplica 325 x (20 + 4) = 325 x 20 + 325 x 4 = 6500 + 1300 = 7800. No es que se corra un lugar, es que al multiplicar por dos decenas (20), el 0 final no es necesario ponerlo porque deja invariante la suma (el cero es elemento neutro de la ley de composición +).

Sin embargo, existe un algoritmo arábigo conocido como "algoritmo de celosía o gelosía", cuyo desarrollo es como sigue: En una tabla de doble entrada, se coloca el multiplicando de izquierda a derecha, y el multiplicador de abajo a arriba, dividiendo cada celda de la tabla en dos partes mediante la diagonal del rectángulo que la forma. A continuación se multiplican todos y cada uno de los pares de dígitos que interseccionan en cada casilla (en la casilla superior derecha, 5 x 4, en la casilla inferior derecha 5 x 2, etc.) colocando en la parte superior de la división las unidades del producto y en la parte inferior las decenas (si el resultado del producto tuviera un solo dígito, se pondría un 0 en el lugar de las decenas, como ocurre, por ejemplo, en las dos casillas centrales). A continuación se suman de manera independiente las casillas que se encuentren en la misma diagonal (ver Figura 1a). La primera diagonal representa las unidades (0), la segunda las decenas (8 + 2 + 0), la tercera las centenas (2 + 0 + 4 + 1), etc. Si alguna de las sumas estuviera constituida por dos dígitos habría que añadir el segundo dígito a las unidades de orden superior. En nuestro caso, como la suma de las decenas es 10, se colocaría un 0 en las decenas y el 1 se añadiría a las centenas (ver Figura 1b). El resultado final se lee de izquierda a derecha 7800 (Figura 1c).

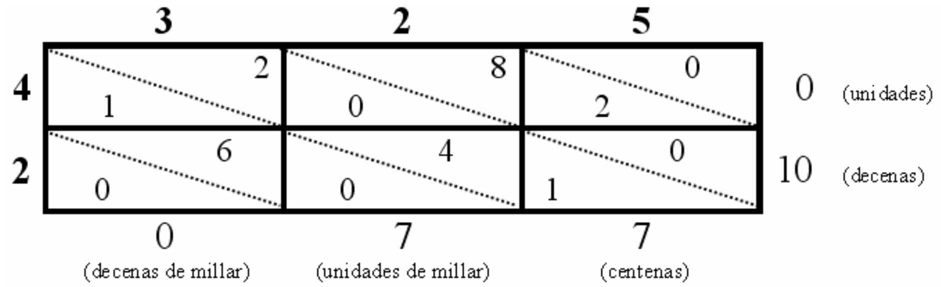

Figura 1a

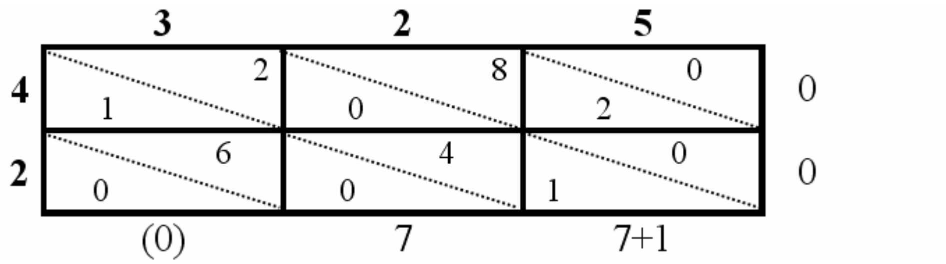

Figura 1b

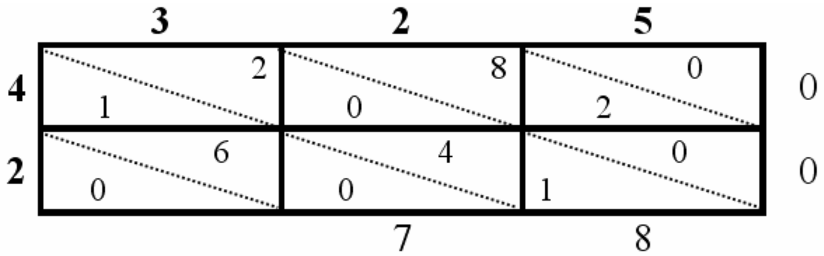

Figura 1c

Figura 1: El algoritmo arábigo de celosía.

En este algoritmo, se descomponen los dos factores. El primer factor está compuesto por 3 centenas + 2 decenas + 5 unidades y el segundo factor por 2 decenas + 4 unidades, de manera que aplicando la propiedad distributiva tendríamos, como en el algoritmo vertical:

$$325\ (20 + 4) = 325 \times 20 + 325 \times 4$$

y efectuando una nueva descomposición:

$$(300 + 20 + 5)\ 20 + (300 + 20 + 5)\ 4,$$

aplicando de nuevo la propiedad distributiva tendríamos las seis casillas de la tabla:

$$300 \times 20 + 20 \times 20 + 5 \times 20 + 300 \times 4 + 20 \times 4 + 5 \times 4$$

es decir

$$6000 + 400 + 100 + 1200 + 80 + 20 = 7800$$

Un algoritmo muy similar es el hindú (no olvidemos que los árabes toman prestado su conocimiento matemático de los hindúes). Supongamos que deseamos multiplicar 46 x 32. Podemos proceder de la siguiente forma (ver Figura 2a):

