I/576

ENSEÑANZA POR DIAGNOSTICO APLICADA A LA CORRECCION DE ERRORES CONCEPTUALES EN MATEMATICAS

GRUPO AZARQUIEL

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACION
Y DOCUMENTACION EDUCATIVA
5 OCT. 1989 1111
REGISTRO
ENTRADA

ÍNDICE

Memoria de la investigación realizada siguiendo el Proyecto de Investigación Educativa presentado por el I.C.E. de la U.A.M. para el curso 1987-88 a los PROGRAMAS DE DESARROLLO DE LA INVESTIGACION E INNOVACION EDUCATIVA del Centro Nacional de Investigación y Documentación Educativa con el titulo:

"Enseñanza por diagnóstico aplicada a la corrección de errores conceptuales en Matemáticas"

Grupo AZARQUIEL

ÍNDICE

GRUPO AZARQUIEL :

Fernando Alonso Molina

Pedro Alvarez Hernandez

Carmen Barbero Sampedro

Inmaculada Fuentes Gil

Ana García Azcárate

Juan Manuel García Dozagarat

Santiago Gutiérrez Vázquez

M. Angeles Ortiz Capilla

Joaquín Pérez Navarro

Vicente Riviere Gómez

Carmen da Veiga Fernández

Francisco Herrero Ruiz

ÍNDICE

INDICE

ÍNDICE

INTRODUCCION:

Dentro del "XIII Plan Nacional de Investigación Educativa " del CIDE durante los años 1984 y 1985, en el Grupo Azarquiel realizamos una investigación en la cual analizamos los errores que con más frecuencia aparecen en las clases de matemáticas de 1º de BUP y en la que se confirmaban algunas hipótesis que explicaban las causas de dichos errores (memorización de reglas, generalización abusiva, uso indebido del signo igual, reducción de campo, necesidad de clausura, traducción literal de enunciados, etc...). Ahora se pretendía analizar en profundidad alguno de estos errores, centrándonos en su estudio y tratando de ponerlo de manifiesto mediante actividades que contengan las dificultades que lo producen.

La idea inicial de esta investigación era estudiar "**los errores cometidos por los alumnos en la resolución de problemas de enunciado con solución algebraica, analizando qué procesos siguen para pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico**"

ÍNDICE

La hipótesis de partida era que en la resolución de los problemas de enunciado con solución algebraica había tres fases: comprensión del enunciado, traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico y destrezas de cálculo.

En un primer momento creíamos que las tres fases tendrían aproximadamente el mismo nivel de dificultad. Por tanto, considerábamos que la comprensión lectora tendría un peso considerable en la resolución de un problema y comenzamos por analizar la influencia de diferentes enunciados para un mismo problema.

Los enunciados han sido tomamos de libros de texto de 1º de BUP ya que en el Álgebra escolar tienen un peso considerable los problemas de enunciado con solución algebraica y por eso pensábamos que era importante que el estudio se hiciese sobre los enunciados reales con que suelen trabajar nuestros alumnos.

Hacemos un estudio de los errores porque de ellos vamos a obtener información sobre la forma en que un alumno ve un problema y los procedimientos que utiliza para resolverlos. Esta información tiene también interés porque puede sugerir maneras de ayudar a los alumnos para evitar estos errores y porque nos puede ayudar a explicar por qué no

ÍNDICE

progresa un alumno al resolver un problema (SESM, 1983).

Por tanto, queremos detectar los errores y descubrir los posibles obstáculos conceptuales que pueden subyacer en ellos. Pues, los errores que aparecen (Matz, 1982) son el resultado de razonables, aunque infructuosos, intentos de adaptar el conocimiento previamente adquirido a una nueva situación.

Tomamos del constructivismo la idea de que los errores conceptuales no son nunca arbitrarios sino que surgen de alguna interacción entre la experiencia y otros conceptos

Pensamos que es necesario introducir este nuevo punto de vista a la hora de considerar las dificultades de aprendizaje que tienen nuestros alumnos y en particular cuando intentan resolver problemas de este tipo.

Y todavía más, creemos que la enseñanza de las matemáticas necesita cambiar la orientación que hasta ahora se le ha dado: es preciso dejar de hacer largas listas de ejercicios similares y practicar los automatismos del cálculo, con lo que probablemente se fijan de forma definitiva los errores; y en su lugar organizar la discusión de forma abierta del significado de las expresiones y la naturaleza de los propios errores conceptuales.

Esto tiene que reflejarse en la práctica, pues la concepción actual que pretende "evitar" que aparezca el error para que no se cree "confusión" reduce el papel del profesor a "**enseñar**" al alumno la forma correcta de resolver los problemas. Otra alternativa sería que el profesor interviniera para crear el "conflicto cognitivo" para que aparezcan los errores conceptuales (Bell, 1982). Las intervenciones de mayor éxito serían aquéllas que diesen al alumno ideas que permanezcan activas fuera de la clase y estrategias de ayuda para el propio aprendizaje. Esto le permitirá comprobar si sus ideas en una determinada tarea son correctas o no.

La investigación se ha realizado cubriendo varias etapas:

La primera parte estuvo forzosamente dedicada a un intenso trabajo de búsqueda y lectura de documentación relacionada con el tema, de la que queda constancia en la extensa Bibliografía que citamos al final.

A continuación realizamos lo que hemos llamado la PRIMERA PRUEBA y que como se explica fue una especie de

ÍNDICE

bautismo en las dificultades y equivocaciones que aparecían en las respuestas de nuestros alumnos.

Después elaboramos la SEGUNDA PRUEBA en donde, afinando un poco más, intentábamos un control mayor de las variables que pretendíamos estudiar.

Otra etapa muy importante ha sido el periodo dedicado a hacer las ENTREVISTAS y a analizarlas, lo que ha aumentado nuestra confianza en este instrumento para profundizar en el pensamiento de nuestros alumnos, al mismo tiempo que nos ha hecho ver las dificultades de conseguirlo sin que haya interferencias del entrevistador.

Por último recogemos los resultados de la TERCERA PRUEBA donde nos dedicamos, sobretodo, a los errores de Traducción y en particular al error que denominamos Letra como Objeto.

Para realizar esta investigación hemos contado con la dedicación plena de Inmaculada Fuentes Gil miembro del Grupo Azarquiel que obtuvo además una licencia por estudios para coordinar este proyecto. Sin esta situación no hubiera sido posible la consulta de casi toda la bibliografía que había sobre este tema.

ÍNDICE

Es prácticamente imposible realizar este tipo de investigaciones sin tener una persona encargada a tiempo total en este trabajo, pues estas investigaciones psicopedagógicas exigen que las personas que las realicen sean expertos en investigación educativa y a la vez sean profesores en activo en contacto directo con los alumnos. Lo que partiendo de nuestra realidad concreta, supone una contradicción difícil de superar.

Como consecuencia de lo anterior, en esta memoria nos referiremos con frecuencia a la memoria presentada -para su licencia por estudios - por Inmaculada Fuentes con el nombre de "Estrategias utilizadas en la TRADUCCION del Lenguaje Natural al Lenguaje Algebraico".

ÍNDICE

PRIMERA PRUEBA

La prueba se planteó como un experimento previo para entrar en contacto directo con las respuestas de los alumnos a los problemas de enunciado.

Con este fin decidimos seleccionar algunas variables que incluiríamos en los enunciados:

- Influencia de determinadas frases -- "mayor que", "más alto que", "veinte metros mayor que", "tres días antes que"...

- Que se pudiesen resolver por sistemas sencillos de ecuaciones de primer grado o simplemente por tanteo.

- Considerar la operación por la que están relacionadas las variables. etc.

Todo esto aparece recogido en la memoria de Inmaculada Fuentes y lo incluímos en el Anexo 1.

ÍNDICE

Al hacer el <u>Análisis de resultados</u>, cuando se estudian las respuestas de los alumnos a los problemas A_1, B1, C_1 y D_1, a partir de la tabla III.3, aparece un tipo de "error" denominado **"Traducción literal"** y que después estudiamos con mucho más detalle en las pruebas siguientes y en las entrevistas.

Es la primera vez que se nos presenta directamente en una respuesta de nuestros alumnos, después de haber estudiado que podía aparecer. Por el momento podemos decir que consiste en utilizar las letras --variables -- como abreviaturas de palabras -- torre A, torre B, etc. -- y haciendo una interpretación muy simplificadora de las operaciones traducir el lenguaje normal a símbolos que son matemáticos pero sin hacer ninguna interpretación de relaciones cuantitativas al escribir la expresión. Es como si se tratase de pasar de un lenguaje natural a otro haciendo corresponder el orden de los símbolos que aparecen en la ecuación con el orden de las palabras en el enunciado (Clement, J. 1982).

ÍNDICE

Después de haber realizado esta Prueba y tras el estudio detallado de las respuestas de los alumnos nos pareció que había algunos hechos importantes que destacar y como consecuencia de los cuales íbamos a tomar algunas decisiones para continuar nuestro trabajo:

En primer lugar era preciso hacer un estudio más detallado de las variables que pueden influir en la resolución de problemas de enunciado con el fin de seleccionar aquéllas en las que concentraríamos nuestro estudio.

En segundo lugar dado los altos porcentajes de error y abandono en los alumnos de nivel bajo, según se recoge en la tabla, o bien hacíamos el estudio eligiendo problemas de distinto nivel para cada uno de los grupos de alumnos o debíamos optar por uno de los dos niveles. Elegimos esta última forma de actuación concentrándonos a partir de entonces en los alumnos de nivel medio.

%	0-25		25-50		50-75		75-100	
	Error	Aban.	Error	Aban.	Error	Aban.	Error	Aban.
Nivel Medio	$D_1 - D_3$	$A_1 - A_3 - B_1$ $B_2 - B_3$ C_1 $C_2 - C_3 - D_1$ $D_2 - D_3$	$A_1 - A_2 - A_3$ $B_1 - B_3 - C_1$ C_3	A_2	$B_2 - C_2$ D_2			
Nivel Bajo		$A_1 - B_1 - C_1$ $A_2 - B_2 - B_3$ $C_3 - D_3$	$A_3 - C_1$ $C_3 - D_1$	$D_1 - C_2$ $D_2 - A_3$	$A_2 - C_2$ $D_3 - D_2$		$A_1 - B_1$ $B_2 - B_3$	

ÍNDICE

También, en relación con el tipo de problemas, decidimos dedicarnos a problemas cuya estrategia prevista de solución fuese utilizar una ecuación de primer grado o un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Algunos de los problemas se elegirían teniendo la misma estructura profunda que B_2 y C_2 por ser, junto con D_2, los que habían obtenido mayores porcentajes de error. Sin embargo no se introducirá ningún enunciado con la misma estructura que este último problema porque la estrategia más evidente para resolverlo mediante álgebra es plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y este nivel de dificultad no era adecuado para nuestros alumnos.

SEGUNDA PRUEBA

Como habíamos decidido, a la vista de los resultados de la Primera Prueba comenzamos haciendo un estudio de los posibles factores que pueden aparecer en el enunciado de un problema e influyen en que el alumno comprenda, plantee y por fin lo resuelva correctamente . Iniciamos una reflexión sobre los enunciados de los problemas que íbamos a proponer con el fin de averiguar cuáles eran las variables que podían influir para que el alumno llegase a resolverlos.

Llegamos a elaborar la siguiente relación que está recogida en la memoria de Inmaculada Fuentes e incluimos en el Anexo 2.

ÍNDICE

Obviamente, la frecuencia y el tipo de errores que un alumno comete cuando intenta resolver un problema de enunciado depende de la interacción entre las variables de la pregunta: vocabulario, sintaxis, complejidad de las ideas en la pregunta, el nivel de matemáticas que son necesarias. Y de las variables personales: habilidad de lectura, conocimientos habilidad matemática, perseverancia, etc. Por todo ello es inevitable que los alumnos cometan errores en este tipo de problemas. Esta circunstancia nos llevó a tomar la decisión de controlar algunas de estas variables, fijando en los enunciados las condiciones siguientes:

- Tener cuidado con palabras que por su significado pueden ser difíciles de comprender para los alumnos.

- Proponer situaciones reales con números concretos.

- Que el orden en que aparezcan los hechos en el texto sea el mismo que en el que ocurren naturalmente.

ÍNDICE

- Utilizar números enteros y racionales no muy grandes

- Que no existan datos implícitos ni superfluos.

- Que la incógnita no aparezca mencionada más de tres veces en el texto.

- Que no haya más de dos incógnitas.

- Que los problemas se puedan resolver con una ecuación o un sistema de dos ecuaciones de primer grado.

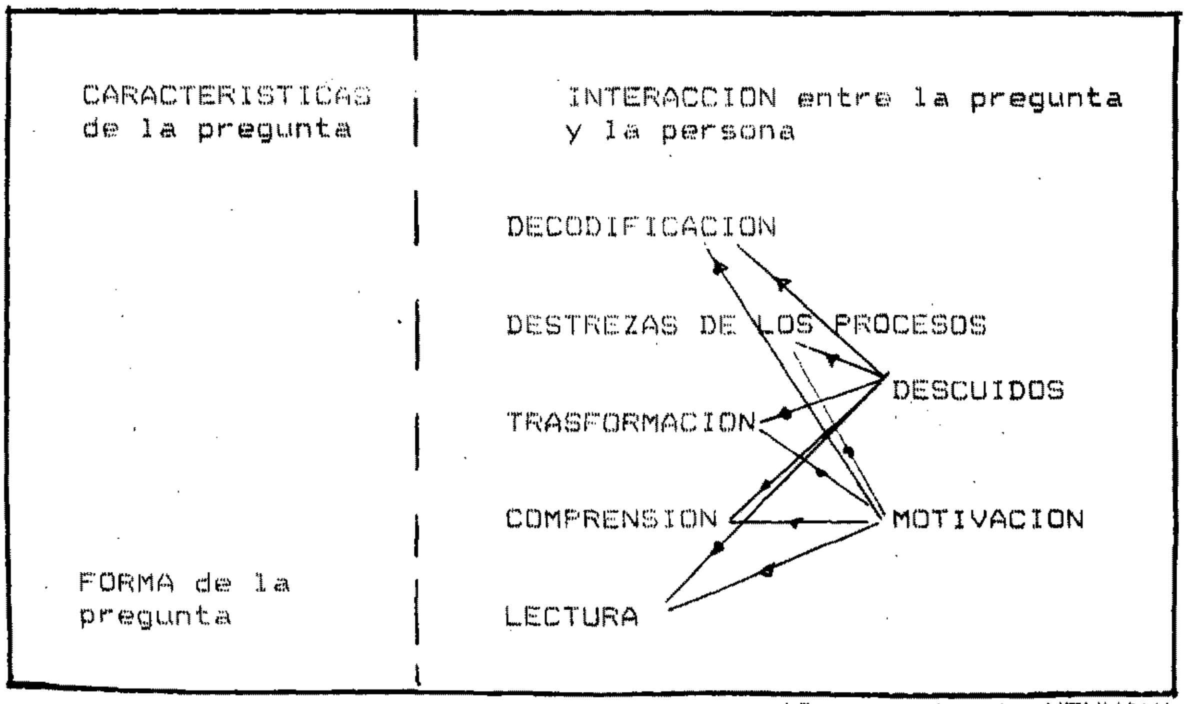
De esta forma se elaboraron los enunciados de la siguiente prueba, que están recogidos también en la memoria de Inmaculada Fuentes, junto con los detalles de la fase experimental y de la organización de las dos sesiones de tres problemas cada una que se hicieron con los alumnos. Anexo 3.

Al mismo tiempo nos propusimos hacer el estudio analizando los errores que cometen los alumnos al resolver problemas de este tipo, clasificándolos, cuantificándolos e intentando profundizar, mediante entrevistas, en las lineas de pensamiento que hay detrás de algunos de ellos. Además pensábamos que todo ello nos ayudaría a encontrar estrategias didácticas adecuadas para tratarlos.

Para analizar los errores de los alumnos nos basamos en las categorías de error definidas por Newman (1977), que presuponía que asociado a cualquier problema de enunciado había una serie de obstáculos que debían ser superados para obtener una solución correcta, y que un fracaso en cualquier obstáculo impide superar el siguiente para conseguir la solución correcta. En este sentido Newman definió una jerarquía de causas de error en la resolución de problemas escritos de matemáticas de un paso.

La jerarquía de Newman tiene cinco niveles, empezando por el más bajo o primero que aparece: LECTURA, COMPRENSION, TRANSFORMACION, DESTREZA EN LOS PROCESOS y DECODIFICACIÒN de la respuesta. El fracaso en cualquier nivel impide a la persona obtener la respuesta correcta, a menos que la obtenga por azar.

Además -- según Newman -- hay errores que se deben a la FORMA DE LA PREGUNTA, aunque este "defecto" no se puede atribuir a la persona que intenta resolver el problema, y errores por él llamados de DESCUIDO y de MOTIVACION; Newman dice también que éstas tres categorías pueden ser asociados a cualquier nivel de las otras. Un error de Comprensión puede ser un error de Motivación, si el alumno no tienes interés en el problema.



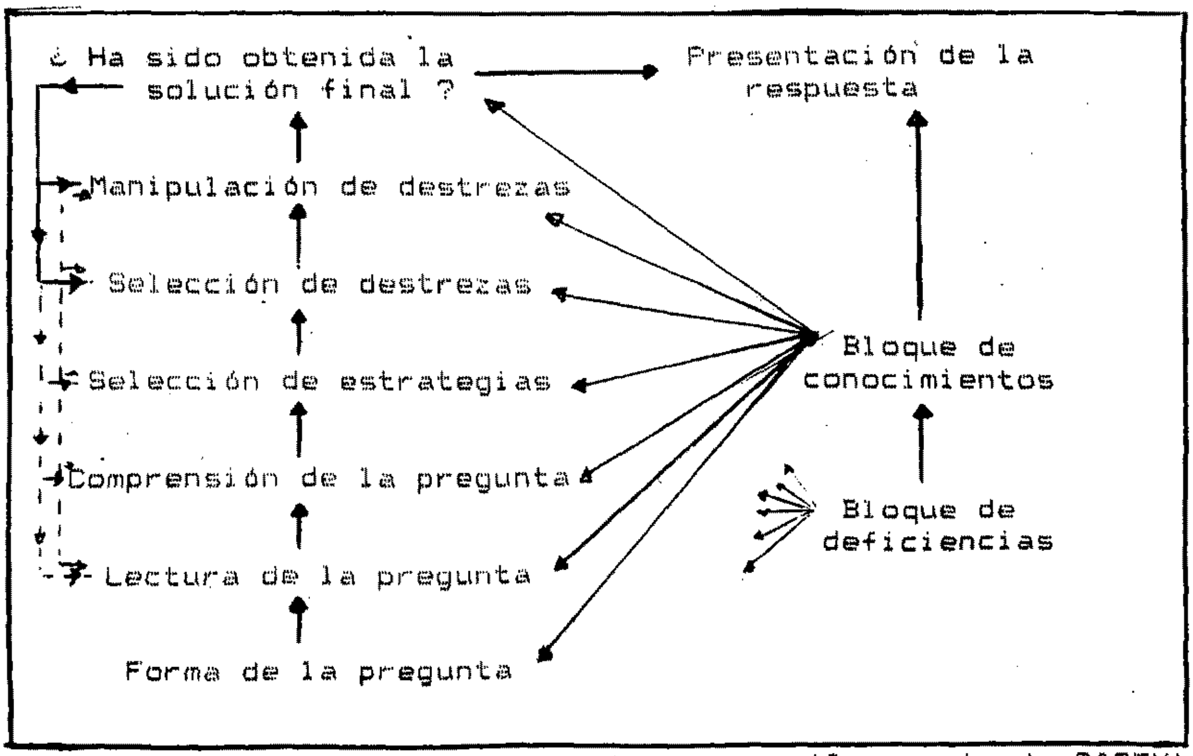
(Jerarquía de NEWMAN)

ÍNDICE

Casey (1978), modificó y extendió la jerarquía de errores de Newman, construyendo una jerarquía más general que puede ser aplicada al análisis de errores cometidos en problemas verbales de matemáticas de varios pasos.

