desarrollar el razonamiento formal en matemáticas

Inés Mª Gómez Chacón

Una de las necesidades reconocidas en la educación a nivel mundial es la de desarrollar el razonamiento matemático de los estudiantes. En este artículo se exponen algunas ideas sobre el tema y cómo colaborar a su desarrollo en los niveles educativos de Secundaria y Bachillerato.

Cuando nos referimos al razonamiento matemático tratamos de delimitar las fronteras con el razonamiento lógico, el pensamiento matemático y el pensamiento crítico. Éstas no son tan claras. El pensamiento matemático conlleva el uso de habilidades y destrezas de pensamiento para comprender las ideas, descubrir las relaciones, anticipar conjeturas, resolver problemas. El razonamiento matemático podría ser caracterizado como parte del proceso de pensamiento matemático. Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en él pensamos en procesos tales como comprender, representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer, formalizar.

Pensar matemáticamente no es fin en sí mismo; es un proceso mediante el cual podemos aumentar nuestro entendimiento del mundo que nos rodea y ampliar nuestras posibilidades de elección. Y al ser una forma de proceder, tiene unas aplicaciones muy amplias, no sólo para enfrentarse a problemas matemáticos o científicos, sino mucho más generales. El estudio de estos procesos en el aula permitirá al profesor describir diferentes formas de enfrentarse a situaciones matemáticas complejas y ayudar a formar en los estudiantes capacidades y competencias necesarias para una ciudadanía responsable.

El razonamiento es fundamental para el conocimiento y el uso de las matemáticas. La evaluación de la capacidad que tengan los alumnos para razonar matemáticamente debe ofrecer evidencia de que son capaces de:

- Utilizar el razonamiento inductivo para reconocer patrones y formular conjeturas.
- Utilizar el razonamiento para desarrollar argumentos plausibles de enunciados matemáticos.
- Utilizar el razonamiento proporcional y espacial para resolver problemas.
- Utilizar el razonamiento deductivo para verificar una conclusión, juzgar la validez de un argumento y construir argumentos válidos.
- Analizar situaciones para hallar propiedades y estructuras comunes.
- Reconocer la naturaleza axiomática de las matemáticas.

Ofrecemos algunos ejemplos e ideas que pueden ayudar al profesorado de matemáticas a desarrollar las habilidades de razonamiento en los estudiantes. Consideramos que es importante dotar al profesor de herramientas que permitan poner mayor énfasis en los procesos de prueba y demostración, y que pueda en su instrucción llevar a cabo un proceso gradual hacia la abstracción.

1. CAPACIDAD PARA EXPERIMENTAR, OBSERVAR Y CONJETURAR

Se puede iniciar a los estudiantes en este proceso planteando cuestiones o problemas en los que tengan que buscar regularidades. Por ejemplo:

NATURALES CONSECUTIVOS

Toma cuatro números naturales consecutivos y multiplícalos; ¿qué observas?

Los estudiantes comienzan experimentando con números:

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$
$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
$3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360$
$4 \times 5 \times 6 \times 7 = 840$

Los números que se obtienen 24, 120, 360 y 840 sugieren una pregunta sencilla: ¿se pueden relacionar estos números con otros sencillos? Estos números (24, 120, 360, 840...) son "casi cuadrados perfectos", ya que todos se diferencian de un cuadrado perfecto en una unidad. Surge una conjetura: "El producto de cuatro números naturales consecutivos es igual a un cuadrado perfecto menos uno". ¿Será esto cierto? ¿Podremos demostrarlo? El estudiante experimenta con números más grandes y observa que funciona. Vuelve a los primeros ejemplos:

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 5^2 - 1$ ¿Qué relación guarda el número 5 con los números anteriores?

$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 11^2 - 1$ ¿Qué relación guarda el número 11 con los números anteriores?

¿Podría ser $5 = 1 \times 4 + 1$ (producto de los extremos más 1)

$11 = 2 \times 5 + 1$ (producto de los extremos más 1)

Parece que estas relaciones son ciertas, lo que nos lleva a formular la situación más general:

$a \times (a+1) \times (a+2) \times (a+3) = [a \times (a+3) + 1]2 - 1$

Esta fórmula soluciona el problema y da sentido a las situaciones que han aparecido a lo largo de la resolución.

Al utilizar ejemplos de este tipo damos al estudiante oportunidades de trabajar la justificación que lleva a la demostración. Una conjetura es una afirmación que parece razonable, pero cuya veracidad no ha sido demostrada. Consiste en sentir y adivinar de alguna manera que algo debe ser cierto, e investigar su veracidad. El hecho de que algunas conjeturas resulten falsas tras su comprobación, incita al alumno a hacer demostraciones. El hecho de conjeturar prepara la demostración y la utilización del método científico. La conjetura va precedida de una observación y finaliza con una experiencia de algún tipo que permite su comprobación.