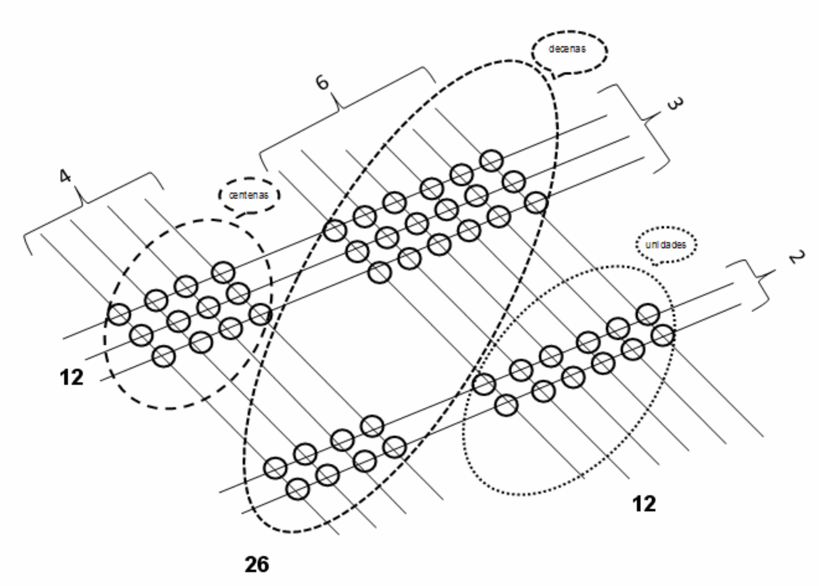

Figura 2a

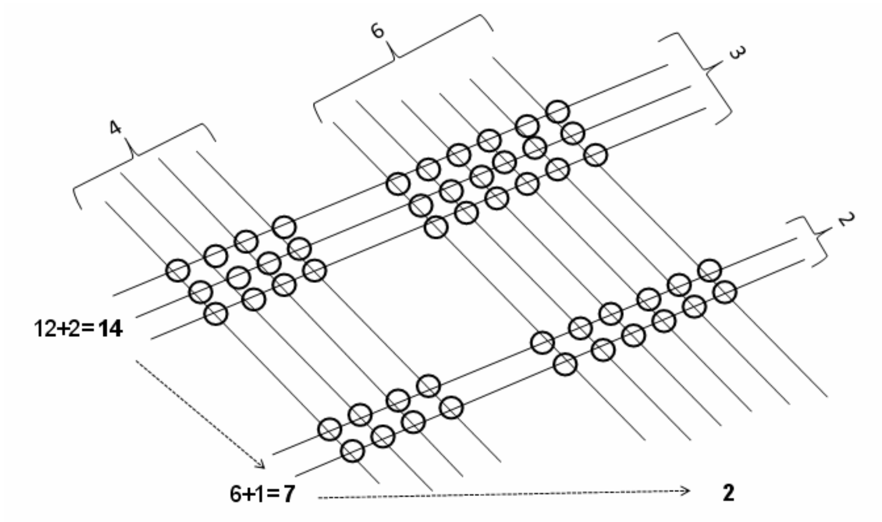

Figura 2b

Figura 2: Algortimo hindú.

Trazamos 4 líneas paralelas (que representarán las decenas del primer factor), luego, a una cierta distancia, trazamos 6 líneas paralelas a las anteriores (que representarán las unidades de ese primer factor). A continuación trazamos 3 líneas paralelas y secantes a las anteriores (que representarán las decenas del segundo factor) y paralelas a ellas dos rectas (que representarán las unidades del segundo factor). Nos encontramos pues con cuatro conjuntos de intersecciones (2 dígitos para el primer factor x 2 dígitos para el segundo): la intersección 2 x 6 que representa a las unidades por ser el producto de las unidades de los dos factores; los productos 2 x 4 y 6 x 3, que son el producto de las unidades de cada factor por las decenas del otro factor y, por tanto, representan decenas; finalmente, el producto 3 x 4 que es el producto de las decenas de cada factor y representan las centenas.

El procedimiento es el mismo que en el caso del algoritmo árabe: doble descomposición de los factores y aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

a) primera descomposición + distributividad

$$46\ (30 + 2) = 46 \times 30 + 46 \times 2$$

b) segunda descomposición + distributividad

$$(40 + 6)\ 30 + (40 + 6)\ 2 = 40 \times 30 + 30 \times 6 + 40 \times 2 + 6 \times 2$$
$$= 1200 + 180 + 80 + 12$$

La lectura del resultado, como se puede comprobar (ver Figura 2b) también es la misma que para el algoritmo de celosía.

Este algoritmo gráfico podría ser transformado en un algoritmo numérico vertical (similar al algoritmo clásico) de la siguiente manera:

Calculamos las unidades (producto de las unidades de los factores) y las centenas (producto de las decenas de los factores) que, en nuestro ejemplo sería, respectivamente, 2 x 8 = 12 (1 decena y 2 unidades) y 3 x 4 = 12 (1 unidad de millar y dos centenas, porque realmente sería 30 x 40 = 1200) y los dispondríamos de la manera que se aprecia en el ejemplo 2 (productos verticales). A continuación calcularíamos las decenas como productos de las unidades de cada factor por las decenas del otro factor (productos cruzados), es decir, 2 x 4 = 8 (realmente 2 x 40 = 80, es decir, 8 decenas) y 6 x 3 = 18 (realmente 6 x 30 = 180, es decir, 18 decenas o, lo que es equivalente, 1 centena y 8 decenas), situándolos en el centro del algoritmo pues deben ocupar el lugar que les corresponde en un sistema posicional como es el nuestro. Realmente, el resultado de la multiplicación es la suma de los mismos productos que en el caso anterior: 40 x 30 + 30 x 6 + 40 x 2 + 6 x 2.

	4	6	
x	3	2	
1	2	1	2
	0	8	
	1	8	
1	4	7	2
unidades de millar	centenas	decenas	unidades

Ejemplo 2: Productos verticales.

Los egipcios también tenían su algoritmo y utilizando el concepto de doble, la noción de proporcionalidad y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a las suma, podían resolver cualquier multiplicación. Volvamos con el ejemplo anterior y vayamos doblando el multiplicando y la columna que, situada al lado, designa el conjunto de los "dobles", tal y como se manifiesta en el ejemplo 3.

46	1
92	2
184	4
368	8
736	16
1472	32

Ejemplo 3: Algoritmo egipcio.