Casey dice que cualquiera que intente resolver un problema de varias etapas tiene que identificar, secuenciar y resolver un conjunto apropiado de subproblemas. Según se avanza en la búsqueda de solución se vuelve sobre pasos anteriores de la jerarquía no sólo después de resolver cada subproblema sino también mientras se intenta hacerlo.

En el Anexo 4 incluimos las anotaciones sobre las clasificaciones de Newman y Casey que hace Inmaculada Fuentes en su memoria.



(Jerarquía de CASEY)

ÍNDICE

Adaptaciones de las jerarquías de Newman y Casey

Como el objetivo de esta investigación era estudiar "los errores cometidos por los alumnos en la resolución de problemas de enunciado con solución algebraica, analizando qué procesos siguen para pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico", hicimos alguna modificación de las Jerarquías de Newman y Casey para adaptarlas a este tipo de problemas, en particular la categoría de Newman de Transformación y de Casey de Selección de Estrategias y Selección de Destrezas. En el tipo de problemas que nos proponemos estudiar, estas categorías se corresponderán con el proceso de escribir las ecuaciones adecuadas para resolverlos mediante procedimientos algebraicos. Esta actuación suele calificarse en la literatura especializada (Clement 1982, Lochhead y Mestre 1988, etc) como "TRADUCCION" del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

En las pruebas escritas es difícil detectar los errores de Lectura pues lo más que puede llegarse a conocer, y eso no en todos los casos, es si el alumno ha comprendido o no el enunciado del problema. También hemos tenido

ÍNDICE

dificultades, en algunos casos, para diferenciar si el error era de "COMPRENSION" o de la clase siguiente en la jerarquía, por lo que aparece un número de casos que hemos catalogado como "SIN CLASIFICAR". La categoría de Destrezas en los procesos la hemos llamado "HABILIDADES" para manipular y resolver las ecuaciones algebraicas establecidas. Por último aparecen los errores de "DESCUIDO", y de "CODIFICACION" de la solución de la ecuación para responder correctamente a la pregunta del problema. En las pruebas escritas no hemos podido detectar errores de Motivación.

Corrección de la Segunda Prueba

Se ha hecho una cuantificación de los errores aparecidos en cada uno de los enunciados y las respuestas se han estudiado clasificando los errores apoyándonos en las jerarquías que hemos explicado antes. El error que se ha tomado en consideración es el primero que aparece en el ejercicio de cada alumno, esto es, la primera equivocación en el camino hacia la solución del problema.

Problema de las Vasijas.-

Enunciado Afirmativo

En dos vasijas hay la misma cantidad de agua. Sacamos 26 litros de una de ellas y los echamos en la otra; ésta tiene ahora triple número de litros que la primera. ¿Cuántos litros había al principio en cada vasija?

Enunciado Condicional

En dos vasijas hay la misma cantidad de agua. Si sacáramos 15 litros de una de ellas y los echáramos en la otra, entonces ésta tendría triple número de litros que la primera. ¿Cuántos litros habría al principio en cada vasija?

En primer lugar hemos hecho una cuantificación separando los ejercicios con error de los que no tienen error. Los resultados aparecen en la siguiente tabla:

ÍNDICE

Tabla 1	Ej. bien resueltos	Ej. con errores
E. Afirmativo	31,9 %	68 %
E. Condicional	39,2 %	60,8 %

Fácilmente calculamos el tanto por ciento de ejercicios bien resueltos y el tanto por ciento de ejercicios con error. El número de ejercicios resueltos con enunciado afirmativo es el mismo que el número de ejercicios con enunciado condicional, y este número coincide con el total de alumnos.

Tabla 2	Ej. bien resueltos	Ej. con errores
Afirm. más Condic.	35,6 %	64.4 %

Haciendo ahora una clasificación de los errores según el modelo previsto más arriba y haciéndola también para el total de problemas Afirmativos o Condicionales obtenemos:

Tabla 3	Compr.	Traduc.	Habil.	Codif.	Desc.	Sin Cl.
E.Afirm.	15,1 %	30,3 %	6,1 %	24,2%	1,5 %	22,7 %
E.Condic.	18,6 %	44,1 %	5,1 %	16,9%		15,2 %
Total	16,8 %	36,8 %	5,6 %	20,8%	0,8 %	19,6 %

Es interesante comparar los tantos por ciento de cada tipo de error con el tanto por ciento de ejercicios que están bien hechos. Lo vamos a hacer únicamente para el Total de ejercicios Afirmativos o Condicionales:

Tabla 4

	Bien	Compr.	Traduc.	Habil.	Codif.	Desc.	Sin Cl.
Total	35,6%	10,8 %	23,7 %	3,6 %	13,4%	0,5 %	12,6 %

En este trabajo nos vamos a centrar, tal como hemos dicho, en los errores de Traducción. Podemos observar en la tabla los altos porcentajes que corresponden a este tipo de error, aunque también son altos los porcentajes correspondientes a Codificación de las respuestas.

ÍNDICE

En los errores de Comprensión intervienen muchos factores personales y de preparación del alumno (motivación, desarrollo, capacidad de reflexión etc.), así como de la Forma de la Pregunta (Jerarquía de Newman) que no nos hemos propuesto analizar. En las entrevistas hemos trabajado intentando separar este tipo de error del de Traducción procurando siempre que el alumno Comprenda el enunciado. Hemos comprobado que, aunque se dé esta circunstancia, el error de Traducción se sigue produciendo, tiene entidad propia, y parece que tiene que ver con dificultades relacionadas con el aprendizaje del propio lenguaje algebraico y matemático separadas de otro tipo de dificultades.

Fijándonos únicamente en los errores de Traducción, obtenemos un 30,3 % en el enunciado Afirmativo y un 44,1 % en el enunciado Condicional. Ahora bien esta diferencia (13,8 %) podría verse disminuida si se tiene en cuenta que en el apartado "Sin Clasificar" en el enunciado Afirmativo (22,7 %) hay un porcentaje más alto de errores que en el Condicional (15,2 %).

ÍNDICE

Por último vamos a presentar una tabla en la que se recogen los principales errores de Traducción que hemos encontrado en el problema del enunciado Condicional. El tanto por ciento se ha hecho teniendo en cuenta el número de veces que aparece cada error sobre el total de errores de Traducción.

Tabla 5

$x-15 = 3(x+15)$	$x-15 = 3(x-15)$	$x-15 = y+15$
29,8 %	14,9 %	8,9 %

$x+15 = 3x$	$3(x-15) = x$	$x-15 = 3x$
11,9 %	8,9 %	6 %

Por el momento vamos a llamar la atención sobre el tipo de error que aparece con porcentaje más alto: $x-15 = 3(x+15)$ que se corresponde con $x-26 = 3(x+26)$ en el otro enunciado y que hemos llamado de COMPARACION ESTATICA, después haremos un estudio del mismo, en las entrevistas.

ÍNDICE

Problema de la Parcela.-

La incógnita es el total por el que se pregunta

En una parcela la piscina ocupa 20 metros cuadrados, la casa ocupa tanto como la piscina y la cuarta parte de los metros cuadrados que tiene la parcela, el jardín ocupa tanto como la casa y la piscina juntas. ¿Cuántos metros cuadrados tiene la parcela?

La incógnita es un dato intermedio y se pregunta por el total

En una parcela la piscina ocupa 20 metros cuadrados; la casa ocupa tanto como la piscina y la mitad del jardín, el jardín ocupa tanto como la piscina y la casa juntas. ¿Cuántos metros cuadrados tiene la parcela?

Los resultados globales los tenemos en la tabla siguiente:

Tabla 6	Ej. bien resueltos	Ej. con errores
Incog. Total	37,5 %	62,5 %
Incog. D. Interm.	17,3 %	82,7 %
Total más Interm.	27,4 %	72,6 %

Cuando la incógnita es un dato intermedio, hay una diferencia significativa de ejercicios con error (20,2 %) Esta diferencia puede explicarse, porque el enunciado presenta dificultades, como manifiesta un alumno en una de las entrevistas:

P: No tengas ningún problema...Sí, tú me vas diciendo lo que piensas ¿ Por qué lo haces ? ¿ Por qué no lo haces ? Lees en alto el problema. Todo lo que se te ocurra.

A: (Lee en alto el problema)
Lo primero que haría sería llamar x o y a los metros para averiguar.

P: ¿ Cuál ?

A: ....qué tiene el jardín.

P: Metros cuadrados del jardín.

A: Luego, tendríamos que averiguar la casa. Sería.. la piscina que es veinticinco metros, bueno 25x más la mitad del jardín que primero tendríamos que averiguar lo que era el jardín. El jardín tiene que estar aquí metido y el jardín tiene que averiguar la piscina, o sea la casa. Entonces no sé cómo se podría hacer, **porque para saber el jardín tienes que saber primero lo que ocupa la casa y para saber la casa tienes que saber el jardín que es correlativo, que ocurre...**

P: ¿ Estás intentando acordarte del problema, o te surge ahora esa dificultad ?

A: No, o sea es que esto, me parece que también me pasó esto en el problema, o sea cuando lo hicimos.

ÍNDICE

Esta especie de "circulo vicioso" desconcierta a nuestros alumnos y tienen dificultades en encontrar la igualdad que precisan para la ecuación. Además en esta situación se requiere una comprensión del concepto de variable más profunda que en otro tipo de situaciones: Tienen que entender que un valor que desconocen depende de otro que también desconocen y que depende a su vez del primero, no les sirven interpretaciones elementales de las letras y por tanto de las variables (Hart, K. CSMS 1981).

Veamos ahora los porcentajes de los distintos tipos de errores sobre el total de errores:

Tabla 7	Compr.	Traduc.	Habil.	Codif.	Desc.	Sin Cl.
I. Total	9,2 %	41,5 %	29,2 %	7,7 %	1,5 %	10,8 %
I.D. Interm	10,5 %	60,5 %	10,5 %	3,5%	2,3 %	12,8 %
Total	9,9 %	52,3 %	18.5 %	5,3%	2 %	11,9 %

ÍNDICE

Sería interesante comparar los tantos por ciento de cada tipo de error con el tanto por ciento de ejercicios que están bien hechos, pero lo vamos a hacer únicamente para el Total de ejercicios:

Tabla 8

	Bien	Compr.	Traduc.	Habil.	Codif.	Desc.	Sin Cl.
Total	27,4%	7,2 %	38 %	13,4 %	3,8%	1,5 %	8,6 %

El porcentaje de errores de Traducción es grande, sobretodo en el caso en que la incógnita es un dato intermedio.

Por otra parte, el porcentaje de errores en las Habilidades es mayor en el enunciado que tiene menos errores de Traducción, ya que, tal como hemos hecho la corrección, aunque además hubiese error en las Habilidades se anota el error de Traducción.

Haciendo ahora los porcentajes de los principales errores de Traducción encontrados sobre el total de errores de Traducción:

En cada tipo de error hay tres números que corresponden respectivamente a:

- Ejercicio en el que la incógnita es el total.

- Ejercicio en el que la incógnita es un dato intermedio.

- Total.

Tabla 9

Letras como objetos			Letras cualquier valor desconocido			No hay ecuación		
0 %	26 %	17,7%	12 %	20 %	16,5%	32 %	16 %	21,5%

Fracción como valor absoluto			Reducción de campo			Clausura		
20 %	24 %	22,8%	28 %	6 %	13,9	8 %	8 %	7,6%

ÍNDICE

Con la denominación de **"Letras utilizadas como objetos"** o **"Variable etiqueta"**, como también se denomina, queremos nombrar un tipo de error que está bastante extendido entre las formas de actuación de los alumnos (26 % en uno de estos problemas) y que consiste en utilizar la letra como el nombre de un objeto en lugar de como el nombre de una variable numérica asociada a ese objeto. Por ejemplo: utilizar las letras x e y para para representar los objetos "jardín " y "parcela", en lugar de las medidas del jardín y de la parcela.

"Letras como cualquier valor desconocido". El uso generalizado en este tipo de problemas de las letras x, y etc. como "incógnitas" junto con la no comprensión del concepto de variable provoca la utilización indiscriminada de las letras para representar cualquier valor desconocido, sea o no conveniente. Dice un alumno "Como no sabemos su valor son incógnitas y yo siempre a las incógnitas las llamo x."

Algunos alumnos escriben alguna expresión algebraica, pero no llegan a escribir la ecuación, esta forma de proceder implica que el alumno actúa siguiendo otros modelos: interpretación de "Letras como objetos" y "Traducción literal"

ÍNDICE

El error que hemos calificado como "**Fracción como valor absoluto**" consiste en que los alumnos utilizan las fracciones que aparecen en los problemas no como fracciones de una cantidad, la medida de la parcela o del jardín, si no como números absolutos, como si fuesen enteros. Este tipo de error corresponde a la aritmética, pero como el álgebra que estamos trabajando está apoyada conceptualmente y operacionalmente en la aritmética los conceptos y actuaciones erróneas en aritmética afectan directamente al álgebra escolar. Este es un aspecto muy importante del aprendizaje del álgebra (Booth L. R. Yearbook 1988) pero que no vamos a estudiar ahora.

Reducción de Campo y **Clausura** son dos modelos de actuación bastante conocidos y que nosotros mismos hemos estudiado antes en el contexto de nuestra anterior investigación "**El error en matemáticas. Otro punto de vista para su estudio**" realizada dentro del XIII Plan Nacional de Investigación Educativa del CIDE los años 1984 y 1985.

Problema del Restaurante.-

Un grupo de personas va a un Restaurante a cenar. Si se sientan tres personas en cada mesa quedan dos personas sin mesa. Si se sientan cuatro personas en cada mesa queda una mesa vacía. ¿Cuántas personas y cuántas mesas hay?

Veamos los porcentajes obtenidos en la clasificación de errores sobre el total de ejercicios hechos de este problema:

Tabla 10

Bien Algbr.	Bien Tanteo	Tra-ducc.	Habi-lidad.	Codi-fica.	Des-cuid.	Sin Traduc	En Blanc
4,2 %	10 %	48,3%	0,8 %	0,8%	1,7 %	15,8%	18,3%

Este problema presenta bastantes dificultades, hay un 18,3 % de alumnos que lo dejan en blanco, y sólo el 4,2 % lo resuelven utilizando métodos algebraicos.

Hay, sin embargo, un 10 % de alumnos que llegan a la solución realizando pruebas, que en muchos casos van acompañadas de ideogramas representando mesas y personas, que después cuentan para ver si se adaptan a las condiciones del problema.

Es muy significativo también el alto porcentaje de errores de Traducción: 48,3 % sobretodo porque no hemos detectado errores de Comprensión, pues aparecen un 15,8 % de ejercicios en los que sí hay Comprensión del texto pero no se ha realizado Traducción.

En estos casos los alumnos intentan seguir una estrategia de recuento y llegan, únicamente, a expresiones del tipo "el número de personas tiene que ser múltiplo de cuatro y no puede ser múltiplo de tres", lo que indica Comprensión del enunciado, pero no llegan al final ni hacen Traducción.

Al estudiar los errores de Traducción, nos hemos encontrado con gran dispersión en las respuestas, sin embargo hay dos aspectos en común que nos interesa destacar:

Por una parte los alumnos utilizan en casi todas esas respuestas, las "Letras para representar objetos". Este tipo de error lo hemos encontrado antes en el problema de la parcela y corresponde a una interpretación de las letras de un nivel más bajo (Küchemann, D. en Hart, K.M. 1981) que el requerido para comprender el concepto de variable.

Pero utilizar las "Letras para representar objetos" permite a los alumnos responder con éxito a muchas preguntas, sin embargo esta reducción de significado falla cuando es esencial distinguir entre los objetos mismos (en este caso personas y mesas) y su número. Esta distinción a veces es muy difícil de comprender.

• En este enunciado, los alumnos identifican dos categorías distintas: personas y mesas, y utilizan las letras x e y para representarlas, pero quizás por la forma en que está expresado en el enunciado: "Si se sientan tres personas en cada mesa quedan dos personas sin mesa ...", no distinguen si se trata del "objeto" personas o de su número. De hecho escribe: "x = personas" e "y = mesas".

Después, en el paso siguiente, escriben las ecuaciones correspondientes utilizando una estrategia de Traducción que llamamos "Traducción Literal" y que ya nos hemos encontrado en la prueba inicial.

Para hacer este tipo de Traducción los alumnos utiliza distintas operaciones:

- Unas veces lo hacen con la suma o la resta: "Tres personas en una mesa quedan dos personas sin mesa", escriben: "$3x + y = 2$" ó "$3x + y = -2$" ó "$3x + y = 2x$" ó "$3x + y = -2x$" ó "$3x - y = 2$".

  O para la segunda frase, escriben: "$4x - y = 1$" ó "$4x + 1 = -1$" ó "$4x + y = -y$" etc. y dicen : "Cuatro personas en una mesa queda una mesa vacía".

  La situación de "quedar" unas veces la expresan con un signo más y otras con un signo menos, apareciendo por igual las dos versiones.

  En este caso hay un 39,6 % de las respuestas.

ÍNDICE

- También utilizan la multiplicación, y en este caso dicen: "Tengo que colocar tres personas por cada mesa y dos personas que sobran darán las mesas" y escriben: "3xy + 2x = y" ó 3xy + 2 = y".

  En la segunda frase dicen: "Cuatro personas por mesa (4xy) menos una mesa (-y) dará las personas; escriben: "4xy - y = x".

  En este caso hay un 6,6 % de las respuestas.

- O el cociente: "Tengo que repartir tres personas en cada mesa y me sobran dos" y escriben: "3x / y = 2" ó "3x/y = -2" ó "3x/y = 2x" ó "3x / y = -2x".

  En la segunda frase: "Tengo que repartir las personas poniendo cuatro en cada mesa y me sobra una mesa" escribiendo: "4x / y = 1" ó "4x / y = -1" ó "4x/y = y" ó "4x/y = -y".

  Dándose esta respuesta en el 5,7 % de los casos.