Las conjeturas, normalmente, son fáciles de enunciar, pero los intentos de justificación dan lugar a gran cantidad de métodos y resultados auxiliares. La conjetura lleva de forma natural a problemas como: ¿por qué no puede hacerse? y ¿qué es lo que puede hacerse? La transición a preguntarse qué puede hacerse es un aspecto importante del proceso de hacer conjeturas porque desarrollando el problema inicial, generalizándolo o alterándolo, puede surgir una ley. Formular, comprobar y modificar conjeturas son procesos que constituyen la columna vertebral del razonamiento matemático.

2. CAPACIDAD DE ORGANIZAR Y REPRESENTAR LA INFORMACIÓN

Tomamos el siguiente problema:

CIERRA TU TAQUILLA

En el Instituto "Ada Byron" de Madrid hay 50 alumnos de cuarto de secundaria. Cada estudiante dispone de una taquilla (numeradas del 1 al 50). Al principio todas las taquillas estaban cerradas, y luego apareció por allí el primer alumno y las abrió todas. Detrás del primer alumno apareció el segundo, que cerró una taquilla sí y otra no. Un tercer alumno invirtió la situación de una taquilla cada tres (si estaba abierta, la cerró, y si estaba cerrada, la abrió). El cuarto alumno invirtió la situación de una taquilla cada cuatro, y así sucesivamente. Por último, el quincuagésimo alumno invirtió la situación de la taquilla número cincuenta (la última).

¿Qué taquillas se encuentran abiertas ahora?

En él es necesario representar gráficamente el estado de cada taquilla de forma que se pueda variar de cerrada a abierta y viceversa. Esto podría consistir simplemente en una lista de números con una A para abierta y una C para cerrada. Podemos cambiara de un estado a otro tachando o borrando cada vez que un nuevo alumno entra en escena. Con cincuenta taquillas aproximadamente surge un patrón que revela que las taquillas que permanezcan abiertas serán aquellas cuyo número sea un cuadrado perfecto (por ejemplo, 1, 4, 9, 16, 25, etc.).

3. CAPACIDAD PARA BUSCAR EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS

A los estudiantes les cuesta, habitualmente, aceptar el hecho que una simple excepción basta para que no se confirme la regla. Les cuesta comprender que constituye un contrajemplo, ver que satisface la condición pero no la conclusión. Los ejemplos conducen a conjeturas y sirven de comprobación. Los contraejemplos confirman conjeturas o enunciados. Algunas veces es la única forma de demostrar la falsedad de una teoría.

MÁXIMO O MÍNIMO

Si $f'(c)=0$ para una función f, entonces f tiene un máximo o un mínimo en $x = c$. ¿Es verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

DIVISORES

Supongamos que se tienen dos números que dividen 72. ¿El producto de ambos dividirá también 72? ¿Se da esto siempre así?

Los ejemplos como estos tienen dos partes. Por una parte, los estudiantes tienen que pensar si los postulados son verdaderos o son falsos, y de otra deben demostrarlo o buscar un contrajemplo, es decir un ejemplo que satisface las condiciones pero no la conclusión. Este tipo de cuestiones impide que el estudiante aprenda los teoremas y definiciones de memoria, promoviendo una mayor comprensión.

4.- CAPACIDAD PARA ENCONTRAR EL ERROR O DETECTAR ARGUMENTOS IMPERFECTOS

En esta misma línea, es necesario familiarizar al estudiante con experiencias en las que se discuta sobre las ideas erróneas, se razonen y sometan a crítica. En algunos casos, conviene que las ideas se pongan en crisis y que los alumnos se vean obligados a revisarlas. El siguiente ejemplo sobre semejanza de triángulos, razón y criterios de semejanza puede ilustrar esto.

AFIRMACIONES VERDADERAS

Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, explicando tu respuesta.

- Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.
- Si dos triángulos tienen los ángulos iguales, son semejantes.
- Si dos triángulos tienen los lados proporcionales, son semejantes.
- Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, son semejantes.
- Si dos triángulos tienen un ángulo igual, son semejantes.
- Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales, son semejantes.
- Si dos triángulos tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales, son semejantes.

5. CAPACIDAD PARA DEDUCIR Y DEMOSTRAR

Hay que iniciar a los estudiantes en la demostración y este proceso ha de prepararse convenientemente, haciendo que los alumnos:

a) sientan la necesidad de la demostración

b) tengan claros los presupuestos y reglas de la demostración.