Esto se leería de la siguiente manera: "el doble de 46 es 92 y el doble de 1 es 2, es decir, 2:1::92:46, luego (teniendo en cuenta que en toda proporción el producto de extremos es igual al producto de medios) 46 x 2 = 92", "el doble de 92 es 184 y el doble de 2 es 4, es decir, 4:2::184:92 ó 4:1::184:46, luego 46 x 4 = 184" … "el doble de 16 es 32 y el doble de 736 es 1472, es decir, 32:16::1472:736 ó 32:1::1472:46, luego 46 x 32 = 1472.

Ahora bien, ¿qué ocurriría si al doblar la segunda columna no encontramos el valor exacto del multiplicando como, por otra parte, sería lo normal?.

Supongamos que multiplicamos 46 x 33. El proceso sería idéntico al anterior y cuando lleguemos a un valor tal que al doblar la segunda columna excediéramos el valor del multiplicador, detendríamos el proceso y procederíamos a encontrar qué suma de esa columna nos daría exactamente el multiplicador. En nuestro caso (ver ejemplo 4), 33 = 32 +1. Sumando el valor asociado a 32 (1472) y el valor asociado a 1 (46), tendríamos la solución (46 x 33 = 1472 + 46; 46 x 33 = 1518).

Efectivamente, teniendo en cuenta que 33 = 32 + 1, multiplicar 46 x 33 es equivalente a multiplicar 46 (32 + 1) = 46 x 32 + 46 x 1 = 1472 + 46 = 1518.

46	1	
92	2	
184	4	
368	8	33 = 32 + 1
736	16	
1472	32	
1472 + 46 = **1518**		

Ejemplo 4: Algoritmo egipcio.

Un ejemplo más complejo lo tenemos en el algoritmo ruso de la multiplicación. Este algoritmo utiliza las nociones de doble y mitad. Supongamos que queremos multiplicar 23 x 15, el algoritmo procede de la siguiente forma:

Se colocan multiplicando y multiplicador, tal y como se puede observar en el ejemplo 5, y se van calculando las "mitades" del multiplicador y los "dobles" del multiplicando, teniendo en cuenta que si la división entre dos no fuera exacta, se prescinden de los decimales. Una vez que hemos concluido, es decir, una vez que hemos llegado al 1 en la columna de "las mitades" (multiplicando) se suman todos "los dobles" que correspondan a mitades que no se hayan podido calcular exactamente (números impares). En nuestro ejemplo, se sumarán 15 (que corresponde a 23), más 30 (que corresponde a 11), más 60 (que corresponde a 5), más 240 (que corresponde a 1). El 120 no se utiliza porque 2 es un par (ver ejemplo 5a). Por tanto, 23 x 15 = 345.

23	**15**	→	15
11	**30**	→	30
5	**60**	→	60
2	**120**		
1	**240**	→	240
			345

Ejemplo 5a: Algoritmo ruso.

El algoritmo ruso se fundamenta en la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, en donde uno de los factores se descompone en los sumandos de su sumatorio factorizado en base binaria. Por ejemplo, si descomponemos el 23 en base 2 (ver ejemplo 5b), tendríamos que $23_{(10} = 10111_{(2}$. Si ahora expresamos este número en función de la nueva base tendríamos: 1 unidad de primer orden (1×2^0), 1 unidad de segundo orden (1×2^1), 1 unidad de tercer orden (1×2^2), ninguna unidad de cuarto orden (0×2^3) y una unidad de quinto orden (1×2^4). Si expresamos ahora el 23 como la suma de estos sumandos y lo multiplicamos por el otro factor, la situación sería
15 (1 + 2 + 4+ 16) = 15 + 30 + 60 + 240 = 345

```
23 | 2
 1  11 | 2
     1  5 | 2
        1  2 | 2
           0   1
```

$23 = 10111_{(2}$ $23 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times$

15 (16 + 4 + 2 + 1) = 15 x 16 + 15 x 4 + 15 x 2 + 15 x 1

Ejemplo 5b: Justificación del algoritmo ruso.

Podríamos continuar con una interminable lista de algoritmos de multiplicar. Ya, en el siglo XV, Luca Pacioli nos describe algunos algoritmos en su *Summa Arithmetica* (1494): la multiplicación por *scachierio* o *bericuocolo* (que es el algoritmo vertical actual), el método del *castellucio* (donde, por cierto, en el ejemplo que propone hay un error de cálculo), la multiplicación por *colonna* o *tavoletta*, el algoritmo por *crocetta* o *casella* (en anglosajón *cross multiplication*) desarrollado por nosotros en el ejemplo 2, el *método del cuadrilátero*, la multiplicación por *gelosía* o *graticola* (multiplicación árabe), el algoritmo por *scapezzo* y el método de *repiego*, basado en la propiedad asociativa de la multiplicación, pero que si quiere ser generalizado debe incluir la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

A tenor de todo lo expuesto podemos concluir que para «saber multiplicar» hay que poner en marcha dos tipos de conocimientos: declarativo y procedimental.

El conocimiento declarativo (en nuestro caso, un conjunto de axiomas) es intemporal (se encuentra presente en todas las civilizaciones y a lo largo de la historia de la humanidad), está dirigido a comprender las razones (saber por qué) y consiste en lograr el enriquecimiento cognitivo encontrando leyes de composición entre conocimientos y estructuras anteriores (el axioma distributivo de la multiplicación con respecto a la suma es la coordinación de esquemas aditivos y multiplicativos).