Haciendo un recuento de todas las respuestas obtenemos:

Tabla 11	Traducción Literal	Otros	Bien
Primera frase	52,9 %	35,8 %	11,3 %
Segunda frase	50,9 %	49,1 %	0 %
Total	51,9 %	42,5 %	5,6 %

Hemos distinguido en el recuento las dos frases del problema donde se establecen relaciones cuantitativas:

- **Primera frase:** "Si se sientan tres personas en una mesa quedan dos personas sin mesa".

- **Segunda frase:** "Si se sientan cuatro personas en cada mesa queda una mesa vacía".

Problema de los Coches.-

Teniendo en cuenta el plan de una fábrica deben construirse 40 coches diarios. Sin embargo, si cada día se fabrican cinco coches más, tres días antes del final solamente quedan 75 coches por hacer. ¿Cuántos días tenían que trabajar según el plan inicial? ¿Cuántos coches tenían que construirse en total?

Es un enunciado largo y de difícil comprensión. En la Tabla 12 están reflejados los porcentajes obtenidos en la clasificación de errores, así como los porcentajes de ejercicios bien resueltos y en blanco sobre el total de ejercicios propuestos.

Tabla 12

Bien Resuel.	Compren Traducc	Habil.	Descu.	Sin Traduc	En Blanco
6,7 %	47,5 %	0,8 %	2,5 %	14,2%	28,3 %

ÍNDICE

Hay un alto porcentaje de alumnos (28,3 %) que no han hecho el problema dejándolo en blanco.

En la columna "Sin Traducción" hay un 14,2 % de ejercicios en los que se inicia algún tipo de razonamiento, por tanteo o por álgebra sin llegar a escribir ninguna ecuación, y después lo abandonan.

Entre estas dos situaciones suman un 42,5 % de ejercicios.

Al realizar la clasificación de errores no ha sido posible diferenciar entre Comprensión y Traducción y además en estos casos ha habido una gran dispersión por lo que no ha sido posible agrupar las respuestas.

Todos estos resultados nos indican que el problema no era adecuado para el objetivo que nos habíamos propuesto, sólo podemos estudiar respuestas aisladas, sin poder hacer cuantificación global y en muchos casos no podemos identificar el error según la clasificación propuesta.

ÍNDICE

También en alguna respuesta se produce "Traducción Literal", junto con "Letras utilizadas para nombrar objetos":

x = coches

y = días

$40x = y$

Escribiendo: 40 coches por día sería: $40x = 1y$

$5x.y = -75x - 3y$

Escribiendo: Cada día se fabrican 5 coches más: "5x" (5 coches) .y (por día)

Esto sería igual a que tres días antes "-3x" quedarían "75x" (75 coches)

O en otro caso escriben:

45 coches por día (x) más tres días antes (x-3) dan los "75 coches".

"$45x + x - 3 = 75$ x son los días".

ÍNDICE

LA ENTREVISTA

En las pruebas escritas cualquier respuesta que se dé aporta una posible explicación pero hay otras muchas y cualquier inferencia que se haga sobre el pensamiento de un alumno a partir sólo de las respuestas escritas será una mera conjetura. La técnica que hemos utilizado para nuestro trabajo es la de la entrevista porque nos daba ideas sobre la clase de conceptos que tenían los alumnos y sobre los procedimientos que utilizaban para resolver diferentes problemas matemáticos. Las entrevistas, siempre que se hagan de forma estructurada, permiten determinar modelos consistentes de los errores con un cierto grado de verosimilitud (Clements, 1980).

¿ Cómo debería hacerse una entrevista ?.-

La entrevista puede suministrar información detallada sobre los procesos cognitivos de los alumnos. Si se secuencia adecuadamente (Liedtke W. 1988), la información resultante puede adaptarse fácilmente y trasladarse directamente a tareas de recuperación.

Durante la entrevista es necesario adaptarse al alumno que estamos entrevistando, para lo cual aunque nos

ÍNDICE

hayamos trazado un plan será conveniente modificarlo sobre la marcha.

Rudnitsky et al (1981) describen formas de situar un nivel adecuado de dificultad y sugieren cuatro posibles reajustes, cuando sea necesario:

. Definir un concepto u operación en términos más concretos que los utilizados en la respuesta que se había dado antes.

. Cambiar la línea de la entrevista a niveles muy diferentes.

. Utilizar ejemplos para ayudar a explicar un procedimiento.

. Comprobar si un alumno aplica las reglas específicas a ejemplos diferentes.

A la hora de realizar una entrevista hay que tener mucho cuidado porque a veces no se consigue el objetivo de recoger la máxima información relevante que sea posible. Es contraproducente utilizar algunas preguntas como por ejemplo: ¿ Podrías ?, ¿ Puedes ? pues parece que llevan al alumno a contestar inevitablemente, NO, lo que seguramente provocará la interrupción del proceso perdiéndose la información obtenida hasta ese momento. También las intervenciones del

ÍNDICE

tipo: ¿ Estás seguro ? o ...Explícamelo de nuevo... llevan implícito que algo se ha hecho incorrectamente. Como resultado de esto el alumno puede cambiar su respuesta y la información que obtenemos puede tener poco valor diagnóstico.

Sin embargo, hay intervenciones como por ejemplo: Dime cómo podrías...... o Intenta.....que facilitan la comunicación y permiten seguir recabando la información que deseamos.

¿ Cómo se ha hecho realmente ? .-

Nuestras entrevistas no siempre han tenido en cuenta esos principios generales, y es interesante contrastar con la realidad de que aunque la mayoría de las veces aunque nos habíamos trazado un plan, las respuestas de los alumnos nos desbordaban y no sabíamos cómo sacarle todo el partido que después hemos visto que se podía sacar.

A veces, después de la trascripción, hemos comprobado que las preguntas estaban muy influenciadas por las ideas previas que teníamos nosotros sobre lo que creíamos que querían expresar los alumnos o sobre los procedimientos que habían utilizado a la hora de resolver un problema.

El éxito de una entrevista depende fundamentalmente del grado de comunicación que se establece entre entrevistador y entrevistado y hemos comprobado que aquéllos alumnos que tenían "muchos errores" en las pruebas escritas estaban en tal grado de confusión que era imposible tratar, en una única entrevista todos los errores que pretendíamos.

Es muy interesante tener en cuenta que en la entrevista aunque una regla de oro es que "hay que escuchar al otro y dejarle pensar a su propio ritmo", a veces éste es tan lento que se produce aburrimiento por ambas partes.

Es muy difícil tener paciencia para esperar que un alumno, con un pensamiento aparentemente "demencial", llegue a una respuesta correcta, o al menos nos dé alguna pista sobre cómo es su forma de pensar en esa ocasión. Los procesos <u>casi siempre</u> son demasiado lentos.

<u>Objetivo de la entrevista</u>.-

* Obtener información sobre las concepciones y estrategias en que están basadas los errores que comete un alumno al resolver un problema.

<u>Alumnos seleccionados</u>.-

* Alumnos de 1º de BUP seleccionados a partir de los errores cometidos en la prueba escrita.

ÍNDICE

Diseño de la entrevista.-

La duración de la entrevista fue aproximadamente de 45 minutos.

Se grababan en vídeo y se trascribieron después.

Durante la entrevista los alumnos tenían que explicar, con el ejercicio delante, los procesos seguidos en la resolución del problema.

La entrevista se realizó la semana después de pasar la prueba, siempre que fue posible, aunque a veces, debido a causas ajenas a la investigación, se realizó pasado algún tiempo. En estos casos, el alumno comenzaba haciendo de nuevo el ejercicio sin tener delante lo que había hecho en la prueba anterior. Esta modificación la hacíamos porque creíamos, que pasado algún tiempo, no podían recordar por qué se habían resuelto los problemas de una determinada forma.

El plan seguido para la entrevista fue flexible para permitir: al alumno seguir su propio ritmo de pensamiento y al entrevistador poder perseguir los aspectos que consideraba de interés.

Ninguna de estas dos cosas es fácil de conseguir porque hay muchos factores externos que distorsionan lo previsto.

ÍNDICE

Materiales utilizados para la entrevista.-

- **Ejercicios de los alumnos**, que habían realizado con anterioridad (Prueba escrita), en los que estaban presentes los errores que queríamos analizar.

- **Guiones de entrevistas**, en los que se tenían previstas posibles preguntas que sirvieran para detectar los procesos mentales que habían seguido los alumnos al dar sus respuestas.

Comentarios sobre algunas entrevistas.-

En las entrevistas se han puesto de manifiesto algunos errores conceptuales que ya esperábamos que iban a aparecer como: Traducción Literal, Variable como objeto,... pero también han aparecido otros que no esperábamos como: la Comparación Estática, problemas de rechazo a la igualdad "x=y"....

Antes de empezar a hacer entrevistas, partíamos de la idea de que algunos problemas no los habían resuelto porque los alumnos tenían dificultades de comprensión lectora, debidos a la forma en que estaban redactados los enunciados, pero después pudimos comprobar que no era así ya

ÍNDICE

que **todos** los alumnos durante la entrevista fueron capaces de explicar en qué consistían los problemas, y muchos de ellos fueron capaces de resolverlos utilizando métodos informales.

Los alumnos expresaron, con cierta claridad, que el problema estaba en el paso a escribir las ecuaciones.

(José Manuel, 15 años)

Mientras intentaba resolver el problema del restaurante.

A: Es que yo lo que no sé es cómo poner tres personas en cada mesa, tres por x no. No tiene sentido multiplicar las mesas. Dividir las mesas entre tres, tampoco. Y las personas entre tres igual a las mesas, tampoco. Es que no sé qué poner.

P: A ver, a ver, ¡has dicho tantas cosas!, tres equis no tiene sentido. ¿Por qué?

A: Porque ¿para qué vamos a multiplicar las mesas por tres? Lo que se trata de hacer es poner tres personas en una mesa, o sea, lo que yo pensaba era y / 3 , tres personas es igual a equis partido del total de mesas, como no sabes el total de mesas, sería x / y pero no.

P: ¿Cómo?, ¿cómo? A ver. Pero ¿ x qué es?

A: El número total de mesas.

P: Entonces esto (Y / 3) lo pondrías igual a .....

A: A 1 / x , no, es que no tiene sentido.

P: O sea, 1 / x no tiene sentido, y ¿ 1 / x qué significaría?

A: Pues, sería una mesa.

ÍNDICE

P: ¿Una mesa?

A: ¡Claro!

P: ¿ x qué es?

A: El número total de mesas.

P: O sea que ¿ uno partido por el número total de mesas es igual a una mesa ?

A: No, pero no sé cómo poner, tres personas en cada mesa, es lo difícil de este problema.

En las respuestas de este alumno, vemos que su dificultad está en traducir el enunciado a una expresión algebraica. Como podemos ver, recurre a todas las posibles combinaciones de números con operaciones. Ninguna le convence. No podemos saber cuál es el procedimiento que utiliza para rechazar las expresiones incorrectas.

(Raquel, 15 años)

Resolviendo el mismo problema anterior.

A: No sé cómo llamar por ejemplo... a las personas. No sé cómo poner tres personas en una mesa.

P: ¿ Cuántas incógnitas tienes ?

A: Dos: las personas y las mesas. Por ejemplo, x son las personas e y son las mesas.
Ahora no sé cómo poner....."si se sientan de tres en tres" me parece que pondría: tres equis igual a mesas.

P: ¿ Qué significa tres equis ?

....

ÍNDICE

A: Pero, ¿ cómo lo pongo ?

En esta alumna vemos, que además de los problemas con las variables, su dificultad está en escribir una ecuación que refleje lo que allí pone. No tiene dificultades de comprensión, porque el problema lo ha resuelto por métodos informales, sino en el paso al álgebra.

En el ejercicio del Restaurante es en el que hubo más errores. La mayoría de los alumnos cuando lo resolvieron lo hicieron por métodos informales. Curiosamente, para dar su respuesta, se apoyaban siempre en un dibujo en el que figuraban las mesas y alrededor las personas. Esto parece reflejar un pensamiento muy concreto, bastante lejano al que parece necesario para pasar a una expresión algebraica que incluya dos ecuacioes con dos incógnitas.

Es interesante, también, reflexionar aquí sobre lo que supone, para un alumno, volver a resolver un problema que ya había hecho bien por un método propio. Esta propuesta carece de interés porque lo único interesante habría sido poder comprobar los resultados pero el álgebra, no es para nuestros alumnos un método de comprobación sino un método, que aunque a veces les resulte más fácil, en general les complica más que les ayuda.

ÍNDICE

Creemos que no se deberían hacer sugerencias del tipo:

P: Muy bien, lo has hecho por tanteo. Ahora intentalo por ecuaciones.

Y mucho menos de este otro tipo:

P: Ahora ya no se puede utilizar "la cuenta la vieja" . Hazlo por álgebra.

El alumno sólo dejará de utilizar estos métodos cuando sea consciente de sus limitaciones, sólo en este caso sentirá la necesidad de procedimientos más poderosos. En ese mismo problema, quizá el alumno dejará de usarlos si la respuesta a ese mismo problema viniera dada por números más grandes.

Problemas relacionados con la igualdad x = y .-

No contabamos con que los alumnos tuvieran tantas dificultades al encontrarse con una igualdad de este tipo. Lo descubrimos al realizar entrevistas relacionadas con el " Problema de las Vasijas " pues en este problema como se parte de cantidades iguales en las dos vasijas aparece una expresión de este tipo. En un principio, atribuímos esta dificultad a que los alumnos no identificaban esta expresión

ÍNDICE

con una ecuación de las que tenían costumbre de aparecer en los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Y así, en las entrevistas las preguntas intentaban averiguar algo en esa linea. En ningún momento barajamos la idea de que el obstáculo conceptual estaba en la idea de que diferentes símbolos literales representan diferentes valores (Olivier, A 1988).

(Verónica, 14 años)

Está resolviendo el Problema de las Vasijas.

PROFESOR: ¿Qué dificultad tienes para resolver este sistema?

$$x = y$$
$$y + 26 = 3(x - 26)$$

ALUMNO: Tengo ésta, que para resolver esto como un sistema de ecuaciones aquí tengo " x=y ", entonces para resolver cualquier cosa me da lo mismo x que y, pero luego no.

Interesa resaltar aquí que la alumna está verbalizando que los símbolos diferentes aunque estén igualados no expresan lo mismo.

P: ¿ Cómo que luego no ?

A: Me he explicado mal.

P: No te he entendido.

A: Aquí x es igual a y. No hace falta despejarlo, es como si estuviera despejado. Si lo voy a hacer por sustitución, sustituyo donde haya y pongo x.

A: Pensé que era un problema pero no es ningún problema.

ÍNDICE

....

A: El problema que yo creía tener era que "x=y", y luego como era que al sustituirlo no iba a ser igual poner una incógnita que otra , que iba a dar igual.

P: ¿ Y qué problema tenías para que sí diera igual ?

....

P: Yo digo que a lo mejor has pensado que el problema es que se te anulaba la incógnita, poner x e y indistintamente... entonces da igual poner x que y.

A: Si, pero eso no.

....

P: Y eso ¿Por qué la ecuación "x=y" no te convence como ecuación ?

A: No sé, sería que la vi "como muy desnuda" o algo de eso, no sé , es una tontería.

P: ¿ O es que no es una ecuación ?

A: No. Sí, si "x=y" es una ecuación.

P: ¿ Y por qué no te convence ?

A: (Sonríe) No sé.

....

P: ¿ Puedo interpretar ? A ver si acierto. ¿ Quizás es que necesitas que en las ecuaciones haya números..?

....

A: No, no sé (dudosa y pensativa)...será que, no sé, los habré cogido manía.

P: Porque por ejemplo: en la ecuación "x = 3y" ¿ Se te hubiese ocurrido también lo mismo ?

A: No.

P: No, por eso digo yo, a lo mejor, el hecho de que no haya números...

ÍNDICE

....

P: ...Y como no hay números, necesitas que en las ecuaciones haya números para despejar y para trabajar. Vamos eso es lo que yo había pensado.

A: Es que aquí, no sé "x = 3y", (piensa) es que aquí si "x = y" tienes que remitirte a lo que te he dicho antes ¿ No ? Que una es igual a la otra pero aquí x ya no es igual a y. No es lo mismo, no es la misma relación. ¿ Entiendes lo que te quiero decir ?

P: Entiendo, pero lo que no acabo de entender es por qué con éste no tienes dificultad para trabajar y con éste sí. No termino de entender.

....

A: ¿ ésta ? No, no sé, pero no ...Es lo que te he dicho antes. Es que aquí (primera ecuación) tienes que pensar que los dos sean iguales, pero aquí no es la misma relación de que sean iguales. Es como si me hubieran dado un dato más. No un dato distinto en el problema.

P: ¡ Ah ! ya estoy entendiendo algo, entonces esto ("x = y") es que lo consideras como si no fuese un dato.

A: Si lo considero un dato, pero no me termina de convencer.

P: ¿ No te aporta ninguna información ?

A: Si yo no digo que la información que me aporta sea valiosa para luego el desarrollo del problema, lo que quiero decir es que a lo mejor, puede que sea el número que tú dices, que a lo mejor al ver un número lo ves como más ......

P: ¿ Más concreto ?

A: Si, como que, como si el dato fuera más, de más peso a lo mejor. No sé, es una tontería.

....

Lo más interesante de estos trozos de entrevista es comprobar que por mucho que las preguntas se desvían de lo que allí está pasando y que no permiten a la alumna poner de manifiesto el problema que tiene, en ningún momento acepta que esa igualdad es fácil y en muchos momentos retoma la situación para pretender explicar en qué consiste su problema. Se desaprovechan todas las ocasiones.

No siempre los alumnos actuan así y ante alumnos más inseguros, aunque los obstáculos conceptuales no dejan de manifestarse, verbalmente aceptan cambios en el problema.

(Raul, 15 años)

Cuando le falta una ecuación porque tiene dos incógnitas en el problema de las vasijas, no considera hasta este momento la posibilidad de que "la otra" ecuación sea "x = y" .

P: Tienes "x = y" ¿ ahora ya sabes resolver el sistema ? ¿ O ésta no es una ecuación ?

A: Yo pienso que eso no...

P: Esto no es una ecuación ¿ Por qué ?

A: Porque, primero yo pienso que falta el término independiente y luego que dentro de una ecuación tiene que haber dos incógnitas y aquí tenemos una y aquí tenemos otra. O sea que éste sería el primer miembro y éste el segundo. En una ecuación tendría que ser por ejemplo "3x+y+26 = ..." En un caso podría ser igual que y pero tiene que tener dentro del primer miembro tiene que haber dos.

P: O sea, dentro del primer miembro tiene que haber dos incógnitas ¿ Quieres decir ?

ÍNDICE

A: Sí, x e y.

P: O sea, que esta ecuación no nos sirve tampoco.

A: No.

....

Como vemos este alumno ante el mismo problema y un tratamiento muy parecido por parte de la entrevistadora, enseguida modifica su idea y recurre a algo que suelen hacer todos los alumnos cuando quieren contentar a su profesor, recurren a la **Memorización de Reglas** que les suenan todas parecidas y que no están seguros si será ésta la ocasión de utilizarlas. Así Raúl ante una situación que le desborda intenta pensar qué tienen en común todas las ecuaciones que forman parte de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Recuerda que las dos incógnitas están en el primer miembro y que además hay un término independiente. Y no duda en utilizarlo con la esperanza que así responderá lo que quiere su profesora.