Desarrollan estas capacidades actividades como las siguientes:

a) demostrar afirmaciones

b) completar demostraciones

c) ordenar demostraciones

a) Demostrar afirmaciones

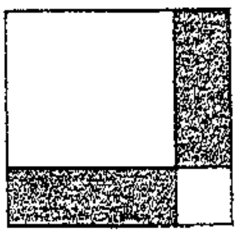
Es muy corriente la confusión entre prueba y demostración. Se ha detectado dificultad en elaborar una demostración, por las siguientes causas: a) confundir hipótesis con tesis, b) intentar demostrar el teorema partiendo de lo que se quiere demostrar o apoyándose en ello, c) considerar demostrado lo que se ve en la figura, d) confundir en la figura unos elementos con otros.

Por ejemplo: para demostrar que en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados son iguales, un alumno utiliza el siguiente argumento: trazando una línea desde la mitad de un lado hasta el vértice del ángulo opuesto se ve que el lado y el ángulo se dividen en dos iguales. Se trata de demostrar que un ángulo es igual a otro, no que la mitad de un ángulo es igual a la otra mitad. Sugerimos este ejemplos para trabajar con los estudiantes.

RECTÁNGULOS RAYADOS

Demuestra la siguiente afirmación:

Los dos rectángulos sombreados tienen la misma área.



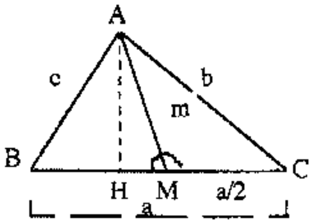
b) Completar demostraciones

El ejercicio de completar demostraciones desarrolla en el estudiante el rigor lógico, la deducción. Las demostraciones geométricas son más fáciles e intuitivas que las algebraicas porque permiten un apoyo gráfico mayor. Con alumnos no iniciados en la demostración se recomienda empezar por este tipo.

MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO

En todo triángulo, la mediana relativa a un lado es igual a la mitad de la raíz cuadrada del doble de la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el cuadrado de aquél.

Demostración



En el triángulo AMC el ángulo M es __________

El cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual:

____

____

En el triángulo AMB; M es un ángulo ____________________

____

El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo M es igual:

____

Sumando

____

y

____

Tenemos

____

luego

$m = 1/2\ (2(b2 + c2) - a2)1/2$

c) Ordenar demostraciones

Permite trabajar las secuencias lógicas necesarias en el proceso de prueba.

MAYOR QUE NUEVE

Ordena la siguiente demostración:

Probar que si la suma de los números positivos a, b, c es igual a 1 entonces

$1/a + 1/b + 1/c > 9$

Demostración:

Por tanto

$1/a + 1/b + 1/c > 3 + 2 + 2 + 2$

y $1/a + 1/b + 1/c > 9$

$1/a + 1/b + 1/c > (a/b + b/a) + (b/c + c/b) + (c/a + a/c)$

$1/a = 1 + b/a + c/a$

$1/b = a/b + 1 + c/b$

$1/c = a/c + b/c + 1$

De aquí se sigue que $a/b + b/a > 2$ y análogamente:

$b/c + c/b > 2$; $c/a + a/c > 2$.

ya que $a/b + b/a = (a2 + b2) / ab = ((a-b)2 + 2ab)) / ab = (a-b)2 / ab + 2$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad $1 = a + b + c$, por a, b y c.

PARA CONCLUIR

Hemos tratado de poner de manifiesto que entre los objetivos principales de la Enseñanza Secundaria y del Bachillerato estaría desarrollar el razonamiento matemático. No obstante, consideramos que hay que dotar al profesorado de recursos más adecuados para facilitar su enseñanza. En esta últimas décadas las finalidades de la educación han ido variando de la comprensión conceptual en la matemática moderna de los 60 al énfasis en el desarrollo de habilidades básicas en la matemática de los 70, de la relevancia de la resolución de problemas en los 80 al énfasis en el desarrollo de la potencia matemática en los 90. ¿Será el razonamiento matemático lo dominante en las finalidades de esta disciplina en la próxima década? Intuimos que sí.

Estos ejemplos están tomados del material que diseñé para el curso Construción de los procesos de pensamiento matemático. Estrategias para el aula que se enmarca dentro del XXIV Curso del Verano del IEPS bajo el título Educar para el ejercicio de la ciudadanía, julio 1999.

Fundamentalmente consistía en un análisis, dirigido a profesores de matemáticas, sobre herramientas y materiales. El curso está articulado en tres bloques de contenidos: formas de comprender las matemáticas, formas de pensar en matemáticas, y formas de trabajar en matemáticas.

***

Inés Mª Gómez Chacón
Dpto. de Didáctica de las Matemáticas
Instituto de Estudios Pedagógicos
Somosaguas. Madrid.