El conocimiento procedimental es, en nuestro caso, un algoritmo: el algoritmo de la multiplicación. En matemáticas, ciencias de la computación y disciplinas relacionadas, un **algoritmo** es una lista bien definida, ordenada y finita de operaciones que permite hallar la solución a un problema. Reformulando la definición de Donald Knuth (1986) podemos decir que un algoritmo aritmético es un procedimiento de cálculo que debe tener:

1. **Carácter finito**. "*Un algoritmo siempre debe terminar después de un número finito de pasos*".
2. **Precisión**. "*Cada paso de un algoritmo debe estar precisamente definido; las operaciones a llevar a cabo deben ser especificadas de manera rigurosa y no ambigua para cada caso*".
3. **Entrada**. "*Un algoritmo tiene por entradas cantidades que le son dadas antes de que el algoritmo comience y que son tomadas de conjuntos específicos de objetos*".
4. **Salida**. "*Un algoritmo tiene por salida cantidades que tienen una relación específica con las entradas*".
5. **Eficacia**. "*También se espera que un algoritmo sea eficaz, en el sentido de que todas las operaciones a realizar en un algoritmo deben ser suficientemente básicas como para que en principio puedan ser hechas de manera exacta y en un tiempo finito por un hombre usando lápiz y papel*".
6. **Eficiencia**. *"Un algoritmo debe reunir los mínimos pasos para que se pueda alcanzar la solución de manera comprensiva para el usuario"*.
7. **Constancia**. *"Un algoritmo debe ser determinista, es decir, ante una misma situación inicial (o valores de entrada) un algoritmo debe proporcionar siempre el mismo resultado (o salida). Como es lógico se excluyen aquí los algoritmos probabilistas"*.

A partir de estas características, podemos comprobar que el carácter procedimental del algoritmo es evidente. Tiene un carácter temporal (cada civilización o momento histórico ha desarrollado sus propios algoritmos para multiplicar), está dirigido al logro de un objetivo (obtener el resultado de la composición multiplicativa de dos números) y el enriquecimiento cognitivo consiste en encontrar caminos para alcanzar, con efectividad y eficiencia, el objetivo perseguido.

Ahora bien, no sólo es necesario saber qué y saber cómo, también es necesario saber cuándo, es decir, bajo qué condiciones se puede aplicar el conocimiento. El conocimiento necesario para determinar qué variables o condiciones de la situación resultan de interés fundamental para ajustar nuestra actuación a las demandas de la tarea recibe el nombre de *conocimiento condicional*.

El conocimiento condicional supone "la aplicación intencional y consciente del conocimiento declarativo y procedimental en relación a las condiciones en que se desarrolla la acción" (Onrubia, Rochera y Barberá, 2004, p. 494). Gracias a este tipo de conocimiento el alumno sabe que los procedimientos no se pueden aplicar de manera indiscriminada, sino que es necesario efectuar un análisis de las condiciones (personales, del profesor, de la tarea y del contexto) para determinar qué procedimiento es el más adecuado en cada situación. El conocimiento condicional proporciona, de esta manera, un sistema de valoración sobre la potencialidad y las limitaciones del conocimiento que poseemos a la hora de enfrentarnos a una tarea.

Por tanto, la distinción entre conocimiento declarativo y procedimental en matemáticas es pertinente, a pesar de las opiniones de algunos autores, como Novak, que nos advierte que la distinción entre conocimiento declarativo y procedimental nos es más que un modismo del lenguaje psicológico actual, ya que esta distinción carece de verdadero interés y presenta un escaso valor porque "en los veinticinco años que llevo trabajando con herramientas de representación del conocimiento, no he encontrado tema o campo de trabajo en que no fuera importante la estructura del conocimiento. Es indudable que, para crear conocimientos, la estructura del conocimiento es la variable decisiva" (Novak, 1998; p. 135).

Ante esta situación, no es de extrañar que la mayor parte de los artículos que componen este Monográfico hagan referencia, explícita o implícita, a ambos tipos de conocimientos, sea cual sea el nivel educativo sobre el que trabajan y el contenido matemático al que hacen referencia.

Así, las tres investigaciones que configuran el artículo de Koen Luwel y Lieven Verschaffel analizan el modo en que estudiantes de diferentes niveles educativos seleccionan y aplican estrategias para resolver una tarea de cuantificación. Utilizando el método de elección/no-elección y los parámetros de elección de estrategias de Lemaire y Siegler, establecen los avances que se producen con la edad, así como la influencia de otras variables como la inteligencia y el contexto de la tarea. En general, consideran que los resultados obtenidos permitirán diseñar entornos de aprendizaje que propicien el desarrollo de: (1) los conocimientos conceptual, de procedimiento y metacognitivo, (2) creencias y actitudes positivas hacia el uso flexible de estrategias y (3) una cultura del aula que valore la simplicidad y originalidad de las estrategias, y no sólo la rapidez y precisión de las mismas.

El interesante trabajo de Luwel y Verschaffel viene a confirmar, por un lado, la necesidad de la enseñanza de capacidades de alto nivel y cómo esta enseñanza debe ser metacognitivamente informada, es decir, además de mostrar la estrategia a emplear, se debe explicitar cuándo debe emplearse y por qué es efectiva (Bruer, 1995) y, por otro, la importancia de ofrecer modelos expertos y explícitos de las estrategias a enseñar en los que se valore, tanto la eficacia, como la eficiencia de la estrategia.

Ahora bien, el aprendizaje de estas estrategias requiere que los alumnos las practiquen en contextos y situaciones diversas. En este sentido, el artículo de Terezinha Nunes y Peter Bryant es especialmente brillante y clarificador por cuanto, a lo largo del trabajo, proponen un amplio abanico de situaciones para ayudar a los niños a superar las dificultades en tareas matemáticas complejas. Nunes y Bryant parten del conocimiento informal de los alumnos de primaria sobre los números racionales y comienzan con tareas en las que el numerador (dividendo) representa una cantidad que ha de ser divida y el denominador representa el número de partes que hay que realizar (divisor). Estas actividades están basadas en un conocimiento específico de contexto, orientado a la resolución de tareas particulares y muy limitado en cuanto a sus posibilidades de abstracción, generalización y formalización. En este sentido, advierten que es necesario diversificar las situaciones propuestas para permitir que los niños puedan generalizarlo a nuevas situaciones y evitar que el concepto desarrollado se encuentre constreñido por el contexto. Llegados a este punto es necesario precisar que la formalización de las matemáticas no es una cuestión de descontextualización generalizada (Serrano, 2004), porque las matemáticas, además de ser un sistema formal es una actividad humana vinculada a propósitos, metas, intenciones y situaciones, y por ello es necesario anclar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en torno a situaciones significativas para los alumnos, de manera que , tal y como proponen Nunes y Bryant, las ventajas propias de la descontextualización cognitiva no se vean nunca anuladas por la descontextualización socio-afectiva.