El alumno se resiste a utilizar la igualdad porque en realidad no entiende que el valor de una incógnita es independiente de la letra utilizada y no puede ver que dos letras diferentes estén representando algo igual. No relaciona en ningún momento que esas variables representan números.

ÍNDICE

Cuando la entrevistadora quiere prestarle una ayuda recurre ella misma a apoyar la Memorización de Reglas e insiste de nuevo en la misma idea:

P: Pon esta x en el otro miembro o la y y te quedará "x-y = 0". ¿ Esto lo reconocerías como una ecuación ?

A: Sí, porque ya tiene, o sea por esto, ya sí, porque tiene las dos incógnitas.

P: Claro ya aquí tienes las dos incógnitas, entonces.ya sí, pero esto ("x-y = 0") es lo mismo que esto ("x = y").

A: Sí.

P: ¿ Te das cuenta ? ¿ O no ? ¿ Eh ?. Luego esto sí puede servir como una ecuación, vamos no es que puede servir es que es una ecuación. Entonces, si esto ("x = y") es una ecuación y con esta otra ("y+26 = 3(x-26)") entonces ya lo puedes resolver. ¿ Piensas en alguna razón más por la que creías que esto no era una ecuación ?

A: No.

P: O sea, para ti no era una ecuación porque no tenía la y o aquí no tenía la x o porque no había ningún término independiente ?

A: Bueno, y además es que también pensaba que... O sea no pensaba en que se podía, no pensaba en que se trasladase, entonces lo veía un poco difícil resolver este grupo, o sea este sistema de ecuaciones. Entonces,...digo bueno esto no puede ser..

Curiosamente, cuando el alumno intenta resolverlo, despeja la incógnita en la ecuación estructuralmente más complicada ("y+26 = 3(x-26)"). Esto es un claro síntoma de que a pesar de que aparentemente ha resuelto el problema conceptual que parecía tener , sigue habiendo un profundo

ÍNDICE

rechazo a la ecuación "x = y", aparentemente mucho más fácil.

La entrevista continua así:

P: O sea, que es ordenar el sistema así y despejar la incógnita ahí ("y - 3x + 104 = 0") .... ¿ Y no te atreves a despejarla de aquí ("y - x = 0") ? ¿ Por qué ? ¿ En sustitución se puede despejar de cualquiera de las ecuaciones, o no ?

A: Si.

P: Si, entonces tu has despejado de aquí la y.

A: Si

P: ¿Y de aquí no te atreves a hacerlo, despejando de la otra ecuación? ("x = y"). ¿Qué problema tienes para no despejar de esta ecuación?

A: No sé. Bueno, espera, ahora sustituir la y que siendo positivo y sería igual ... pues a x. Luego donde está la y pasaría la x aquí arriba -3x más 104 igual a cero esto saldría -2x más 104 ....

P: Además, no has tenido mayor dificultad, entonces por qué antes te has quedado un poco parado...

A: Porque, iba primero sustituyendo eso, pero, o sea, no sé me ha venido de pronto diciendo ¡huy que esto es muy difícil vamos a por esto!

P: ¿Y por qué es muy difícil despejar de ahí y menos x igual a cero?

A: No sé, o sea.

P: ¿Por qué has pensado que era más difícil?

A: Porque por el simple hecho de que te saldría y igual a x, entonces digo eso es más difícil, va a ser más....

....

ÍNDICE

Esta resistencia a aceptar que diferentes símbolos literales pueden tener valores iguales y a utilizar la expresión "x = y" en los procesos de resolución de sistemas puede atribuirse a diversos factores de madurez cognitiva, pero pensamos que esta dificultad está estrechamente relacionada con otro tipo de error que es el de la Letra como Objeto.

La entrevistadora no ha sabido indagar cuál es el verdadero problema con que se estaba encontrando este alumno y sigue queriendo trasmitirle lo que le parece muchísimo más fácil, porque ella lo que está viendo es simplemente una igualdad entre variables, que de forma mecánica le van a permitir resolver ese sistema de ecuaciones, naturalmente por sustitución.

La letra como objeto.-

El error que con más frecuencia nos hemos encontrado es el de considerar las letras no como variables sino como objetos (Kuchermann, 1981). Creen que las letras en vez de representar números, representan objetos.

Este error conceptual es el que aparece sin ninguna dificultad en cualquier entrevista. Pero a veces a pesar de

ÍNDICE

ser muy frecuente llega a sorprender:

(Raul, 15 años)

Se está refiriendo aquí al problema de La Parcela.

A: Luego saldría...
Sería esto. El jardín tendría 50, el jardín sería igual a 50 m y el jardín tendría 1 m .

P: Pero vamos a ver, vamos a ver que yo me entere. O sea, ¿ el jardín tiene 50 m y el jardín tiene 1 m ..?

A: No, ¡ Ah ! es verdad ¡ claro !

P: Vamos a ver x. ¿ A qué has llamado x ?

A: A los metros cuadrados que tiene el jardín.

P: ¿ Y y ?

A: Otra vez al jardín.

P: Vamos a ver, o sea, has llamado x a los metros cuadrados que tiene el jardín, y luego y al jardín. Y entonces, has puesto la casa es igual a 25x ¿ Por qué ?

A: 25x porque es, la casa, la casa que es 25.

P: No, la casa no, la piscina.

A: Bueno, sí, la piscina. ¡ Ah ! Claro la x sobraría.

P: ¿ Por qué has puesto 25x ? Piensa a ver, intenta pensar un poquito, a ver qué has pensado, qué has razonado tú para poner ahí la x.

A: Pienso que es que, me he tenido que confundir en cuanto a que x creía que eran metros cuadrados y no metros cuadrados que tiene el jardín.

P: Entonces has sustituido la palabra equis por metros cuadrados. Pues entonces, venga, vamos a pensarlo otra vez. Bueno, ésta ha sido una dificultad, has puesto además, dos variables que significan lo mismo ¿ No ?.
x igual a metros cuadrados que tiene el jardín, e y igual

ÍNDICE

al jardín, y las has trabajado como distintas.

También en esta otra entrevista vemos que para distinguir entre objeto y número este alumno al intentar resolver el problema de las vasijas llame letras diferentes a las dos vasijas, y al número de litros que están contenidos en ellos.

(Pedro, 14 años)

P: ¿ Qué es a y b ?

A: a y b son las dos vasijas.

P: Y ¿ qué es x e y ?

A: x e y son los litros que hay dentro de cada vasija.

También es curioso observar que este obstáculo está tan presente que a veces les hace modificar una explicación correcta por otra que no lo es.

(**Raquel**, 15 años)

Al resolver el problema del Restaurante cuando le preguntan por las incógnitas no duda en decir:

P: ¿ Cuántas incógnitas tienes ?

A: Dos, las personas y las mesas:
x son las personas e y son las mesas.

ÍNDICE

Para poner que se sientan de tres en tres pone en un momento dado 3x y entonces:

P: ¿ Qué significa 3x ?

A: ¡ Ah ! Son las personas.

P: Pero entre el 3 y la x ¿ hay alguna operación o sólamente es una forma de escribir "3 personas" ?

A: Claro, sería una forma de poner "3 personas", pero yo lo interpreté como una multiplicación aunque es una forma de expresar "3 personas".

No está clara , de todas formas, que hubiera entendido que la equis representaba el número de personas, sino que podía pensar que las personas (tomadas aquí como objeto) quedaban multiplicadas por tres. Pero vemos que al traducir la expresión con palabras traduce directamente la incógnita como el objeto que cree representar.

Este error es probable que puede proceder del uso de las letras en aritmética donde realmente se utilizan como etiqueta que acompaña al número (3m significa 3 metros), pero también es probable que proceda de la tendencia a utilizar la inicial del nombre del objeto que varía para designar a la variable (p. ej. m se utilizaría para designar el número de mesas). Algunos alumnos no distinguen entre m mesas y m número de mesas. Y así, leen expresiones tales como "3m" como "tres mesas" en vez de "tres

ÍNDICE

veces el número de mesas".

En todo caso se observa lo poco relacionado que está el uso de las letras con la idea de variable. Este concepto es necesario para realizar la transición desde la aritmética al álgebra y es necesario para hacer un uso significativo de las matemáticas. Como dice Schoenfeld (1988) el concepto de variable es fundamental en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas y sin embargo, la mayoría de las veces se tratan las variables como términos que después de alguna práctica los comprenderán sin ningún problema la mayoría de los alumnos. Las x las y ... se manejan habitualmente de una forma natural, sin tener en cuenta los múltiples significados y usos de los términos que manipulamos.

Generalmente, la notación simbólica se presenta aisladamente y no necesariamente relacionada con un soporte físico y concreto (Orton A., 1987). En el caso de las variables, no se suele partir de la necesidad de utilizarlas, sino que se crea esa necesidad de forma artificial.

Lo que es más curioso es que este problema, que en principio lo tienen sólo los alumnos, muchas veces se traslada al lenguaje de los profesores. Y estos a su vez contribuyen a que el problema permanezca.

Traducción literal.-

En las entrevistas se pone de manifiesto con facilidad la relación que tiene este error conceptual con el tratamiento que dan los alumnos a las letras, tratándolas como si representaran objetos en lugar de números.

Los alumnos suponen que el orden de las palabras en los problemas se corresponde directamente con el orden de los símbolos en la expresión. Parece que la única estrategia que utilizan es la de hacer corresponder mecánicamente el orden de los símbolos en la ecuación y el orden de los símbolos en el problema. (Clement J., 1982)

(Raquel, 14 años)

En el problema del restaurante:

A: Si se sientan tres personas en cada mesa quedan dos personas sin mesa......
$3x+y = 2x$

Previamente ha llamado x a las personas e y a las mesas.

Hay casos más curiosos como el de la alumna que va cambiando el signo que relaciona el 3 con la variable según va creyendo que su expresión no es correcta.

(Beatriz, 14 años)

A: No sé cómo poner tres personas en cada mesa....¿ Puede ser
   3+x ?

P: Piensa un poco..

A: ¿ 3x ? o ¿ x/3 ?
   No sé lo que tengo que hacer...

....

También hay respuestas sorprendentes, muy relacionadas con la variable etiqueta.

(Verónica, 14 años)

Ha llamado, como casi todos los alumnos, x las mesas y no el número de mesas e y las personas, y no el número de personas. Y tiene escrito en su papel: "4x+0 = y" (para escribir una ecuación que exprese: .."Si se sientan de 4 en 4 queda una mesa vacía").

P: ¿ Qué has querido poner aquí ?

A: (Piensa un rato)
   Más cero personas en una mesa...Es que hay una mesa vacía.

....

A: "4x" (4 personas en una mesa)
   Más 0 (1 mesa sin personas)
   Es igual a y (todas las personas)

ÍNDICE

Este error conceptual está, en parte motivado por la forma de trabajar los problemas de enunciado con resolución algebraica, generalmente se trabaja el paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico pero no al revés, esto es, escribir historias o problemas que sean adecuados (Bell A.W., 1981) .

Hay que desarrollar también la capacidad para interpretar expresiones y trabajar la interpretación de símbolos. Ante una expresión incorrecta los alumnos no tienen mecanismos para verificar si es correcta o no.

<u>Comparación estática</u>.-

Se pone de manifiesto cuando al intentar simbolizar una relación entre grupos desiguales se coloca delante del grupo de mayor tamaño el número mayor. Este tipo de error aparece cuando se intenta comparar el tamaño de dos grupos de forma estática.

El signo igual lo utilizan para simbolizar una correspondencia entre dos grupos desiguales y los coeficientes actuan como adjetivos en lugar de como operadores de otro número.

En principio, parece que no se ha comprendido el tamaño relativo de dos grupos y que es debido a una confusión de cantidades pero, cuando preguntamos en la entrevista pudimos comprobar que en todos los casos se sabía perfectamente en que grupo había más cantidad.

La estrategia seguida al cometer este error no está basada como en la traducción literal en mantener el orden de las palabras sino que es una forma razonable de simbolizar su concepción semántica de la situación. (Clement J., 1982).

(Vicente, 14 años)

Después de leer el problema de las vasijas.......

P: Me puedes ir contando lo que dice aquí...

A: Nos dice que hay dos vasijas y que de una de ellas sacamos 26 litros, y que al sacar 26 litros, ésta tiene el triple número de litros que la otra vasija.

P: ¿ Y los 26 litros que has sacado dónde los has metido ?

A: En la otra vasija, he sacado 26 litros y los he puesto en la otra vasija y entonces en la que lo he echado tiene el triple número de litros que la otra.

A: Los 26 litros que se quitan de una vasija se echan a la otra. Esto es, si la vasija es x queda x-26, y ahora dice que estos 26 litros se le echan a la otra y entonces al echarlos ésta tendrá el triple que la otra....Podría ser 3 por x+26. ¿ o no ?

......

P: ¿ Qué relación hay entre x-26 y tres veces x+26 ?

A: Si, una ecuación: x-26=3(x+26)

P: ¿ Son iguales x-26 y 3(x+26) ?

ÍNDICE

A: No en la segunda vasija hay triple cantidad que en la primera ....

....

En la entrevista se mantuvo muy seguro a la hora de dar explicaciones sobre lo que allí estaba ocurriendo. Se apoyó incluso en un dibujo para reforzar sus razonamientos. Todos correctos. Tardó en entender que no era correcta la ecuación y trataba de reforzar sus argumentos con frases del tipo:

A: Como tiene el triple, pues se multiplica por tres y ya está.

TERCERA PRUEBA

Después de comprobar que las mayores dificultades con que se encuentran nuestros alumnos al resolver los problemas de enunciado con resolución algebraica no son los de Comprensión lectora sino de Traducción y que el mayor obstáculo conceptual que tenían era el esquema de la Letra como Objeto, nos pusimos a trabajar estos errores conceptuales pero ya con enunciados más cortos y con menos alumnos.

La tercera prueba consiste en pasar ~~dos~~ dos cuestionarios que además de su valor diagnóstico presentaban un modelo sobre cómo se podían tratar estos temas.

Cuestionario 1.-

Para estudiar con más detalle la traducción pasamos la siguiente prueba, adaptada de la que presentan Lochhead y Mestre (Lochhead 1988):

ÍNDICE

1- Escribe una ecuación utilizando las variables A y P para representar lo siguiente: " Hay 6 veces más alumnos que profesores ". Donde A representa el número de alumnos y P representa el número de profesores.

1'- (Otra versión del problema anterior)
Escribe una ecuación utilizando las variables A y P para representar lo siguiente:" El número de alumnos de esta Universidad es 6 veces el número de profesores ". Utiliza A para designar el número de alumnos y P para designar el número de profesores.

2- Escribe una ecuación utilizando las variables T y F para representar lo siguiente: " En este restaurante por cada 4 personas que piden tarta hay 5 que piden flan". utiliza T para representar el número de tartas y F para representar el número de flanes que se piden.

3- Los pesos están colgados de un muelle y se mide el alargamiento del muelle. Los datos de la tabla son:

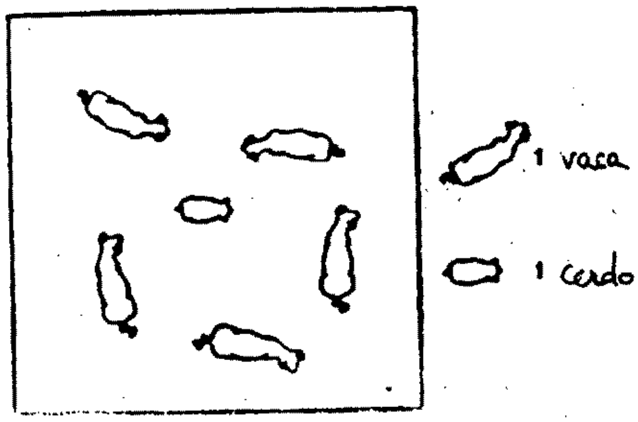
Alargamiento	Peso
3 cm	100 g
6	200
9	300
12	400

Escribe una ecuación que nos permita predecir el alargamiento del muelle (A) dado el peso (P).

4- Escribe una frase que dé la misma información que la siguiente ecuación: "C=4F"

C es el número de camisas que hay dentro de un armario
F es el número de faldas que hay dentro de un armario.

5- Un señor toma una fotografía desde un aeroplano de un campo en el que hay vacas y cerdos. Escribe una ecuación utilizando las letras V y C para escribir la relación entre V el número de vacas y C el número de cerdos que hay en la fotografía.



Se parte de la idea de que las dificultades de traducción no se dan únicamente cuando el enunciado viene expresado con palabras sino que también existen cuando se pide:

- escribir una ecuación que represente una relación entre dos variables dadas en forma de tabla.

- una frase en castellano a partir de una ecuación lineal entre dos variables.

- una ecuación que represente una relación entre dos variables expresada en forma de gráfica mediante un dibujo.

ÍNDICE

Con esta prueba restringimos nuestro estudio a dos tipos de errores:

a) la tendencia a interpretar y actuar de izquierda a derecha cuando se analizan textos y se hace la traducción a enunciados algebraicos (**Traducción Literal**).

b) la confusión entre variables y objetos (**La Letra como Objeto**).

El cuestionario se ha pasado en 1º de BUP a 28 alumnos y en 2º a otros 28. Los resultados los separaremos por ejercicios y por cursos.

Solo están contabilizados los Ejercicios Correctos y los Errores de Traducción.

1- Escribe una ecuación utilizando las variables A y P para representar lo siguiente: " Hay 6 veces más alumnos que profesores ". Donde A representa el número de alumnos y P representa el número de profesores.

	Ej. correctos	Errores traduc.
1º de BUP	46,4 %	35,7 %
2º de BUP	57,1 %	42,8 %

ÍNDICE

Los errores de traducción que aparecen preferentemente son los del tipo: "6A=P", aunque también aparecen: "6+A=P".

1'- (Otra versión del problema anterior)
Escribe una ecuación utilizando las variables A y P para representar lo siguiente: " El número de alumnos de esta Universidad es 6 veces el número de profesores ". Utiliza A para designar el número de alumnos y P para designar el número de profesores.

	Ej. correctos	Errores traduc.
1º de BUP	43,3 %	30,0 %
2º de BUP	63,8 %	19,4 %

Como se puede observar por las tablas hay una clara mejora en los resultados de esta segunda versión. Disminuyendo considerablemente los errores de traducción en 2º curso. Atribuimos esta mejora, además de que la redacción es más correcta, a que la palabra veces se asocia mejor con el signo de multiplicar y que parece que en este enunciado la forma como están ordenadas las palabras favorece la respuesta correcta. Así la respuesta correcta que más aparece es precisamente: "A=6P" (el mismo orden en que se haría la traducción).

ÍNDICE

2- Escribe una ecuación utilizando las variables T y F para representar lo siguiente: " En este restaurante por cada 4 personas que piden tarta hay 5 que piden flan". utiliza T para representar el número de tartas y F para representar el número de flanes que se piden.