No es pues de extrañar que los movimientos de reforma de la enseñanza de las matemáticas insistan en la necesidad de proponer en el aula situaciones que resulten significativas a los estudiantes y, en este sentido, los problemas parecen cumplir ampliamente este objetivo. En efecto, mientras que la realización de ejercicios sólo permite consolidar destrezas básicas, la resolución de problemas es una actividad compleja que requiere, además, un planteamiento que remita a situaciones abiertas, que genere la puesta en marcha de un pensamiento estratégico, que precise la confluencia y complementariedad de conceptos y procedimientos y, finalmente, que conduzca a una actitud de persistencia en la búsqueda de soluciones. Para que un problema escolar sea un «auténtico problema» debe remitir a una situación contextualmente relevante para el alumno, que pueda abordarse y resolverse por métodos diversos, que permitan soluciones no unívocas y no «necesariamente exactas» y que promuevan el aprendizaje de las matemáticas con finalidades extramatemáticas de interpretación de la realidad (Barberá y Gómez, 1996). El artículo de M.O. Lago, P. Rodríguez, I. Enesco, L. Jiménez y C. Dopico es un claro ejemplo de esta filosofía, que profundiza en el análisis de las dificultades que tienen los alumnos en la resolución de este tipo de problemas, mediante el planteamiento, a estudiantes de secundaria, de problemas de división con resto, formulados en términos partitivos y de medida. Las autoras concluyen que la principal razón de la dificultad para resolver este tipo de problemas reside en una representación inicial inadecuada de la situación descrita en los problemas.

El problema de la representación en matemáticas es doble. Por un lado nos encontramos con la multiplicidad de sistemas que se emplean para hacer referencia a los conceptos y procedimientos matemáticos (verbales, gráficos, numéricos, algebraicos, alfanuméricos, etc.) y, por otro, la dificultad inherente a la interrelación y génesis entre las representaciones matemáticas intuitivas y las representaciones formales, lo que nos remite, sin solución de continuidad, a la dicotomía *pensamiento narrativo vs. pensamiento paradigmático*.

El pensamiento narrativo y el pensamiento paradigmático son dos formas de organizar y gestionar el conocimiento de lo real (incluido el propio conocimiento). El pensamiento matemático narrativo se caracteriza por una aproximación a las matemáticas orientada hacia la comprensión de fenómenos concretos, personales e intencionales (pragmatismo cognitivo), por lo que sus representaciones versan sobre referentes concretos. El pensamiento matemático paradigmático se caracteriza por una aproximación a las matemáticas orientada a los aspectos formales de la disciplina (racionalismo), suprime intenciones y motivaciones, y se basa en representaciones abstractas de la realidad.

El análisis y la comprensión del equilibrio entre estos dos tipos de conocimiento son fundamentales para la enseñanza de las matemáticas. La búsqueda de continuidad entre los narrativo (propio de la aproximación intuitiva y cotidiana a la realidad) y lo paradigmático (propio de las matemáticas como sistema formal) nos garantizará, en buena parte, salvar las dificultades que presentan los alumnos para la adquisición de las nociones matemáticas (Onrubia, Rochera y Barberá, 2004).

Esta es la razón por la que el estudio de los conocimientos tempranos que los niños tienen sobre la aritmética se haya convertido en un tema de interés prioritario en la investigación actual sobre la adquisición de las nociones matemáticas de base. Este es, precisamente, el objetivo del artículo de P. Rodríguez, M.O. Lago, C. Dopico, L. Jiménez e I. Solbes. Se trata de un estudio longitudinal llevado a cabo con niños de segundo ciclo de Educación Infantil en el que las autoras prestan especial atención a los procedimientos de resolución empleados por los niños en problemas verbales de estructura aditiva y multiplicativa, haciendo especial hincapié en la frecuencia de uso, la estabilidad y el tránsito de unos procedimientos a otros.

Lo expuesto hasta el momento podría hacer pensar al lector que nuestra posición entronca con una concepción de la psicología científica que no tiene en cuenta las diferencias individuales a la hora de procesar la información para la resolución de problemas y tareas académicas. Nada más lejos de nuestras intenciones. Somos plenamente conscientes de que los alumnos difieren entre sí en multitud de aspectos (destrezas cognitivas, estrategias de aprendizaje, esquemas de conocimiento, enfoques ante el aprendizaje, intereses, expectativas, emociones, patrones atribucionales, etc.) que condicionan los resultados del aprendizaje en general, y del aprendizaje de las matemáticas en particular.

La necesidad psicológica de identificar y evaluar estas diferencias es, en el marco de los procesos de enseñanza y aprendizaje, un esfuerzo de asimilación para poder establecer la acomodación necesaria entre los alumnos y la acción educativa. Sin embargo, esta acomodación se puede situar en un continuo cuyos polos se situarían en dos enfoques de intervención bien diferenciados.

El primero de los enfoques tendría como objetivo general conseguir un ajuste entre los procesos instruccionales y las características específicas de los alumnos, pero este ajuste se busca, sobre todo, por la vía de acomodar los alumnos a las exigencias y posibilidades del sistema educativo, creando grupos específicos (por ejemplo, seleccionar alumnos con un alto rendimiento en matemáticas para incorporarlos a un grupo avanzado en esta materia, o seleccionar alumnos con dificultades generalizadas de aprendizaje para adscribirlos a centros, aulas o tratamientos educativos específicos). El trabajo de C. Ferrándiz, R. Bermejo, M. Sainz, M. Ferrando y M.D. Prieto se sitúa próximo a este enfoque. Partiendo del modelo de las inteligencias múltiples, las autoras efectúan un análisis sobre las habilidades matemáticas en 294 alumnos de educación infantil y primaria con dos tipos de medidas de la inteligencia: pruebas de carácter psicométrico clásicas y pruebas que propician una evaluación de la inteligencia más contextual basadas en la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner. A tenor de los resultados hallados en el trabajo, las autoras concluyen que el modelo propuesto por Gardner para evaluar las habilidades implicadas en el razonamiento lógico-matemático, ofrece información adicional a la dada por la prueba psicométrica y sirve para diseñar el perfil de desarrollo de un aula destacando los puntos fuertes y las lagunas referidas a las habilidades básicas en las que se fundamentan cada una de las inteligencias.

El segundo enfoque, por el contrario, buscaría el ajuste en sentido opuesto, es decir, lo que se intenta es acomodar la acción educativa a las peculiaridades y necesidades de los alumnos. Más próximo a este segundo enfoque se sitúa el trabajo de Richard Cowan. El análisis de los factores responsables de las diferencias individuales en el rendimiento en matemáticas constituye también la propuesta central de este trabajo, pero la filosofía que subyace en la misma tiene un carácter holístico y pretende determinar cómo ajustar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a aquéllos factores diferenciales que pueden estar incidiendo en el rendimiento del alumno. En concreto, se refiere a la contribución de aspectos generales como el estatus socioeconómico y la herencia, aunque, según el autor, son las habilidades básicas de cálculo y la habilidad de contar las que no sólo podrían explicar mejor las diferencias, sino también el éxito posterior, sin descartar la importancia de otros factores cognitivos generales como la memoria de trabajo, la velocidad de procesamiento, las habilidades lingüísticas y la inteligencia.

Estos dos posicionamientos reflejan los dos grandes concepciones educativas con relación a las diferencias individuales (Cole, 1998). El primer enfoque viene a concebir la diversidad como una fuente de obstáculos y dificultades para el correcto desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje y, los autores que se sitúan en este enfoque orientan su acción a eliminarla o atenuarla. Los investigadores adscritos al segundo enfoque, ven estas diferencias como una fuente coadyuvadora para la mejora de los procesos instruccionales y, en consecuencia, la utilizan como un valioso recurso psicopedagógico.

En este orden de cosas, y dentro de lo que Cronbach (1957) esgrimía en su célebre artículo del *American Psychologist* sobre cómo superar las concepciones estática y ambientalista propias «las dos disciplinas de la psicología científica» (psicología experimental y psicología diferencial clásicas), se sitúa el trabajo de R.M. Pons, M.E. González-Herrero y J.M. Serrano, sobre aprendizaje cooperativo en matemáticas. En efecto, la pregunta de Cronbach (1967), «how can instruction be adapted to individual differences?» tiene una clara y contundente respuesta: «the cooperative learning».

La concepción interaccionista, como alternativa a las concepciones estática y situacional o ambientalista en el estudio de las diferencias individuales, determina la existencia de una interacción entre las características de los alumnos y las características de la situación educativa. En este caso, el éxito del aprendizaje no puede atribuirse, con exclusividad, a las características individuales de los alumnos, como tampoco pueden atribuirse sólo a las características de las actividades en que éstos participan, los logros del aprendiz sólo pueden ser explicados al ajuste de ambas características. En suma, y confirmando las conclusiones del trabajo de Richard Cowan, desde esta perspectiva se reconoce, tanto la importancia de las características personales (algunas de las cuales tienen, sin duda, una base genética), como de las condiciones ambientales, pero ni una ni otra pueden arrogarse la primacía en el logro académico de los alumnos. Entonces ¿cómo puede producirse este ajuste óptimo entre estos dos conjuntos de características?

Desde la perspectiva del logro de objetivos, adaptados a las características de los alumnos, se pueden considerar tres tipos de organización del aula. En primer lugar, podemos organizar el aula de manera que exista independencia de objetivos: el que un alumno alcance sus objetivos es independiente de que el resto de los alumnos alcancen los suyos (aula individualista). En segundo lugar, podemos organizar el aula mediante interdependencia de objetivos. Ahora bien, como esta interdependencia puede ser positiva o negativa, tendremos dos organizaciones posibles: el aula competitiva, con interdependencia negativa de objetivos (un alumno alcanza sus objetivos si, y sólo si, los demás no alcanzan los suyos) y el aula cooperativa en donde un alumno alcanza sus objetivos si, y sólo si, los demás alcanzan los suyos (interdependencia positiva de objetivos).

El trabajo de Pons, González-Herrero y Serrano, estudia los efectos de una metodología cooperativa en el aula de matemáticas centrándose en las interacciones entre tratamiento y contenido y comparando el rendimiento académico de los alumnos sometidos a este tipo de tratamiento con el de aquellos que siguieron una metodología tradicional (individualista). Los resultados que obtienen vienen a confirmar la potencialidad de una organización cooperativa del aula, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. No es de extrañar, por tanto, que gran parte de las propuestas innovadoras para la enseñanza de las matemáticas contemplen, entre sus fundamentos, el aprendizaje cooperativo (Serrano, González-Herrero y Pons, 2008), ya que estas propuestas asumen que la construcción del conocimiento matemático se produce a través de la interacción, la negociación y la colaboración, como vías esenciales para que los alumnos puedan convertirse en miembros competentes de una comunidad y una cultura matemática (de Corte, Greer y Verschaffel, 1996).