	Ej. correctos	Errores traduc.
1º de BUP	0 %	67,8 %
2º de BUP	3 %	64,2 %

El error de traducción que se ha detectado en ambos cursos ha sido el de escribir: "4T=5F"

Hay otra respuesta que no hemos contabilizado como error de traducción pero quizá sí lo sea: "T+1=F"

3- Los pesos están colgados de un muelle y se mide el alargamiento del muelle. Los datos de la tabla son:

Alargamiento	Peso
3 cm	100 g
6	200
9	300
12	400

Escribe una ecuación que nos permita predecir el alargamiento del muelle (A) dado el peso (P).

ÍNDICE

No vamos a tener en cuenta los resultados de este ejercicio, ya que, debido a que tenían muchas dificultades con las relaciones numéricas , no pudimos observar ningún problema relacionado con la traducción.

4- Escribe una frase que dé la misma información que la siguiente ecuación: "C=4F"

C es el número de camisas que hay dentro de un armario.

F es el número de faldas que hay dentro de un armario.

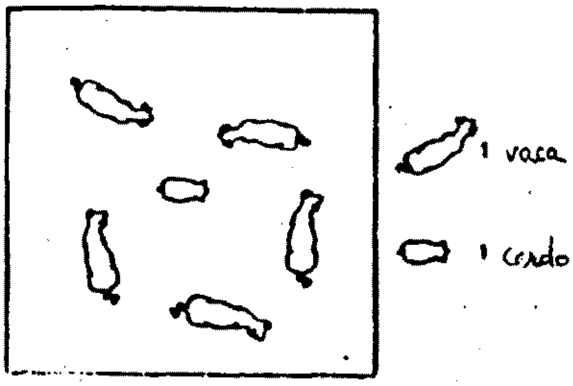
	Ej. correctos	Errores traduc.
1º de BUP	46,4 %	42,8 %
2º de BUP	35,7 %	53,5 %

En este ejercicio se dan respuestas que parecen tener relación muy directa con el hecho de considerar a la variable como un objeto. Por ejemplo respuestas del tipo:

" En un armario las camisas que hay es igual a 4 faldas "

" Hay una camisa por cada cuatro faldas.

5- Un señor toma una fotografía desde un aeroplano de un campo en el que hay vacas y cerdos. Escribe una ecuación utilizando las letras V y C para escribir la relación entre V el número de vacas y C el número de cerdos que hay en la fotografía.



	Ej. correctos	Errores traduc.
1º de BUP	21,4 %	67,8 %
2º de BUP	25,0 %	67,8 %

La respuesta más frecuente fue "5V=1C" que explicaban: "Por cada 5 vacas hay 1 cerdo". Aunque hay otras respuestas curiosas, quizá motivadas por la forma como está enunciado el ejercicio: "5V+1C=6" que explican: "5 vacas más 1 cerdo, total 6 animales". Hay otras respuestas originales y que se repiten en los dos cursos, P. ej.: "V=C+4" que explican: "Para escribir una igualdad he sumado la diferencia entre cerdos y vacas" o "4V=1C" que explican como: "Hay cuatro veces más vacas que cerdos". Como vemos estos últimos alumnos tienen más asimiladas las relaciones aditivas que las multiplicativas.

Lochhead (1988) dice que estas equivocaciones algebraicas se dan en alumnos de todas las edades y nacionalidades. Lo que hace suponer que la forma en que se trabaja el álgebra no permite aprender a interpretar adecuadamente las cadenas de símbolos. Los alumnos no aprenden a leer y escribir en matemáticas. Sin la capacidad para interpretar expresiones, los alumnos no tienen mecanismos para comprobar si un procedimiento en particular es adecuado o no. Tienen que recurrir a la memoria, casi siempre, para resolver un problema.

En el articulo del que hemos sacado la prueba, Lochhead y Mestre sugieren algunas técnicas prácticas para ayudar a los alumnos a superar las dificultades de traducción. Sugieren <u>practicar los procesos de traducción aislándolos de otros aspectos de la resolución de problemas</u>.

Para superar un error conceptual los alumnos deben participar activamente en el proceso, por eso es interesante elaborar un material que provoque conflicto a partir de la inconsistencia de sus propios errores.

Para conseguir provocar el conflicto se puede seguir un proceso de tres pasos:

- Comprensión cualitativa, que consiste en preguntar en que conjunto hay más elementos.

ÍNDICE

- Comprensión cuantitativa que consiste en sustituir las variables por valores particulares.

- Comprensión conceptual que consiste en una vez que están escritas todas las respuestas posibles ir analizándolas una a una y rechazando las que no son correctas.

__Cuestionario-2__.-

Esta prueba se centra en averiguar por qué , los alumnos interpretan que, diferentes símbolos literales necesariamente representan diferentes valores (Küchermann, 1981; Booth, 1984a).

Para estudiar con más detalle qué hay detrás del rechazo a la igualdad "x = y" pasamos la siguiente prueba adaptada de la que aparece en el artículo de Olivier (1988):

1- ¿ Cuándo es cierta la siguiente igualdad ?

$$L+M+N = L+P+N$$

SIEMPRE, A VECES, NUNCA.

2- Si a+b = 4 ¿ Qué valores de **a** y **b** hacen cierta esa igualdad ?

ÍNDICE

3- Si $2m+3p = 20$ entonces $m = 4$ y $p = 4$ es una solución de la ecuación. ¿ Verdadero o Falso ?

4- Resuelve para x e y
$$\begin{aligned} x+y &= 6 \\ 2x+y &= 9 \end{aligned}$$

5- Escribe una expresión algebraica que indique el número total de personas que pueden comer en un restaurante en el que hay mesas grandes (Se pueden sentar 5 personas) y mesas pequeñas (Se pueden sentar 3 personas).

Escribe esa expresión para el caso particular en que haya:

a) 4 mesas grandes y 2 mesas pequeñas.

b) 4 mesas grandes y 4 mesas pequeñas.

Esta prueba se ha pasado a 30 alumnos de 1º de BUP y a 36 alumnos de 2º de BUP. Daremos los resultados por separado en ambos cursos:

1- ¿ Cuándo es cierta la siguiente igualdad ?

$$L+M+N = L+P+N$$

SIEMPRE, A VECES, NUNCA.

	NUNCA	A VECES
1º de BUP	43,3 %	33,3 %
2º de BUP	27,7 %	44,4 %

ÍNDICE

En algunas respuestas se acepta que podría ocurrir "a veces" aunque se rechaza porque dicen que: " Se podría hacer si M fuese igual a P, pero eso no es posible " o " Cuando a P le den el valor de M pero yo creo que a cada valor le tienen que dar una letra. Si se quiere se puede hacer pero a mi me parece incorrecto ".

También es interesante observar que hay respuestas que para expresar "a veces" contestan simultáneamente "siempre" y "nunca".

2- Si a+b = 4 ¿ Qué valores de a y b hacen cierta esa igualdad ?

	a = 2 y b = 2
1º de BUP	83,3 %
2º de BUP	83,3 %

En este ejercicio nuestros resultados no coinciden con los previstos en la prueba, seguramente debido a que la hemos pasado en 1º y en 2º de BUP, que a y b no tomaban simultáneamente el valor 2. Sin embargo, aunque nuestros alumnos si prueban con el dos un alto porcentaje (40 % en 1º y 19,4 % en 2º) no prueban con la pareja (0,4), lo cual

ÍNDICE

indica que todavía el 0 no es un número como los demás para alumnos que van de 14 a 17 años y con cuatro años mínimos de aprendizaje del álgebra. También es interesante observar, que para la mayoría de estos alumnos (90 % en 1º y 69,9 % en 2º), que se supone que ya conocen hasta los números complejos, no existen más números que los naturales, ya que no hacen comprobaciones con otros números.

3- Si $2m+3p = 20$ entonces $m = 4$ y $p = 4$ es una solución de la ecuación. ¿ Verdadero o Falso ?

	VERDADERO	FALSO
1º de BUP	80,0 %	20,0 %
2º de BUP	80,5 %	13,8 %

Las respuestas que contestan: FALSO son debidas a errores en los cálculos. Algunos de los que contestan: VERDADERO hacen algunas objeciones del tipo: " es verdadero porque sale bien, pero hay que poner que m y p valen 4 ", " verdadero, aunque dos letras diferentes no pueden tener el mismo valor " o " es una solución aunque creo que a cada letra habría que ponerle un valor ".

ÍNDICE

4- Resuelve para x e y $\quad x+y = 6$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2x+y = 9$

	BIEN RESUELTO	MAL RESUELTO
1º de BUP	33,3 %	53,3 %
2º de BUP	61,1 %	16,6 %

Ningún alumno mostró sorpresa al obtener el mismo valor para dos letras diferente x e y. Lawler (1981) explica esto aceptando que cuando se resuelven los dos tipos de problemas los alumnos están operando en dos micromundos completamente diferentes y separados: el mundo de la conceptualización y el de los automatismos.

5- Escribe una expresión algebraica que indique el número total de personas que pueden comer en un restaurante en el que hay mesas grandes (Se pueden sentar 5 personas) y mesas pequeñas (Se pueden sentar 3 personas).

Escribe esa expresión para el caso particular en que haya:

a) 4 mesas grandes y 2 mesas pequeñas.

b) 4 mesas grandes y 4 mesas pequeñas.

	CASOS CONCRETOS	CASO GEN. Y CONC.
1º de BUP	50,0 %	20,0 %
2º de BUP	75,0 %	16,6 %

La mayoría de los alumnos que contestan correctamente a todas las preguntas consideran a las variables como si fueran objetos, así escriben correctamente la expresión general: $5x + 3y$ pero añaden que x son las mesas grandes e y son las mesas pequeñas.

Hay expresiones curiosas como: "$5n + 3n$ = número de personas donde n es el número de mesas, que pueden ser grandes o pequeñas" (la sustitución la hace correctamente) o " $T_p = 4p + 2p$, donde p es el número de personas que se pueden sentar en una mesa" (Hace bien la sustitución).

ÍNDICE

CONCLUSIONES

Esta investigación ha pasado por distintas etapas, podríamos decir que hemos ido de lo más difícil a lo más fácil. Pero aquí como siempre, saber qué es lo fácil ha sido lo más difícil.

Ahora que creemos estar más centrados en cómo se debe trabajar, nos damos cuenta de que teníamos que haber sido más modestos: hemos empezado con muchos alumnos, con muchos enunciados, con muchas variables y, en definitiva, con muchas pretensiones.

Para la detección de errores debíamos haber trabajado con menos alumnos. También hemos visto que podíamos precisar y profundizar mejor en los errores, centrándonos en un número menor y eligiendo enunciados menos complejos.

Hemos aprendido que trabajando de forma adecuada con grupos de alumnos se adquiere mucha experiencia sobre su forma de pensar y sobre los procedimientos que utilizan y se avanza mucho en el conocimiento de los obstáculos que les

ÍNDICE

impiden progresar en el aprendizaje.

Prospectiva

Pensamos que sería muy provechoso para los profesores integrar en su trabajo habitual técnicas de diagnóstico y tratamiento de los conceptos y falsos conceptos para que no se produzcan inhibiciones en los alumnos y adquieran más seguridad en el aprendizaje.

La experiencia que hemos adquirido en la realización de entrevistas nos ha parecido muy positiva: porque por una parte ha aparecido ante nosotros como una técnica muy importante para profundizar y conocer las razones de las respuestas de nuestros alumnos y por otra, nos ha servido para reflexionar sobre la interacción que se produce entre el profesor (entrevistador en este caso) y el alumno. Nos ha permitido comprobar en términos generales el "peso " que tienen las opiniones del profesor en nuestros alumnos. Sí no se toma conciencia de ello y se modifica la forma de actuar se pueden producir influencias inhibidoras en su pensamiento, provocando que el alumno responda de la forma que cree que le gusta a su profesor, aunque no esté convencido en el fondo.

También hemos tomado conciencia a partir de las entrevistas de la enorme cantidad de Reglas de Actuación que el profesor tiene asumidas y unas veces "sin querer" y otras

ÍNDICE

"queriendo", dado que proporcionan éxito a corto plazo, trasmite al alumno sin que éste las comprenda contribuyendo con ello a aumentar su confusión.

En el transcurso de esta investigación nos hemos encontrado con algunos de los **Errores Conceptuales** que más inciden en las dificultades que tienen nuestros alumnos en el aprendizaje del álgebra como instrumento para resolver problemas.

Esto nos ha servido para consolidar aún más nuestra opinión de que los errores de los alumnos no hay que verlos como "faltas" que es preciso ocultar y evitar, sino como manifestaciones de su propia forma de pensar que no parecen ser aleatorios y, en general, siguen un modelo consistente.

Por esa razón es fundamental que el profesor los conozca y tome en consideración para elaborar las estrategias de enseñanza adecuadas.

Es muy importante haber constatado, sobre todo a través de las entrevistas, que los **Errores de Traducción** tienen entidad por si mismos y que están relacionados con problemas semánticos y sintácticos del lenguaje algebraico así como con los procesos por los cuales se produce la

ÍNDICE

traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Surgían problemas con la traducción incluso en los casos en que el alumno resolvía bien los problemas utilizando otros procedimientos lo que quería decir que entendía perfectamente el enunciado .

Los resultados de la Tercera Prueba muestran que los errores de Traducción siguen apareciendo aunque el problema venga dado por un dibujo o tabla, son independientes del sistema de expresión elegido para dar la relación entre las variables.

Parece ser además (Lochhead 1988) que estos errores se producen con cierta independencia de la capacidad de manipulación algebraica del sujeto.

También nos hemos encontrado con un modelo de error que llamamos Letra para representar Objetos o Letra como Objeto. Tal interpretación, aunque en algunos casos permite alcanzar soluciones correctas, supone un bajo nivel de respuesta ya que para que alcanzar una comprensión real de los principios del álgebra se requiere al menos que la letra se interprete como incógnita específica, esto es, como un número concreto pero desconocido (Küchemann en Hart, K. M.

ÍNDICE

1981).

Parece ser que la mayoría de los alumnos sigue para los símbolos literales dos esquemas aparentemente independientes: el esquema de la Letra como Objeto que recalca la diferencia entre letras diferentes y que no crea problemas cuando se utiliza para realizar automáticamente manipulaciones rutinarias de símbolos (Skemp, 1971) y el esquema de la Letra como Número Generalizado, que incluye la posibilidad de que símbolos diferentes puedan tener el mismo valor.

Nos parece que en esta contradicción está la base de la resistencia a aceptar la ecuación "x = y" que hemos observado en los alumnos que resolvían el problema de las Vasijas: el esquema de la Letra como Objeto se ha convertido en un obstáculo para el aprendizaje posterior, inhibiendo el esquema de la Letra como Número Generalizado, necesario para comprender y aceptar el significado de las ecuaciones en el proceso de resolución del problema.

Si los símbolos literales no representan números sino nombres de objetos u objetos en sí mismos, la igualdad "x = y" no expresa una relación de cantidades sino una situación cualitativa determinada y por tanto difícil de

ÍNDICE

aceptar junto a otra expresión en la que los números hacen más evidente su carácter de ecuación.

Este error conceptual se puede corregir trabajando adecuadamente el concepto de variable y proporcionando y discutiendo experiencias en las que se contraste la manipulación de símbolos, que puede hacerse con el esquema de Letra como Objeto, con el significado de estos símbolos correspondiendo a variables.

Otra estrategia de Traducción que hemos encontrado es la que hace corresponder mecánicamente el orden de los símbolos en la ecuación con el orden de las palabras en el problema (Traducción Literal). Es una estrategia sintáctica, en el sentido de que el único análisis de los símbolos que implica es el mantenimiento del orden, apoyado generalmente en la concepción de la Letra como Objeto. Es importante por el peso que tiene entre las respuestas de nuestros alumnos.

La Comparación Estática nos apareció en el problema de las Vasijas y allí lo calificábamos como error de Inversión, pues se manifiesta en una inversión de los coeficientes que aparecen en la ecuación. Esto también se produce a veces cuando realizan Traducción Literal.

Es interesante reflexionar sobre el significado de este error contrastándolo con el proceso que debe seguirse cuando se escribe la ecuación correcta. En este caso, la clave está en la capacidad para inventar una operación que restablezca el equilibrio, roto en el problema de las Vasijas por los cambios producidos al echar agua de una vasija en la otra; en este caso para restablecer la igualdad con la que tiene más cantidad hay que multiplicar por tres el número de litros de la que tiene menos cantidad.

Esto es importante porque la igualdad no está en la realidad hay que crearla con la ecuación. Hay que forzar la realidad para obtener la ecuación. Esto es lo difícil de asumir por los alumnos y es donde está la clave de esa ecuación.

El alumno entiende, como se ve en la entrevista, cuál es la vasija que tiene mayor cantidad de litros, pero no comprende que el fundamento de la ecuación que tiene que escribir está en restablecer la igualdad entre las cantidades de agua de las dos vasijas, modificando, mediante la multiplicación por el número tres, las cantidades que se dan en la realidad . Se limita a expresar, de alguna forma, lo que "ve" y coloca el factor tres en el término mayor, siguiendo para ello un proceso que tiene algo de razonable.

ÍNDICE

Todas estas formas de pensar "equivocadas" están profundamente asentadas en nuestros alumnos y ofrecen gran resistencia a dejarse sustituir por otras. Recordemos las entrevistas de Raúl y Verónica con la expresión "x = y" .

Es muy posible que en una misma persona coexistan formas de pensar contradictorias, una propia y otra tomada del profesor pero no aceptada en el fondo. El que se manifieste una u otra depende de las circunstancias pudiendo realizarse cambios entre las dos.

El hecho de que se "aprenda" una nueva idea no garantiza que se abandonen las viejas ideas, dependiendo su utilización de si el nuevo método es más satisfactorio en las nuevas situaciones que el propio

Enseñar a un alumno un método no garantiza que su propio método intuitivo no prevalezca en una situación posterior, por tanto se debe procurar que lòs alumnos practiquen suficientemente estos procesos de traducción aislándolos de otros aspectos de la resolución de problemas y además es preciso realizar ejercicios para que el alumno tome conciencia de sus propios errores. Sólo es posible un dominio completo cuando se han enfrentado con sus ideas incorrectas y entienden cuál es su origen.

No basta con que escriba la ecuación apropiada, hay que pedirles comprobaciones de sus respuestas para provocar las contradicciones que resultan de sus falsos conceptos.

Las clases deberán ser un lugar de discusión donde se confronten las distintas concepciones que tienen los alumnos y el papel de los profesores deberá consistir en hacer de moderadores para permitir que se manifiesten los diferentes puntos de vista. Los profesores tienen que ser capaces de proponer cuestiones que mantengan viva la discusión durante el tiempo suficiente para que la razón llegue a prevalecer.

Se corre el riesgo de interrumpir la forma propia de pensar de los alumnos por criterios de autoridad del profesor o por falta de tiempo. Esto lleva en muchos casos a **desarrollar** estrategias de **Memorización de Reglas** que **contribuyen** a aumentar la confusión.

Cuando los alumnos resuelven los problemas por métodos personales e intuitivos <u>no debemos impedirles que los utilicen</u> porque estos métodos muestran sus conocimientos matemáticos y es en ellos en lo que debemos apoyarnos para

ÍNDICE

hacerles progresar en el aprendizaje. Sólo podremos convencerles de las ventajas de un nuevo método proporcionándo las experiencias adecuadas que les permitan comparar. Aquí no sirven los argumentos de autoridad. La aceptación de métodos estándar cuando no están aún suficientemente asumidos, empobrece su pensamiento y les impide tener la confianza y seguridad necesaria para asumir el reto de resolver los problemas.

No podemos terminar sin incluir algunas reflexiones sobre otros aspectos de la enseñanza del álgebra que de alguna manera encuadren el tema que hemos tratado en esta investigación. Las dificultades de traducción no son más que una parte de toda una serie de puntos de conflicto o barreras que inciden en el aprendizaje del álgebra. Algunos de estos son:

El **concepto de variable** que está estrechaménte relacionado con el hecho de que el álgebra es un lenguaje por el que expresamos proposiciones generales y que incide muy directamente en los problemas de traducción. Es muy importante tener en cuenta la expresión en el propio lenguaje del alumno, por el que también se expresan generalizaciones, de modo que la adquisición de las formas de expresión del

ÍNDICE

lenguaje algebraico debe apoyarse y ser un desarrollo de la expresión en el suyo.

Las dificultades de compresión del concepto de variable se ponen de manifiesto por la confusión que muestran los alumnos en la utilización de letras para representarlas. Habitualmente dan a las letras distintos significados, más o menos alejados del correcto, según sea su nivel de comprensión. Algunos de estos significados (variable objeto) nos los hemos encontrado en esta investigación.

Solo una didáctica que tenga en cuenta, entre otras cosas, la complejidad del concepto y las distintas formas de interpretación que pueden utilizar los alumnos, puede ser eficaz.

La relación del álgebra con la aritmética, dado que en el álgebra se utilizan los mismos símbolos (las operaciones, la igualdad, los paréntesis) pero, a veces, con un significado diferente al que se utilizan en aritmética.

El aprendizaje de las reglas de manipulación para transformar las expresiones algebraicas, también estrechamente relacionado con el aprendizaje de la aritmética.

ÍNDICE

La dificultad en el **establecimiento y resolución de ecuaciones** que es un aspecto por el que caracterizan al álgebra nuestros alumnos y que está relacionado con el concepto de variable y con la manipulación de expresiones.

Estos, junto con las dificultades de traducción y otros factores (como el nivel de desarrollo del alumno o el aprendizaje de otras partes de las Matemáticas), **constituyen** los nudos de una red entre los cuales se establecería un entretejido de relaciones y dependencias que en conjunto es lo que constituye el álgebra desde el punto de vista del aprendizaje a estos niveles.

Este punto de vista a nosotros nos parece muy importante y pensamos que hay que tenerlo muy presente, huyendo de todo planteamiento lineal y simplificador, tanto en el tiempo como en el espacio - el espacio del aprendizaje de las matemáticas -, cuando trabajamos para enseñársela a nuestros alumnos.

Todas estas conclusiones nos llevan necesariamente a intentar un cambio en la forma de trabajar el álgebra con nuestros alumnos. En este momento estamos elaborando un material de enseñanza con el que pretendemos tener en cuenta las consideraciones que aquí hemos hecho.

ÍNDICE

Madrid Septiembre de 1989.

ÍNDICE

BIBLIOGRAFIA

ÍNDICE

La Bibliografía fundamental que hemos consultado está recogida en la memoria de Inmaculada Fuentes y la incluimos a continuación.

Añadimos la referencia de algunos documentos que conocimos después de que Inmaculada Fuentes elaborase su relación:

DONALD, B. (1988). Constructivism a Theoretical Revolution for Algebra. Mathematics Teacher, Noviembre 1988, págs. 624 a 631.

LIEDTKE, Werner (1988). Diagnosis in Mathematics: The Advantages of an Interview. Arithmetic Teacher, Noviembre 1988, págs. 26 a 29.

ORTON, A. (1987). Learning Mathematics. Issues, theory and classroom practice. Cassell Education. Londres.

OLIVIER, A. (1988). The construction of an algebraic concept through conflict. Actas del XII P.M.E. Hungría.

PIMM, D. (1987). Speaking Mathematically. Communication in Mathematics Clasrooms. Routledge & Regan Paul. Londres y New York.

RUDNITSKY, A. et al. (1981). Talking Mathematics with Children. Arithmetic Teacher 28, Abril 1981, págs. 14 a 17.

SCHOENFELD, A. et al. (1988). On the Meaning of Variable. Mathematics Teacher, Septiembre 1988 págs. 420 a 427.

ÍNDICE

3.- FASES DE LA INVESTIGACION

I) Fase inicial

La primera fase de la investigación ha consistido en la recopilación de trabajos realizados en la misma línea, consulta de bibliografía adecuada, y toma de contacto con otros investigadores.

La búsqueda de documentación la he centrado fundamentalmente en los siguientes apartados:

- Proyectos Generales de Aprendizaje de Matemáticas, (Anexo 1).
- Trabajos realizados sobre Resolución de Problemas con Enunciado Gramatical: "Word Problem", (Anexo 2).
- Lenguaje y Matemáticas, (Anexo 3).
- Aprendizaje del Algebra en general, (Anexo 4).
- Enseñanza por Diagnóstico, (Anexo 5).
- Psicología General, (Anexo 6).
- Actas de Congresos Internacionales, (Anexo 7).

ÍNDICE

ANEXO I

PROYECTOS GENERALES DE APRENDIZAJE DE MATEMATICAS.

ÍNDICE

PROYECTOS GENERALES DE APRENDIZAJE DE MATEMATICAS

BELL, Alan W. (1976). The Learning of General Mathematical Strategies. Tesis Doctoral. Universidad de Nottingham.

BELL, Alan W. and GALVIN, P. (1977). Aspects of Difficulties in the Solution of Problems Involving the Formulation of Equations. Shell Centre, 1977.

BELL, Alan W. (1980). The Nature of Mathematical Learning Some Comparisons with Language. Shell Centre, 1980

BELL, Alan and SHIU, C. (1981). Diagnostis Teaching in Mathematics. Part 1 of SSRC Research Project "Diagnostic Teaching and the Acquisition of General Strategies in Mathematics". Shell Centre, 1981.

BELL, Alan; ROOKE, D. y alt. (1981). Secondary School Algebra (South Notts Project). Shell Centre 1981.

BELL, Alan; SWAN, M. y alt. Diagnostic Teaching. Teaching for Long Term Learning. Shell Centre.

BELL, Alan; COSTELLO, J and KUCHEMANN, D. (1983). A Riview of Researcn in Mathematical Education. Parte A: Research on Learning and Teaching. Edit. NFER-NELSON

De este informe he puesto especial atención en los capítulos 6 y 11, págs. 96-170, 273-291.

BOOTH, Lesly y alt. (1984). Children's Strategies and Errors: Algebra. (CSE). A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project. (S.E.S.M.). Edit. NFER-NELSON.

ÍNDICE

DICKSON,L y alt.(1984). Children Learning Mathematics: A Teacher's guide to recent research. Halt Education for the School. Covnal,1984.

FREUDENTHAL,Hans.(1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. D.Reidel Publishing Company.

GINSBURG,P.(ed.) (1983). The Development of Mathematical Thinking. Edit. Academic Press.

GRUPO CERO.(1987). De 12 a 16. Consorci d'Editors Valencians (Mestral libros).

HART,K. (ed.). Children's Understanding of Mathematics: 11-16. A Report of Concepts in Secondary Matmematics and Science (CSMS).(1981)

KRUTETSKII,V.A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in School Children. Translated from the Russian by Teller,Joam. University of Chicago Press,1976.

NICHOLS,E.(1976). Project for the Mathematical Development of Children (PMDC). Florida State University

ÍNDICE

ANEXO II

TRABAJOS REALIZADOS SOBRE RESOLUCION DE PROBLEMAS CON ENUNCIADO GRAMATICAL: "WORD PROBLEM".

TRABAJOS REALIZADOS SOBRE RESOLUCION DE PROBLEMAS CON ENUNCIADO GRAMATICAL: " WORD PROBLEM".

BELL,Alan.(1980). Developmental Studies in the additive composition of numbers. Recherches en Didactique des Mathematiques.1(1); 113-141.

BELL,Alan.(1984). Choice of operation in verbal Arithmetic Problems: the effects of number size, problem structure and context. Educational Studies - in Mathematics.115(2); 129-147.

BOTH,Lesly.(1982). Getting the answer wrong. Mathematics in School.11(2); 4-6.

CALDWELL,Janet H. and GOLDIN,G.(1979). Variables affecting word problem difficulty in elementary school Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education. 10(5);323-366.

CARPENTER,Thomas y alt.(1980). Solving Verbal Problem: results and implications from National Assessment Arithmetic Teacher. 28(1); 8-12.

CARPENTER,Thomas;MOSER,J. y alt.(1981). Problem Structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. Journal for Research in Mathematics Education. 12(1); 27-39.

CLEMENTS,M.A.(1980).Analyzing children's errors on written Mathematical tasks. Educational Studies in Mathematics. 11(1); 1-21.

ÍNDICE

CLEMENTS,M.A.(1982). Careless errors made by sixth-grade children on written Mathematical tasks. Journal for Research in Mathematics Education. 13(2); 136-144.

CLEMENT, John.(1982). Algebra word problem solutions: thought processes underlying a common misconception. Journal for Research in Mathematics - Education.13(1); 16-30.

DE CORTE, Erik and WERSCHAFFEL.Lieven.(1981). Children's solution Processes in Elementary Arithmetic Problem:Analysis and Improvement.Journal of Educational Psychology. 73(6); 765-779.

DE CORTE,Erik y alt.(1982). First graders'solution processes in elementary word problem. Proceeding of 6th International Conference of PME - Antwert; 91-96.

DE CORTE, Erik and VERSCHAFFEL,L.(1985). Writing - number sentences to represent addition and subtraction word problems. Proceeding of 7th Annual Meeting of PME-NA, Columbus Ohio; 50-76.

DE CORTE,Erik and VERSCHAFFEL,L.(1985). Beginning - first grader's initial representation of Arithmetic word Problems. The Journal of Mathematics Behaviour. 4(1);3-21.

DE CORTE, Erik y alt.(1984). The influence of rewording verbal problem on children's problems representation and solutions. Proceeding of 8th

International Conference of PME. Sydney. 276-282.

DE CORTE,Erik and VERSCHAFFEL,L.(1978). The Effect of Semantic structure on first graders'strategies - for solving addition and subtraction word problems Journal for Research in Mathematics Education, 18 (5); 363-381.

HIEBERT,James; CARPENTER,T. and MOSER,J.(1982). Cognitive development and children's solutions to verbal arithmetic problems. Journal for Research in Mathematics Education.13(2); 83-98.

HUNTER,Balew and CUNNINGHAM,L.(1983). Word Problems - Solving: Diagnosis and treatment. Proceeding of - 5th Annual Meeting of PME-NA. Montreal.

JERMAN,Max.(1973). Problem length as a structural variable in verbal arithmetic problems. Educational Studies in Mathematics.5(2); 109-123.

JERMAN,Max and SANFORD,M.(1974). Linguistic and computational variables in problem solving in elementary Mathematics. Educational Studies in Mathematics 5(4);317-362.

KAPUT,James.(1986). Quantity structure of Algebra word problems: a preliminary analysis. Proceeding of - 8th Annual Meeting of PME-NA.East Lausing,Michigan 114-119.

LOCHHEAD,Jack and MESTRE,J.P.(1988). From Words to Algebra: Mending Misconceptions. Yearbook, 1988. - N.C.T.M.; 127-135.

ÍNDICE

EJERCICIOS DE LA PRIMERA PRUEBA

ÍNDICE

NEWMAN,Anne.(1977). An Analysis of sixth-grade pupils' errors on written Mathematical tasks. Research in Mathematics Education in Australia.Melbourne:ACER In CLEMENTS,M.A. and FOYSTER,J.(Eds); 31-43.

RICHARD,J.F. and ESCARABAJAL,J.C.(1983). Comprehension and solution processes in word problem solving. - Proceeding 7th International Conference of PME,Rehovot. 130-135.

ROSNICK,Peter.(1981). Some misconceptions concerning - the concept of variable. Mathematica Teacher,74 - 418-420.

SILVER,Edward.(1979). Student perceptions of relatedness anong Mathematical verbal problems. Journal for Research in Mathematics Education.10(3); 195-210.

TEUBAL,Eva and NESHER,P.(1983). Order on mention Vs. - order of events as determining factors in additive word problems: a develpmental approach. Proceeding of 7th International Conference of PME,Rehovot. 124-128.

UNDERHILL,Robert.(1986). The effect of manipulatives - and oral problems delivery on first grade children's addition story problem solving success.Proceeding of 8th Annual Meeting of PME-NA,Michigan, 48-52.

WATSON,Ivan.(1980 . Investigating errors of beginning Mathematicians. Educational Studies in Mathematics 11(3); 319-329.

ÍNDICE

ANEXO III

LENGUAJE Y MATEMATICAS

ÍNDICE

LENGUAJE Y MATEMATICAS

AUSTIN,J.L. and HOWSON,A.G.(1979). Language and Mathematical Education. Educationa Studies in Mathematics.10(2);161-197.

CALL RUSSELL,J. and WIGGIN NEAL,A.(1966). Reading and Mathematics. Mathematics Teacher,59;149-157.

CAUTY,André.(1984). Tropes et Figures du Discours Mathematique. Recherches en Didactique des Mathematiques.5(1);81-128.

DUMONT,Bernard.(1982). La influence du "decor" et du langage dans des épreuves de type "logique" portant apparemment sur l'implication. Educational Studies in Mathematics.13(4);409-429.

GOLDIN,Gerald.(1983). Levels of Language in Mathematical Problem Solving. Proceeding of 5th Annual Meeting of PME-NA, Montreal. 112-128.

LABORDE,Colette.(1979). The "determination" in the Language used in the Mathematics Class-room. Proceedinh of 3rd International Conference of PME, Warwick; 135-137.

LABORDE,Colette.(1982). Deux codes en Interaction dans l'enseignement Mathematique:langue naturelle et ecriture symbolique. Recherches en Didactique des Mathematiques.4(2);199-203.

LAMB,Charles E. and ZEHAVI,N.(1982). Elementary teachers'knowledge of Mathematical Vocabulary.Proceeding of 6th International Conference of PME. Antwert; 103-107.

ÍNDICE

MACKERNAN,Jonathan.(1984). Weigh the word. Mathematics Teaching,109; 50-51.

NICHOLSON,A.R.(1977). Mathematics and Language. Mathematics in Scool.6(5); 32-34.

NICHOLSON,A.R.(1980). Mathematical Literacy. Mathematics in Scool. 9(2);33-34.

OTTERBURN,Margaret and NICHOLSON,A.R.(1976). The Language of (CSE) Mathematics. Mathematics in Scool. 5(5);18-20.

WAGNER,Sigrid.(1979). Mathematical variables and Verbal "variables" an essential difference. Proceeding of 3rd International Conference of PME. Warwick; 215-216.

ÍNDICE

ANEXO IV

APRENDIZAJE DEL ALGEBRA EN GENERAL

ÍNDICE

APRENDIZAJE DEL ALGEBRA EN GENERAL

BOOKER, G. (1987). Conceptual Obstacles to the Development of Algebraic Thinking. Proceeding of eleventh Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education; 275-281

CARPENTER, Thomas and MOSER, J. (1979). The development of addition and subtraction concepts in young children. Proceeding of 3rd International Conference of PME. Warwick; 40-47.

CARPENTER, Thomas and MOSER, J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. Journal for Research in Mathematics Education. 15(3), 179-202.

FILLOY, E. (1986). Teaching Strategies for Elementary Algebra and the Interrelationship between the development of Syntactic and Semantic Abilities. Proceeding of 8th Conference of the Internacional group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter. 108-113.

FILLOY, E. (1987). Modelling and the Teaching of Algebra. Proceeding of the eleventh Conference of the Internacional group for the Psychology of Mathematics Education; 295-300.

FREUDENTHAL, H. (1974). Soviet Research on teaching Algebra at the lower grades of the elementary school. Educational Studies in Mathematics. 5(4), 391-412.

GALLARDO, A and ROJANO, T. (1986). Common Difficulties in the learning of Algebra Among Children displa ying Low and Medium Pre-Algebraic Proficiency - levels. Proceeding of the tenth Conference of - the Internacional group for the Psychology of - Mathematics Education;301-307.

HERCOVICS,Nicolas.(1979). The Understanding of some Algebraic Concepts at the Secondary level. Proceeding of 3rd International Conference of PME, Warwick; 92-107.

HERCOVICS,Nicolas.(1980). Constructing meaning for - linear equations: a problem of representation.- Recherche en Didactique des Mathematiques.1(3), 351-385.

HERCOVICS,N. and KIERAN,C.(1980). Constructing meaning for the concept of equation. Mathematics - Teacher.78(8);572-580.

HERCOVICS,N. y alt.(1987). La pensée algoritmique - dans l'initiation a l'algebra. Proceeding of - the eleventh Conference of the Internacional - group for the Psychology of Mathematics Education.

KAPUT,J.(1987). Algebra Papers: A Representational - Framework. Proceeding of the eleventh Conference of the Internacional group for the Psychology of Mathematics Education. 345-354.

KUCHEMANN,Dietmar (1978). Children's understanding - of numerical variables. Mathematics in Scool. 7 (4); 23-26.

ÍNDICE

MATZ,M.(1979). Toward a process model for high School Algebra Errors. Cap.2 de : Intellingent Tutoring Systems. Edit. Academia PRESS,1982; 25-51.

NORMAN,F.(1987). A Psycholinguistic prespective of Algebraic Language. Proceeding of the eleventh Conference of the Internacional group for the Psychology of Mathematics Education. 324-330.

PUTMAN,R.(1987). Understanding Sign Change Transformations. Proceeding of the eleventh Conference of the Internacional group for the Psychology of Mathematics Education. 338-343.

ROJANO,T.(1986). Learning and Usage of Algebraic Syntax its Semantics Aspects. Proceeding of the eigth Conference of the Internacional group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter. 121-125.

ROSNICK,P. and CLEMENT,J.(1980). Learning without understanding:the effect of tutorig strategies on Algebra misconceptions. Journal of Mathematical Behaviour.3(1);3-27.

SLOBODA,J. and ROGERS, D.(1987). Cognitive Processes in Mathematics. Edit. Clarendon Press; 169-204.

YEARBOOK 1988. The Ideas of Algebra. National Council of Teachers of Matematics. COXFORD,A. and SHULTE,A. (ed.)

PROBLEM SOLVING

CLEMENT, John (1983). Use of analogies and spatial transformations by experts in solving mathematics problems. Proceeding of 5th Annual Meeting of PME-NA, Montreal. 101-111.

EKENSTAN, A. and GREGER, K. (1983). Some aspects of children's ability to solve mathematical problems. Educational Studies in Mathematics. 14(4) 369-381.