Este concepto de «interactividad» que impregna el contexto contemporáneo de una psicología cultural, es una nueva orientación que implica un distanciamiento de la noción de «interacción» propia de la teoría de Piaget y del constructivismo piagetiano. La cooperación para Piaget era, básicamente, un intercambio cooperativo de ideas. Su interés en la búsqueda de lo «universal» estaba destinado a estudiar las normas de lo que él denominaba la «sociedad de las mentes», lo cual era pertinente para estudiar al sujeto epistémico, "pero no para estudiar el funcionamiento individual de la mente del sujeto cognoscente" (Cellérier, 1987). Ya no es un tópico de investigación estudiar la construcción de las grandes nociones constitutivas de nuestro conocimiento matemático, sino mostrar procedimientos cuya elaboración se efectúa en contextos prácticos ordinarios y permiten dar respuesta a cuestiones tales como ¿cómo da el niño sentido a un problema matemático? ¿cómo se hace la elección de un instrumento cognitivo adecuado al problema? ¿existen representaciones diferentes y todas ellas adecuadas al problema planteado? ¿cómo controla el niño la pertinencia de sus acciones?... Sin embargo, nosotros seguimos pensando que la distinción heurística entre sujetos epistémico y sujeto psicológico son las dos caras de la misma moneda. La insuficiencia de la teoría piagetiana no supone en absoluto la ausencia de pertinencia de la misma (Serrano, 2006).

La investigación llevada a cabo por J.M. Serrano y R.M. Pons trata de demostrar precisamente esto: la pertinencia y la insuficiencia de la teoría de Piaget, aplicada al carácter indisociable del número natural. Los resultados ponen de manifiesto que el número aunque tiene un componente cardinal y un componente ordinal, el segundo tiene más peso que el primero en la psicogénesis y que ambos componentes son insuficientes para explicar la ejecución numérica de los niños.

En resumen, los trabajos que componen este volumen, asumen los principios que la filosofía de las matemáticas establece como premisas para el desarrollo del conocimiento matemático. Este desarrollo viene apoyado por una cierta práctica que para Kitcher (1988) posee varios componentes:

a) Un lenguaje.
b) Un conjunto de proposiciones aceptadas por la comunidad matemática en un tiempo de terminado.
c) Un conjunto de cuestiones importantes sobre problemas no resueltos.
d) Un conjunto de formas de razonamiento.
e) Un conjunto de visiones del hacer matemático, es decir, de cómo se hacen matemáticas.

Además las conclusiones de los mismos permiten establecer algunos criterios generales para la enseñanza de las matemáticas que responden, en lo esencial, a los establecidos por Onrubia, Rochera y Barberá (2004, p. 498):

1. Contextualizar el aprendizaje de las matemáticas mediante actividades que sean significativas para los alumnos y donde el alumno pueda atribuir sentido a su aprendizaje.
2. Orientar el aprendizaje del alumno hacia la resolución de problemas, dejando los ejercicios como actividad secundaria para la consolidación de algunas destrezas.
3. Conectar el pensamiento narrativo y paradigmático de los alumnos:
   a) Vinculando el lenguaje matemático con su significado referencial.
   b) Activando el conocimiento matemático previo de los alumnos, tanto formal, como informal.
4. Evitar la generación de lagunas cognitivas:
   a) Avanzando de manera progresiva hacia niveles cada vez más altos de generalización y abstracción.
   b) Secuenciando adecuadamente los contenidos matemáticos.
   c) Conectando los conocimientos declarativo, procedimental y condicional.
5. Enseñar explícitamente y de manera informada estrategias y habilidades matemáticas.
6. Basar la organización del aula en la cooperación y la interactividad, posibilitando el logro de objetivos, tanto individuales, como grupales.

Finalmente no quisiéramos concluir esta Introducción sin efectuar algunas reflexiones en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El aprendizaje de los contenidos matemáticos es un proceso de construcción socialmente mediada y, si bien la representación de los problemas y tareas a los que se enfrenta el alumno tienen una naturaleza básicamente cognitivo-individual, los modos de interactuar con ellos (el input y el output) tienen una naturaleza eminentemente social y cultural. Por más que se empeñen algunos grandes historiadores de las matemáticas (Rey y Babini, 1984) y otros tantos y muy buenos divulgadores del conocimiento matemático (Mingote y Sánchez, 2008) o aquellos que se encuentran a mitad de camino entre lo divulgativo y lo histórico (Mankiewicz, 2000), en hacernos ver que las matemáticas son cosa del pensamiento solitario de unos cuantos iluminados, la realidad es que resulta totalmente falsa la idea de que las matemáticas surgen del «pensamiento puro», de la «intuición innata» o de la «contemplación de formas *a priori*» (Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev, 1973). Las matemáticas surgen como resultado del análisis y generalización de una inmensa cantidad de experiencia práctica (el ladrillo con que el hombre primitivo construía sus casas y sus tumbas aportó la noción de ángulo recto, el concepto de línea y su propio nombre deriva de la forma de la fibra del lino, etc.). Herodoto, en un conocido pasaje de su Historia, decía que "el rey de Egipto dividió el suelo del país entre sus habitantes, asignando lotes cuadrados de igual extensión a cada uno de ellos y obteniendo sus principales recursos de las rentas que cada poseedor pagaba anualmente. Si el río arrasaba una parte del lote de un habitante, éste se presentaba al rey y le exponía lo sucedido, a lo cual el rey enviaba personas a examinar y medir la extensión exacta de la pérdida y, más adelante, la renta exigida era proporcional al tamaño reducido del lote". El rey de Egipto estaba «haciendo matemáticas» de manera «competente».