SILVER, Eduard. (1981). Recall of Mathematical problem information: solving related problems. — Journal for Research in Mathematics Education 12(1); 54-64.

SILVER, E. and THONSON ALBA, G. (1984). Research Perspectives on Problem Solving in Elementary School Mathematics. The Elementary School Journal. 5(5); 529-545.

WATSON, F.R. (1979). Listening-in to problem solving. Proceeding of 3rd Conference of PME, Warwick; 217-220.

ANEXO V

ENSEÑANZA POR DIAGNOSTICO

ÍNDICE

ENSEÑANZA POR DIAGNOSTICO

BELL, Alan. (1982). Diagnosing Students'Misconceptions. Australian Mathematics Teacher, 38(1).

BELL, Alan. (1982). Treating Students'Misconceptions. Australian Mathematics Teacher, 38(2).

BELL, Alan and PURDY, David. (1986). Diagnostic Teaching 1. Mathematics Teaching, 115; 39-41.

BELL, Alan. (1986). Diagnostic Teaching. 2 Developing conflict discussion lessons. Mathematics Teaching 116; 26-29.

BELL, Alan. (1987). Diagnostic Teaching. 3 Provoking Discussion. Mathematics Teaching, 118; 21-23.

BELL, Alan; BREKKE, G. and SWAN, M. (1987). Diagnostic Teaching. 4 Graphical Interpretation. Mathematics Teaching, 119; 56-59.

BELL, Alan; BREKKE, G. and SWAN, M. (1987). Diagnostic Teaching. 5 Graphical Interpretation. Teaching styles and their effects. Mathematics Teaching, 120; 50-57.

BELL, Alan; BREKKE, G. and SWAN, M. (1987). Diagnostic Teaching: 6 ¿ can the same material be used with classes of diferent ability?. Mathematics Teaching, 121; 60-62.

GINSBURG, Herbert. (1981). The Clinical Interview in Psychological Research on Mathematical thinking: Aims Rationales, Techniques. For the Learning of Mathematics, 1(3), 4-11.

ÍNDICE

SWANSON, David y alt. (1981). The Clinical Interview: Validity, Reliability and Diagnosis. For the Learning of Mathematics, 2 (2) ; 31-38.

ÍNDICE

ANEXO VI

PSICOLOGIA GENERAL

PSICOLOGIA GENERAL

CARRETERO,Mario y MADRUGA,Juan A. (1984). Lecturas de Psicología del Pensamiento. Alianza Editorial - Psicología. Madrid,1984.

CARRETERO,M; PALACIOS,J y MARCHESI,A.(1985). Psicología Evolutiva. Tomo 3: Adolescencia,Madurez y Senectud. Editorial Alianza Psicología.Madrid,1985

CHOAT,Ernest.(1981). Understanding in joung children's Mathematics. Mathematics in School,10(2),18-21.

COLLIS,Kevin F. La Matemática Escolar y los estadios del desarrollo. Traducción de Pablo del Rio. Infancia y Aprendizaje (1982); 19-20,39-74.

DELVAL,Juan (1976). La Epistemología genética y los programas escolares (1). Cuadernos de Pedagogía, 13;12-15.

FLAVELL,J.(1981). La Psicología Evolutiva de Jean Piaget. Edit. Paidos.

GILLIERON,Christiane. El Pensamiento del Adolescente. Traducción de Isabel Solé.(1979). Revista Totus Homo,9 ; nº: 1-2-3, 36-53.

INHERDER,Barbel y PIAGET,Jean.(1972). De la lógica del niño a la lógica del adolescente. Edit. Paidos. Madrid,1972.

MAYER,Richard.(1985). El futuro de la Psicología Cognitiva. Versión Española de MALDONADO RICO,A.Edit. Alianza Psicología. Madrid,1985.

ÍNDICE

MAYER, Richard.(1986). Pensamiento, Resolución de Problemas y Cognición. Edit. Paidos. Madrid,1986.

MORENO,Amparo.(1986). El Desarrollo Psicológico del Adolescente. Cuadernos de Pedagogía,133; 4-8.

PALACIOS,Jesús;MARCHESI,A. y CARRETERO,M. (1984). Psicología Evolutiva. Tomo 2: Desarrollo cognitivo y social del niño. Editorial Alianza Psicología.Madrid,1984.

POZO,Juan I. y CARRETERO,Mario.(1986). Desarrollo Cognitivo y Aprendizaje Escolar. Cuadernos de Pedagogía,133;15-19.

ÍNDICE

ANEXO VII

ACTAS DE CONGRESOS INTERNACIONALES

ÍNDICE

Actas de Congresos Internacionales

-The Fourth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Berke ley California, 1980.

-The Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education; Gre noble 1981.

-The Sixth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Uni- versitaire Instelling Antwerpen. Bélgica 1982.

-The Seventh Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. The - Weizmann Institute of Science Rehovot, Israel 1983

-The Eighth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Sid- ney Australia 1984.

-The Ninth Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education, State University of Utrecht The Netherlands 1985.

-The Tenth Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education. London University 1986.

-The Eleventh Conference of the International --- Group of the Psychology of Mathematics Education. Montreal Canada 1987.

-The Fifth Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education -North American Chapter. Universitè de Montreal, Quebec 1983.

ÍNDICE

-The Sixth Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education -North American Chapter. Madison Wisconsin 1984

-The Seventh Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education- North American Chapter.Columbus University Ohio 1985.

-The Eigth Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education -North American Chapter. East Lansing Michigan 1986.

-II Jornadas Internacionales de Psicología y Educación. Infancia y Aprendizaje. Madrid 1986.

-The Thiry-eigth CIEAEM meeting: Mathematics for those between 14 and 17 is it really necessary? Southamton 1986.

ÍNDICE

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN CADA UNA DE LAS PRUEBAS.

ÍNDICE

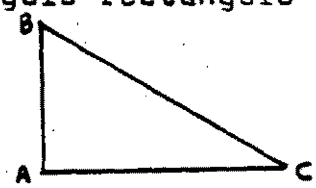
PROBLEMAS DE LA PRUEBA INICIAL

Grupo A

1) Una torre A es 20 m más alta que otra torre B, y ésta es 40 m más baja que una tercera torre C. La suma de las alturas de las tres torres es 420 m. Hallar la altura de cada torre.

2) Tenemos varios conejos y varias jaulas. Si ponemos un conejo en cada jaula nos queda un conejo sin jaula. Si ponemos dos conejos en cada jaula nos queda una jaula vacia. ¿Cuántos conejos y cuántas jaulas hay?

3) En el triángulo rectángulo de la figura



con centro en C y radio AC se traza un arco que corta a la hipotenusa en M. Con centro en B y radio BM se traza otro arco que corta al cateto BA en N. Dibuja los segmentos AM y NM. ¿Cómo es la suma de las longitudes AC y BM comparada con la hipotenusa?

ÍNDICE

Grupo B

1) La suma de las alturas de tres edificios es 420 m. El más alto mide 40 m más que el más bajo, y el mediano 20 m menos que el más alto. ¿Cuánto mide cada uno de los edificio?

2) La cola de un pez pesa 4 kg; la cabeza pesa tanto como la cola y medio cuerpo, el cuerpo pesa tanto como la cabeza y la cola juntas. ¿ Cuánto pesa el pez?

3) La caja de un juego contiene figuras en forma de triángulo, círculo, cuadrado y rectángulo. Cada figura puede ser roja, verde, o amarilla. Todas ellas se presentan en dos tamaños: grande y pequeño. ¿Cuántas figuras tiene la caja?

Grupo C

1) El edifico A es mayor que el edificio B en 40 m y el C es menor que el A en 20 m. La suma de las alturas de los tres edificios es 420 m. Hallar la altura de cada — edificio.

2) De acuerdo con el plan de una fábrica - de muebles deben construirse 48 mesas cada día. Sin embargo, se hicieron dos mesas - más cada día de las que habían sido estipuladas en el plan, resultando que,tres dias antes del final, quedaban solamente 100 mesas por hacer. ¿Cuántos dias tenían que - trabajar según el plan inicial?¿Cuántas mesas tenía que hacer la fábrica?

3) En un cuadrado ABCD de 5cm de lado,se - toma un punto M en el lado AB de modo que AM mida 1,5 cm; y un punto N en el lado CD tal que el segmento CN mida 1 cm.Se une M con N y por A se traza una paralela a MN. Dibújalo e indica qué clase de polígo es - cada una de las partes en que ha quedado - dividido el cuadrado.

ÍNDICE

Grupo D

1) La suma de las alturas de tres torres es 420 m. La torre de altura media es 20 m mayor que la torre más baja y 20 m menor que la más alta. ¿Cuánto mide cada una de las torres?

2) Una madre, con sus dos hijos, sale de compras gastando cada uno cierta cantidad de dinero. Sabemos que la madre y el hijo gastan 4.800 Pts; el hijo y la hija juntos gastan 4.400 Pts; la madre y la hija gastan entre las dos 5.200 Pts .¿Cuánto dinero gastó cada uno de ellos?

3) En un Restaurante sirven de primer plato sopa, verdura o lentejas; de segundo plato carne o pescado; y de postre flan, fruta, helado o yogur. ¿Cuántos menús distintos pueden servir?

EJERCICIOS DE LA SEGUNDA PRUEBA

ÍNDICE

SEGUNDA PRUEBA

1) En dos vasijas hay la misma cantidad de agua. Sacamos 26 litros de una de ellas y los echamos en la otra;ésta tiene ahora triple número de litros que la primera. ¿Cuántos litros había al principio en cada vasija?

2) En dos vasijas hay la misma cantidad de agua. Si sacáramos 15 litros de una de ellas y los echáramos en la otra,entonces ésta tendría triple número de litros que la primera.¿Cuántos litros había al principio en cada vasija?

3) En una parcela la piscina ocupa 20 m^2, la casa ocupa tantos m^2 como la piscina y la cuarta parte de los m^2 que tiene la parcela, el jardín ocupa tanto como la piscina y la casa juntas. ¿Cuántos m^2 tiene la parcela?

4) En una parcela la piscina ocupa 25 m^2; la casa ocupa tanto como la piscina y la mitad del jardín, el jardín ocupa tanto como la piscina y la casa juntas.¿Cuántos m^2 mide la parcela?

ÍNDICE

5) Teniendo en cuenta el plan de una fábrica de coches deben construirse 40 coches diarios Sin embargo, si cada día se fabrican 5 coches más, tres dias antes del final, solamente quedan 75 coches por hacer. ¿Cuántos dias tenían que trabajar según al plan inicial? ¿Cuántos coches tenían que construir en total?

6) Un grupo de personas va a un Restaurante a cenar. Si se sientan tres personas en cada mesa quedan dos personas sin mesa. Si se sientan cuatro personas en cada mesa queda una mesa vacia. ¿Cuántas personas y cuántas mesas hay?

EJERCICIOS DE LA TERCERA PRUEBA

ÍNDICE

Cuestionario 1.-

1- Escribe una ecuación utilizando las variables A y P para representar lo siguiente: " Hay 6 veces más alumnos que profesores ". Donde A representa el número de alumnos y P representa el número de profesores.

1'- (Otra versión del problema anterior)
Escribe una ecuación utilizando las variables A y P para representar lo siguiente:" El número de alumnos de esta Universidad es 6 veces el número de profesores ". Utiliza A para designar el número de alumnos y P para designar el número de profesores.

2- Escribe una ecuación utilizando las variables T y F para representar lo siguiente: " En este restaurante por cada 4 personas que piden tarta hay 5 que piden flan". utiliza T para representar el número de tartas y F para representar el número de flanes que se piden.

3- Los pesos están colgados de un muelle y se mide el alargamiento del muelle. Los datos de la tabla son:

Alargamiento	Peso
3 cm	100 g
6	200
9	300
12	400

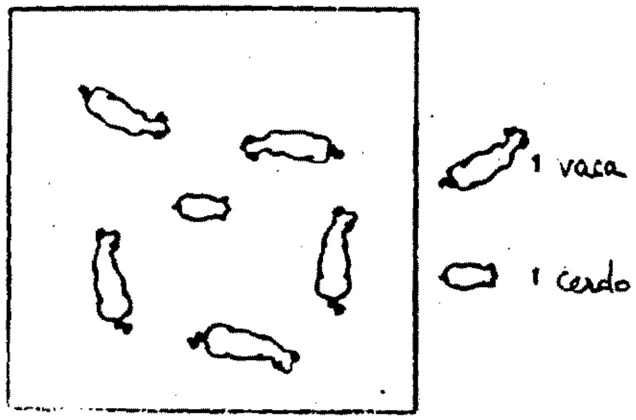
Escribe una ecuación que nos permita predecir el alargamiento del muelle (A) dado el peso (P).

4- Escribe una frase que dé la misma información que la siguiente ecuación: "C=4F"

C es el número de camisas que hay dentro de un armario
F es el número de faldas que hay dentro de un armario.

ÍNDICE

5- Un señor toma una fotografía desde un aeroplano de un campo en el que hay vacas y cerdos. Escribe una ecuación utilizando las letras V y C para escribir la relación entre V el número de vacas y C el número de cerdos que hay en la fotografía.



ÍNDICE

Cuestionario-2.-

1- ¿ Cuándo es cierta la siguiente igualdad ?

$$L+M+N = L+P+N$$

SIEMPRE, A VECES, NUNCA.

2- Sí $a+b = 4$ ¿ Qué valores de a y b hacen cierta esa igualdad ?

3- Sí $2m+3p = 20$ entonces $m = 4$ y $p = 4$ es una solución de la ecuación. ¿ Verdadero o Falso ?

4- Resuelve para x e y

$$x+y = 6$$
$$2x+y = 9$$

5- Escribe una expresión algebraica que indique el número total de personas que pueden comer en un restaurante en el que hay mesas grandes (Se pueden sentar 5 personas) y mesas pequeñas (Se pueden sentar 3 personas).

Escribe esa expresión para el caso particular en que haya:

a) 4 mesas grandes y 2 mesas pequeñas.

b) 4 mesas grandes y 4 mesas pequeñas.

ÍNDICE

ANEXO 1

ÍNDICE

II) Observación y recogida de datos

a) Elaboración de la Prueba Inicial:

El objetivo de ésta es detectar qué tipos de problemas ofrecen mayor dificultad en la resolución.

Consta de cuatro grupos (A,B,C,D) - distintos con tres problemas cada uno de ellos.

En la elección de los problemas he tenido en cuenta las variables siguientes:

- El primer problema de cada grupo (A_1, B_1, C_1, D_1) mantiene la misma estructura profunda, utilizando distinta estructura superficial en cada uno de ellos, (Tabla II.1).

TABLA II.1

A_1 Una torre A es 20m más alta que otra torre B y ésta es 40m más baja que una tercera torre C. La suma de las alturas de las tres torres es 420m. Hallar la altura de cada torre.	B_1 La suma de las alturas de tres edificios es 420m. El más alto mide 40m más que el más bajo, y el mediano 20m menos que el más alto. ¿Cuánto mide cada uno de los edificios?
C_1 El edifificio A es mayor que el edificio B en 40m y el C es menor que el A en 20m. La suma de las alturas de los tres edificios es 420m.- Hallar la altura de cada edificio.	D_1 La suma de las alturas de tres torres es 420m. La torre de altura media es 20m mayor que la torre más baja y 20m menor que la más alta. ¿Cuánto mide cada una de las torres?

El objetivo de este problema es analizar la influencia de los términos: "mayor que", "más que", "más alto", etc.

ÍNDICE

- El segundo problema (A_2, B_2, C_2, D_2) es diferente en cada grupo. Todos ellos se pueden resolver por procedimientos aritméticos aunque la estrategia recomendada sea el planteamiento de una ecuación de primer grado o un sistema algebraico, (Tabla II.2)

TABLA II.2

A_2 Tenemos varios conejos y varias jaulas. Si ponemos un conejo en cada jaula nos quedará un conejo sin jaula. Si ponemos dos conejos en cada jaula nos quedará una jaula vacía. ¿Cuántos conejos y cuántas jaulas hay?	B_2 La cola de un pez pesa 4Kg; la cabeza pesa tanto como la cola y medio cuerpo, el cuerpo pesa tanto como la cabeza y la cola juntas. ¿Cuánto pesa el pez?
C_2 De acuerdo con el plan de una fábrica de muebles deben construirse 48 mesas cada día. Sin embargo, se hicieron dos mesas más cada día de las que habían sido estipuladas en el plan, resultando que, tres dias antes del final, quedaban solamente 100 mesas por hacer. ¿Cuántos dias tenían que trabajar según el plan inicial? ¿Cuántas mesas tenía que hacer la fábrica?	D_2 Una madre, con sus dos hijos, sale de compras gastando cada uno cierta cantidad de dinero. Sabemos que la madre y el hijo gastan 4.800Pts; el hijo y la hija juntos gastan 4.400Pts la madre y la hija gastan entre las dos 5.200Pts. ¿Cuánto dinero gastó cada uno de ellos?

A_2.- Se trata de un enunciado en el que los datos no están dados con cifras. La estrategia útil para llegar a la solución puede ser el "tanteo".

B_2.- Es un problema en el que la incógnita es un dato intermedio, no se pregunta por el valor de la incógnita. La estrategia recomendada es el planteamiento de una ecuación algebraica.

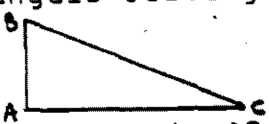
ÍNDICE

C_2.- Es un problema de enunciado largo en el que se relacionan dos incógnitas mediante dos frases; una de ellas es multiplicativa, en la otra se utilizan términos tales como:"tres dias antes", "quedaban 100 mesas por hacer".

D_2.- En el enunciado de este problema aparecen tres incógnitas que están relacionadas dos a dos y se conoce la relación. La estrategia recomendada es el planteamiento de un sistema de ecuaciones linéales de no muy dificil resolución.

- El tercer problema (A_3,B_3,C_3,D_3) se plantea con criterios distintos para cada dos grupos,(Tabla II.3).

TABLA II.3

A_3 En el triángulo rectángulo de la figura  con centro en C y radio AC se traza un arco que corta a la hipotenusa en M.Con centro en B y radio BM se traza otro arco que corta al cateto BA en N. Dibuja los segmentos AM y NM.¿Cómo es la suma de las longitudes AC y BM comparada con la hipotenusa?	B_3 La caja de un juego contiene figuras en forma de triángulo,círculo, cuadrado y rectángulo.Cada figura puede ser roja, verde o amarilla.Todas ellas se presentan en dos tamaños:grande y pequeño.¿Cuántas figuras tiene la caja?
C_3 En un cuadrado ABCD de 5cm de lado,se toma un punto M en el lado AB de modo que AM mida 1,5cm; y un punto N en el lado CD tal qùe el segmento CN mida 1cm.Se une M con N y por A se traza una paralela a MN.Dibújalo e indica qué clase de polígono es cada una de las partes en que ha quedado dividido el cuadrado	D_3 En un Restaurante sirven de primer plato,verdura o lentejas; de segundo plato carne o pescado;y de postre flan,fruta,helado o yogur. ¿Cuántos menús distintos se pueden servir?