Nadie niega las aportaciones del genio individual, y los manuales sobre historia de las matemáticas destacan el esfuerzo unipersonal de grandes matemáticos que, comenzando con Tales o Pitágoras, y pasando por Euclides, Fermat, Euler, Galois, Abel, Gauss, Lobachevskii, Bolyai, Riemann, Cauchy, Hilbert, Russell y un larguísimo etcétera, parece acabar (de momento) con Andrew Wiles, Alan Turing, John Nash o Benoît Mandelbrot, por citar algunos de los últimos "grandes matemáticos"; pero esta visión de *la matemática*, efectuada a través del prisma óptico de los matemáticos, desvirtúa el verdadero panorama de *las matemáticas*. Las matemáticas no son sólo la geometría de espacios curvos (Riemann), los algoritmos computacionales (Turing), la teoría de los juegos no cooperativos (Nash), la geometría de campo o fractal (Mandelbrot) o la demostración de la conjetura de Shimura-Taniyama, «el último teorema de Fermat», (Wiley); las matemáticas, son también el hueso de Ishango (actual Zaire), el alzado del Partenón (relaciones áureas) y el razonamiento proporcional implícito en una octava musical (2:1) o en el juicio del rey de Egipto que nos describe Herodoto. Las matemáticas están en la vida cotidiana de todas las culturas, en sus quehaceres domésticos, en sus transacciones mercantiles y en su espíritu religioso. El contenido de las matemáticas no sólo se encuentra en los libros de matemáticas, también se encuentra en los libros sagrados como, por ejemplo, en los *Sulvasutras* (Apéndices de los *Vedas*) o en cualquier otro conjunto de páginas impresas (como en el *Robinson Crusoe* de Daniel Defoe) o simplemente vividas por cada ser humano, a lo largo de nuestra historia.

El profesor que enseña matemáticas debe conectarlas con la realidad para no parecerse al matemático que describe Simons: "el matemático *qua* matemático no le parece esencial reflexionar acerca de lo que hace y de lo que dice" (Simons, 1990; p. 18), con lo que, instalado en el mundo de las ideas, se transforma en un platónico que maneja objetos abstractos separados del espacio y del tiempo y totalmente ajenos a la realidad que circunda al sujeto que aprende.

Referencias

Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N. y Laurentiev, M.A. (Eds.) (1973). *Mathematics: Its Content, Methods, and Meaning.* Massachusetts: The Massachusetts Institute of Technology (traducción castellana, *La matemática: su contenido, métodos y significado* (3 volúmenes). Madrid: Alianza, 1974).

Barberá, E. y Gómez, C. (1996). Las estrategias de enseñanza y evaluación en matemáticas. En C. Monereo e I. Solé (Coords.), *El asesoramiento psicopedagógico: una perspectiva profesional y constructivista* (383-404). Madrid: Alianza.

Bruer, J.T. (1995). *Escuelas para pensar. Una ciencia del aprendizaje en el aula*. Barcelona: Paidós.

Cellérier, G. (1987). La psychologie génétique et le cognitivism. *Le débat*, *47*, 116-129.

Cole, M. (1998). Can cultural psychology help us think about diversity? *Mind, Culture, and Activity*, *5*, 291-304.

Cronbach, L.J. (1957). The two disciplines of scientific psychology. *American Psychologist*, 12, 671-684 (traducción castellana, Las dos disciplinas de la psicología científica. *Escritos de Psicología*, *1,* 2-16, 1997).

Cronbach, J.L. (1967). Wow can instruction be adapted to individual differences? En R.M. Gagné (Ed.), *Learning and individual differences*. Columbus, Ohio: Merrill.

De Corte, E., Greer, B. y Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. En D.C. Berliner, y R.C. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (491-549). New York: Simon & Schuster MacMillan.

Inhelder, B. y Cellérier, G. (Comps.) (1992). *Le cheminement des découvertes de l'enfant. Recherche sur les microgenèses cognitives.* París/Neuchâtel, Delachaux et Niestlé (traducción castellana, *Los senderos de los descubrimientos del niño. Investigaciones sobre las microgénesis cognitivas*. Barcelona: Paidós, 1996).

Inhelder, B. y Piaget, J. (1979). Procédures et structures. *Archives de Psychologie*, *47*, 165-176.

Jonassen, D.H., Beissner, K. y Yacci, M. (1993). *Structural knowledge: Techniques for representing, conveying, and acquiring structural knowledge*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Kitcher, P. (1988). Mathematical progress. *Revue International de Philosophie*, *167*, 518-540.

Knuth, D. (1986). *El arte de programar ordenadores. Vol. I. Algoritmos fundamentales*. Barcelona, Ed. Reverté.

Mankiewicz, R. (2000). *The Story of Mathematics*. London: Cassell & Co. (traducción castellana, *Historia de las matemáticas*. Barcelona: Paidós, 2000).

Mingote, A. y Sánchez, J.M. (2008). *¡Viva la ciencia!* Barcelona: Crítica.

Novak, J.D. (1998). *Learning, Creating, and Using Knowledge. Concepts Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates (traducción castellana, *Conocimiento y aprendizaje*. Madrid: Alianza, 1998).

Onrubia, J., Rochera, M.J. y Barberá, E. (2004). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comps.), *Desarrollo psicológico y educación: 2. Psicología de la educación escolar* (487-508). Madrid: Alianza Editorial.

Piaget, J. (1974). *Réussir et comprendre*. París: Presses Universitaires de France.

Piaget, J. (1976). Le possible, l'impossible et le nécessaire: Les recherches en cours ou projetées au Centre International d'Épistémologie Génétique. *Archives de Psychologie*, *44*, 281-299 (traducción castellana, Lo posible, lo imposible y lo necesario, *Infancia y Aprendizaje*, Monografía 2, 1981, 108-121).

Rey, J. y Babini, J. (1984). *Historia de la Matemática* (2 vol.). Barcelona: Gedisa.

Ryle, G. (1949). *Collected papers. Vol. II: Critical essays*. London: Hutchison.

Serrano, J.M. (2004). Aprendiendo fracciones. En V. Bermejo (Coord.), *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor* (141-159). Madrid: Editorial CCS.

Serrano, J.M. (2006). *La construcción del concepto de número: Implicaciones para la Educación Infantil.* Valladolid: Editorial de la Infancia.

Serrano, J.M., González-Herrero, M.E, y Pons, R.M. (2008). *Aprendizaje cooperativo en matemáticas*. Murcia: Editum, Ediciones de la Universidad de Murcia.

Simons, P. (1990). What is abstraction & what is it good for? En A.D. Irvine (Ed.), *Physicalism in Mathematics* (17-40). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

(Artículo recibido: 22-9-2008; aceptado 26-9-2008)