ÍNDICE

A_3 y C_3.- El objetivo fundamental es observar la comprensión de un texto de instrucciones geométricas que deben realizar. Se añade alguna pregunta sobre conocimientos elementales de Geometría: reconocimiento de figuras geométricas (C_3) y comparación de segmentos utilizando la propiedad que define la circunferencia (A_3).

B_3 y D_3.- Se plantea un problema de recuento relacionando los distintos datos.

b) Fase experimental:

Esta prueba se ha pasado a 180 alumnos, distribuidos de la forma siguiente: 140 alumnos de 1º de BUP de nivel medio y 40 alumnos de 1º de FP de nivel bajo.

Los grupos corresponden a distintos Institutos de Bachillerato y Formación Profesional de Madrid. Dos Institutos están en una zona céntrica y el resto en barrios periféricos.

La prueba ha sido pasada antes de que los alumnos hayan estudiado, en este curso, los temas correspondientes a ecuaciones y sistemas lineales. Estos alumnos, en los dos cursos anteriores (7º y 8º de EGB), se les ha adiestrado en la resolución de ecuaciones y sistemas, habiendo resuelto también algún problema sencillo de enunciado.

ÍNDICE

Durante la prueba no se dio a los alumnos ningún tipo de aclaración relacionada con la comprensión del texto.

III) Análisis de resultados

La prueba ha sido corregida con la intención de cuentificar los errores cometidos en cada modelo de problemas. El objetivo era, como ya he indicado, detectar en qué modelos de problemas se cometían más errores.

He considerado interesante diferenciar entre la cuantificación de los errores y los alumnos que dejan en blanco el problema. Los porcentajes restantes son los que corresponden a los alumnos que resuelven bien el problema.

En las tablas III.1 y III.2 están reflejados los datos obtenidos.

TABLA III.1.- Porcentajes de errores en los problemas.

%	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2	A_3	B_3	C_3	D_3
Nivel Medio	38	36	37	11	32	6	68	57	31	33	50/29	19
Nivel Bajo	81	77	46	33	75	79	55	73	42	79	36/45	64

ÍNDICE

TABLA III.2.- Porcentaje de alumnos que dejan en blanco el problema.

%	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2	A_3	B_3	C_3	D_3
Nivel Medio	8	0	6	13	36	12	24	19	5	11	5	8
Nivel Bajo	8	15	18	33	25	21	45	27	33	14	9	0

A la vista de los resultados se han mantenido discusiones generales en clase con los alumnos, creando el conflicto en aquellas situaciones que más llaman la atención e intentando hacer una clasificación de los errores.

En los problemas A_1,B_1,C_1,D_1, se pretendía analizar si con los términos:"mayor que" "menor que", "más que", "menos que", "más alto que", "más bajo que", se hacía una "traducción literal de enunciado", para lo cual he cuantificado separadamente estos errores, (Tabla III.3).

ÍNDICE

TABLA III.3.- Porcentajes del error "traducción literal de enunciado" en los problemas A_1, B_1, C_1, D_1.

%	Traducción literal				Alumnos que lo dejan en blanco				Otros errores			
	A_1	B_1	C_1	D_1	A_1	B_1	C_1	D_1	A_1	B_1	C_1	D_1
Nivel Medio	13	9	6	0	8	0	6	13	24	27	31	11
Nivel Bajo	8	15	9	0	8	15	18	33	73	61	36	33

Haciendo un estudio comparativo podemos observar que no se ha detectado ninguna "traducción literal" en el enunciado del problema D_1 en ninguna de los dos niveles. Sin embargo se da el porcentaje más alto de abandono en ambos niveles comparándolo con el resto de los problemas. Se ha observado, en la discusión mantenida en clase, que la dificultad está en el propio enunciado ya que, en una misma frase, se relaciona una variable (altura media) con las otras dos (altura mayor y altura menor). Esta situación no se da en los enunciados A_1, B_1, C_1.

En el problema A_1 se observa un hecho curioso, en el nivel bajo hay un porcentaje de errores menor que en el nivel medio. Si fijamos la atención en la tabla de los porcentajes de otros errores vemos que en el nivel bajo hay un 73% frente al 24% del nivel medio. En la discusión mantenida en clase se ha podido comprobar que estos errores se deben a dificultades en la comprensión del enunciado, no llegando a realizar la transformación.

ÍNDICE

Con estos resultados se puede aventurar que los errores de "traducción literal" se producen en mayor grado cuando se utiliza la expresión "más" y "menos". En las frases "20 metros más", "40 metros menos", los alumnos escriben:"20 x", "40 - x". El error se detecta en el segundo caso por la no conmutatividad de la diferencia. Si se utilizan los términcs "20 metros mayor" ó "40 metros menor" el índice de error baja significativamente. Influye tambien el hecho de que se enuncie utilizando las expresiones:"el edificio A" ó " un edificio" en lugar de " el edificio mayor", " el edificio mediano" ó " el edificio menor" (10% de errores frente al 4%).

Volviendo a las tablas III.1 y III.2 (Porcentajes de errores en los problemas y Porcentajes de alumnos que dejan en blanco el problema) observamos que el problema C_2 es en el que se da un porcentaje mayor de error en el nivel medio.

En el nivel bajo no ocurre lo mismo aunque es el problema (C_2) de mayor porcentaje de abandono (junto con D_1 y A_3).

Le siguen en mayor porcentaje de error B_2 y D_2 repitiéndose una situación análoga a la anterior.

A_2.- Es interesante recalcar lo que ocurre en este problema, se da el % mayor de abandono en el nivel medio, incluso superior al del nivel bajo. Muchos alumnos argumentan que no se podía hacer porque " no tiene números", ya que las cantidades no están expresadas con cifras; incluso algunos afir maban: " no es un problema sino un acertijo matemático y a mi eso se me da muy mal.

B_2.- Los errores cometidos en este problema son en su mayoría, errores de "transformación" o "Traduccion " debidos a que la incógnita es un dato intermedio y no coincide con lo que se pregunta. En algunos casos se ha dado un error de interpretación al considerar la expresión " cuerpo de un pez" con el significado de "pez entero", es decir cabeza + cuerpo + cola.

C_2.- Ningún alumno lo rsuelve bien porque no entienden el enunciado. Los que intentan resolverlo Reducen el campo cambiando la situación por otra más sencilla que les resulte más conocida, para ello sustituyen la variable "tiempo" por un período fijo: un mes, un año,...

D_2.- Las dificultades detectadas se concentran, en líneas generales en dos bloques: a) Diferencias de interpretac. El enunciado dio lugar a dos interpretaciones distintas:"la madre sale de compras una sola vez con los dos hijos" ó "la madre sale dos veces de compras, una con el hijo y otra con la hija". b) Reducción de Campo (los alumnos suponen que cada uno de ellos gasta la misma cantidad).

ÍNDICE

En los problemas correspondientes a instruciones geométicas (A_3,C_3), los errores se deben a la contestación de la pregunta añadida sobre conocimientos elementales de Geometría.

A_3.- Los alumnos contestan la pregunta midiendo sobre la figura, muy pocos relacionan la igualdad de segmentos con la propiedad que define la circunferencia.

C_3.- En este enunciado hay un alto % de errores de reconocimiento de las figuras geométricas que se obtienen. De un 79% de errores en el nivel medio, el 50% se deben a no saber clasificar las figuras.

En los problemas de recuento relacionando los distintos datos (B_3,D_3), muchos de los errores se deben a que los alumnos han asociado estos enunciados al tema de Combinatoria queriendo recordar las fórmulas. La mayoría de los alumnos que abandonan estos enunciados argumentan: "es un problema de combinatoria y aún no lo hemos dado".

Son inferiores los % de error y abandono en el problema D_3 por ser un tema más familiar. Resaltar el hecho de que en el nivel bajo ningún alumno abandona este problema.

ANEXO 2

ÍNDICE

V) Nueva observación y recogida de datos

a) Elaboración de la Segunda Prueba

Para elaborar esta prueba se ha hecho un estudio de posibles variables que pueden influir en la resolución de problemas verbales.

Las variables estudiadas han sido:

- Estructura superficial del texto:
  - Palabras que pueden causar errores conceptuales:"reducir","menos",...
  - Palabras que tienen distinto significado en el lenguaje matemático que en el ordinario:"producto"
  - Palabras que dependen del contexto o del uso de artículos indefinidos o definidos:"es un décimo", "el el décimo",...

- Situación descrita por el texto:
  - Real
  - Abstracta
  - De números concretos.

- Orden en que aparecen los sucesos en el texto:
  - Siguen el mismo orden en que ocurren naturalmente
  - No siguen el orden natural.

- Redacción de las frases:

  . En forma afirmativa
  . Usando el condicional.

- Datos que aparecen en el texto:

  . Números utilizados: enteros, racionales,...., grandes o pequeños
  . Utilizar o no símbolos para los datos numéricos
  . Existencia de datos relativos a conocimientos matemáticos
  . Datos implícitos o explícitos
  . Datos útiles o superfluos.

- Mención de los datos y la incógnita:

  . Número de veces que aparece la incógnita en la expresión simbólica
  . Número de veces que aparece la incógnita en el texto y su relación con el número de veces que aparece en la expresión simbólica
  . Los datos y la incógnita se mencionan separadamente o mezclados.

- Orden de presentación de los datos, la incógnita y la pregunta:

  . Condiciones del problema-incógnita-pregunta
  . Incógnita-condiciones del problema-pregunta
  . Condiciones del problema-incógnita-condiciones-pregunta

Variando el orden de la pregunta se obtienen seis posibilidades más.

. Número de preguntas,condiciones y datos
. Se pregunta o no la incógnita.

- Estructura profunda del texto:

. La incógnita es el total y todos o parte de los datos son numéricos
. La incógnita es una parte: el total y los datos restantes pueden ser numéricos o no.
. Las sentencias están claramente separadas en el texto o mezcladas con datos, incógnita o pregunta.

- Incógnitas:

. Número de incógnitas
. Si hay más de una:
  a) Se menciona en el texto de forma separada o mezcladas con los datos
  b) Se omite la mención de alguna incógnita
  c) Homogeneidad de las incógnitas.

Dada la gran cantidad de variables que pueden influir en la resolución de problemas algebraicos verbales, es imprescindible fijar algunas para poder estudiar la influencia de otras.

ANEXO 3

ÍNDICE

Controlando estas variables y teniendo en cuenta los enunciados de la prueba inicial con mayor porcentaje de error, la investigación se centra en el estudio de algunas de las restantes.

La Segunda Prueba consta de seis problemas (Anexo 9) distribuidos en dos sesiones.

Para la elección de los enunciados se ha tenido en cuenta las variables siguientes:

Problemas de Comparación de Cantidades:

En este tipo de enunciados se analiza la influencia de la redacción de las frases:

- En forma afirmativa
- Usando el condicional.

Las condiciones fijadas son:

- Puede considerarse como una situación que se transforma, conociendo la relación; o dos situaciones iguales de partida que se relacionan después de sufrir una transformación
- Uso de paréntesis
- Orden de presentación:incógnita-condiciones-pregunta
- Aparece la expresión " triple que".

ÍNDICE

La estrategia recomendada, para su resolución, puede ser una ecuación de primer grado o un sistema de ecuaciones, (Tabla V.1).

TABLA V.1

Enunciado Afirmativo	Enunciado Condicional
En dos vasijas hay la misma cantidad de agua. Sacamos 26 litros de una de ellas y los echamos en la otra; ésta tiene ahora triple número de litros que la primera. ¿Cuántos litros había al principio en cada vasija?	En dos vasijas hay la misma cantidad de agua. Si sacáramos 15 litros de una de ellas y los echáramos en la otra, entonces ésta tendría triple número de litros que la primera. ¿Cuántos litros había al principio en cada vasija?

<u>Problemas cuya estrategia recomendada, para su resolución, sea una ecuación de primer grado:</u>

Para realizar el estudio comparativo con la prueba inicial se elige un problema similar al B_2, presentando otro enunciado alternativo para analizar la influencia de las variables:

- La incógnita es el total por el que se pregunta
- La incógnita es un dato intermedio y se pregunta por el total

fijando las condiciones:

- Las frases se redactan en forma afirmativa
- Aparecen tres sentencias, una es un dato numérico y en las otras dos se utiliza la incógnita

- La pregunta se hace al final
- Las frases están claramente separadas.

TABLA V.2

La incógnita es el total por el que se pregunta	La incógnita es un dato intermedio y se pregunta por el total
En una parcela la piscina ocupa 20 m^2, la casa ocupa tantos m^2 como la piscina y la cuarta parte de los m^2 que tiene la parcela, el jardín ocupa tanto como la casa y la piscina juntas. ¿Cuántos m^2 tiene la parcela?	En una parcela la piscina ocupa 25m^2; la casa ocupa tanto como la piscina y la mitad del jardín, el jardín ocupa tanto como la piscina y la casa juntas. ¿Cuántos m^2 tiene la parcela?

<u>Problemas cuya estrategia recomendada, para su resolución, sea el planteamiento de un sistema de ecuaciones:</u>

Los problemas elegidos en este apartado tienen la misma estructura profunda que los problemas A_2 y C_2 de la prueba inicial.

Dado que estos enunciados (A_2,C_2) obtuvieron los porcentajes más altos de alumnos que lo dejan en blanco, el objetivo de introducirlos en esta segunda prueba es analizar las respuestas dadas por los alumnos, después de haber estudiado Algebra durante este curso.

Las condiciones fijadas son:

- Las sentencias no están separadas
- Las incógnitas no son homogéneas
- La pregunta se hace al final y se preguntan las dos incógnitas.

ÍNDICE

TABLA V.3

Teniendo en cuenta el plan de una fábrica de coches deben construirse 40 coches diarios. Sin embargo, si cada día se fabrican 5 coches más, tres dias antes del final, solamente quedan 75 coches por hacer. ¿Cuántos dias tenían que trabajar según el plan inicial? ¿Cuántos coches tenían que construir en total?

Es un problema de enunciado largo, las incógnitas estan relacionadas mediante sentencias multiplicativas; se utilizan términos tales como " tres días antes", "quedaban 75 coches por hacer".

TABLA V.4

Un grupo de personas va a un Restaurante a cenar. Si se sientan tres personas en cada mesa quedan dos personas sin mesa. Si se sientan cuatro personas en cada mesa queda una mesa vacia. ¿Cuántas personas y cuántas mesas hay?

Se trata de un enunciado en el que los datos no están dados con cifras. Las incógnitas están relacionadas mediante sentencias multiplicativas; aparecen expresiones, "quedan dos personas sin mesa" o "se sientan tres personas en cada mesa", de dificil traducción algebraica.

ÍNDICE

b) Fase experimental

Esta prueba ha sido pasada a 140 alumnos de 1º de BUP de nivel medio (los mismos -- que habían realizado la prueba inicial).

Los grupos corresponden a distintos Institutos de Bachillerato de Madrid situados en barrios periféricos.

Los alumnos han realizado la prueba después de haber estudiado, en este curso, los temas correspondientes a ecuaciones y sistemas algebraicos.

Los seis problemas se han distribuido en dos sesiones de una hora con tres problemas en cada sesión.

Puesto que la presentación de los enunciados, en la primera o segunda sesión, puede - influir en los resultados se han hecho dos - grupos A y B, (Tabla V.5).

TABLA V.5

Primera Sesión	
GRUPO A	GRUPO B
Enunciado Afirmativo	Enunciado Condicional
La incógnita es un dato intermedio y se pregunta por el total	La incógnita es el total por el que se pregunta
Teniendo en cuenta el plan de una fábrica de coches...	Un grupo de personas va a un Restaurante...
Segunda Sesión	
GRUPO A	GRUPO B
Enunciado Condicional	Enunciado afirmativo
La incógnita es el total por el que se pregunta	La incógnita es un dato intermedio y se pregunta por el total
Un grupo de personas va a un Restaurante...	Teniendo en cuenta el plan de una fábrica de coches...

Como puede observarse en la primera sesión,los alumnos del Grupo A realizan el enunciado en forma afirmativa y resuelven el problema correspondiente a: "la incógnita es un dato intermedio y se pregunta por el total"; los alumnos del Grupo B se enfrentan con el enunciado condicional y el problema correspondiente a:"la incógnita es el total por el que se pregunta"; de esta forma es posible obtener resultados comparativos y analizar la influencia que pueda tener si se trata de la primera o segunda sesión.

ÍNDICE

Para evitar, dentro de lo posible, el factor "recuerdo" del problema anterior; la primera sesión tuvo lugar un viernes y la segunda el lunes siguiente.

El profesor no hace ningún comentario ni contesta ninguna pregunta relativa a los problemas al final de la primera sesión. A los alumnos no se les comunicó que realizarían una segunda sesión.

Durante la prueba no se dio ningún tipo de aclaración relacionada con la comprensión del texto.

ANEXO 4

ÍNDICE

c) Corrección de la Segunda Prueba

En primer lugar se ha hecho una cuantificación de los errores aparecidos en cada uno de los enunciados.

Esta cuantificación se ha realizado tomando como punto de partida la Clasificación de errores dada por NEWMAN,1977 (1) con las matizaciones introducidas por CASEY, 1978 (2).

CLASIFICACION DE NEWMAN:

- Habilidad de lectura:
  - Reconocimiento de palabras
  - Reconocimiento de símbolos.
- Comprensión:
  - Entendimiento general del texto
  - Entendimiento de términos específicos.
- Transformación:
  - ¿ Puede el alumno escribir la expresión simbólica a partir del texto?.
- Habilidad de Procesos:
  - a) Aritméticos (operaciones numéricas)
    - Responde al azar
    - Elección errónea de la operación
    - Utilización de un algorítmo falso
    - Errores de cálculo.

---

(1) NEWMAN,Anne.(1977). An Analysis of sixth-grade pupils' errors on written Mathematical tasks.Research in M. E. in Australia.

(2) CASEY,D.P.(1978). Failing students:A strategy of error analysis.In COSTELLO,P.(ed.). Aspects of motivation. Melbourne:Mathematical Association of Victoria.

b) Habilidad espacial necesaria.
c) Pensamiento lógico requerido.

- Habilidad de codificación de la respuesta:
  - Palabras.- Si la respuesta se codifica con palabras omitiendo alguna de ellas.
  - Símbolos.- La respuesta se codifica con símbolos omitiendo alguno de ellos.
- Errores de descuido:
  Error de descuido que es imposible que lo repita.
- Errores de motivación.
  El alumno pudo resolver el problema correctamente si hubiese trabajado.
- Errores de pregunta (problema ambiguo).

MATIZACIONES INTRODUCIDAS POR CASEY

- Transformación:
  - Selección de la estrategia adecuada
  - Selección de las destrezas adecuadas.

- Bloque de conocimientos (Motivación según Newman)
- Bloque de dificultades (Descuidos - según Newman)
- Forma de la pregunta (interacción entre el que propone el problema y el que lo intenta resolver).

Siguiendo el orden de esta escala, los errores quedan clasificados en el apartado correspondiente al primer error detectado en el desarrollo del problema.