

25-10-00

CONTRERAS

CONCURSO / AYUDAS

97

J/1147



MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE  
 DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN,  
 FORMACIÓN PROFESIONAL E INNOVACIÓN EDUCATIVA  
 CENTRO DE INVESTIGACIÓN  
 Y DOCUMENTACIÓN EDUCATIVA

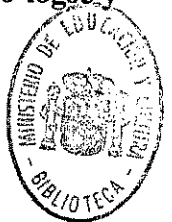
ENTRADA 196.....  
 SALIDA .....  
 FECHA 25-10-2000

# PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

## — MEMORIA FINAL —

**“Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y en estudiantes del bachillerato-logse y de primer curso universitario”**

Autores:



— > Ángel Contreras de la Fuente. Didáctica de la Matemática. Universidad de Jaén (Director)

DONATIVO

Lorenzo Luque Cañada. Profesor de Enseñanza Secundaria. I.E.S. “Pablo de Olavide”. La Carolina (Jaén)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA  
 BIBLIOTECA

23 FEB. 2001

ENTRADA

Lourdes Ordóñez Cañada. Profesora de Enseñanza Secundaria. I.E.S. “Fuente de la Peña”. Jaén

Manuela Ortega Carpio. Matemática Aplicada. Universidad de Jaén

Carmen Sánchez Gómez. Matemática Aplicada. Universidad de Jaén

(Grupo GEAMJA: “grupo de enseñanza del Análisis Matemático de Jaén”)

**Convocatoria:** Concurso nacional (Orden de 23 de septiembre de 1997 (BOE de 10 de octubre de 1997) y Orden de 7 de julio de 1998 (BOE de 16 de septiembre de 1998)), concedido por el Centro de Investigaciones y Documentación Educativa (C.I.D.E.)

MA-5885  
R. 128496

# ÍNDICE

## Índice

<b>Capítulo 1.....</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción.....	2
1.2 Marco teórico .....	4
1.2.1 Concepción .....	4
1.2.2 Obstáculo epistemológico.....	6
1.2.3 Acto de comprensión.....	8
1.2.4 Una nueva línea de investigación .....	9
1.3 Problemas de investigación.....	10
1.4 Hipótesis y objetivos del proyecto .....	11
1.4.1 Hipótesis .....	11
1.4.2 Objetivos .....	11
1.5 Metodología de investigación. Muestra y Análisis de datos.....	12
1.5.1 Metodología empleada .....	12
1.5.2 Variables.....	13
1.5.3 Muestra.....	14
1.5.4 Técnicas de análisis.....	15
1.6 Limitaciones de la investigación.....	15
<b>Capítulo 2.....</b>	<b>17</b>
2.1 Introducción.....	18
2.2 Concepciones y obstáculos identificados en la génesis del límite de una función.....	18
2.2.1 La concepción geométrica CLG.....	19
2.2.2 La concepción del razonamiento infinitesimal CLRI.....	20
2.2.3 La concepción numérica del infinitésimo constante CLNIC.....	21
2.2.4 La concepción numérica del infinitésimo variable CLNIV.....	22
2.2.5 La concepción métrico-analítica CLMA.....	23
2.2.6 La concepción topológica CLT.....	24

2.3	Concepciones cognitivas del límite de una función detectadas en las respuestas los estudiantes.....	25
2.4	Concepciones y obstáculos identificados en la génesis de la continuidad de una función.....	26
2.4.1	La concepción primitiva CCA.....	26
2.4.2	La concepción geométrica CCB.....	27
2.4.3	La concepción euleriana CCC.....	27
2.4.4	La concepción de Cauchy CCD.....	28
2.4.5	La concepción de Weiertrass-Darboux CCE.....	29
2.4.6	La concepción topológica CCG.....	29
2.5	Concepciones cognitivas de la continuidad de una función detectadas en las respuestas de los estudiantes.....	30
2.6	Concepciones y obstáculos identificados en la génesis de la derivada de una función.....	31
2.6.1	Concepciones de la tangente.....	31
2.6.1.1	La concepción geométrica de la tangente, CTG.....	31
2.6.1.2	La concepción algebraica de la tangente, CTAL.....	32
2.6.2	Concepciones cognitivas de la tangente detectadas en las respuestas de los estudiantes 33.....	33
2.6.3	Concepciones de la derivada.....	34
2.6.3.1	La concepción de la derivada como pendiente de la recta tangente, CDP.....	34
2.6.3.2	La concepción de la derivada como razón de cambio, CDRC.....	34
2.6.3.3	La concepción de la derivada como función, CDF.....	35
2.6.3.4	La concepción numérica de la derivada, CDN.....	35
2.6.4	Concepciones cognitivas de la derivada de una función detectadas en las respuestas de los estudiantes.....	36
<b>Capítulo 3.....</b>		<b>37</b>
3.1	Introducción.....	38
3.2	El estudio de los manuales.....	38
3.2.1	VARIABLES consideradas en el estudio.....	40
3.2.2	Manuales analizados.....	41
3.3	Tablas correspondientes a los manuales de Bachillerato.....	42
3.3.1	Análisis del manual 1. (1° de Bachillerato. 1996).....	42
3.3.2	Análisis del manual 2. (2° de Bachillerato. 1997).....	46
3.3.3	Análisis del manual 3. (1° de Bachillerato. 1996).....	51

3.3.4	Análisis del manual 4. (2° de Bachillerato. 1997).....	52
3.3.5	Análisis del manual 5. (1° de Bachillerato. 1996).....	55
3.3.6	Análisis del manual 6. (2° de Bachillerato. 1997).....	58
3.3.7	Análisis del manual 7. (2° de Bachillerato. 1996).....	60
3.3.8	Análisis del manual 1. (Universidad. 1992).....	66
3.3.9	Análisis del manual 2. (Universidad. 1997).....	69
3.3.10	Análisis del manual 3. (Universidad. 1995).....	71
3.3.11	Análisis del manual 4. (Universidad. 1988).....	76
3.3.12	Análisis del manual 5. (Universidad. 1987).....	79
3.4.	Conclusiones del análisis de manuales.....	83
3.4.1.	Límite. Bachillerato.....	83
3.4.2.	Límite. Universidad.....	85
3.4.3.	Continuidad. Bachillerato.....	86
3.4.4.	Continuidad. Universidad.....	88
<b>Capítulo 4</b> .....		<b>90</b>
4.1	Introducción.....	90
4.2	Concepciones y obstáculos de los alumnos.....	90
4.2.1	Procedimiento de recogida de datos.....	90
4.2.2	Proceso de elaboración del cuestionario definitivo.....	91
4.2.3	Descripción y análisis del cuestionario.....	92
4.2.3.1	Cuestiones sobre el límite.....	92
4.2.3.2	Cuestiones sobre la continuidad.....	100
4.2.3.3	Cuestiones sobre la tangente.....	109
4.2.3.4	Cuestiones sobre la derivada.....	111
4.2.4	Análisis de las respuestas al cuestionario.....	114
4.2.4.1	Análisis de las respuestas que se refieren al límite.....	114
4.2.4.2	Análisis de las respuestas que se refieren a la continuidad.....	129
4.2.4.3	Análisis de las respuestas que se refieren a la tangente.....	136
4.2.4.4	Análisis de las respuestas que se refieren a la derivada.....	141
4.3	El saber enseñado. Los apuntes de clase.....	146
4.3.1	Apuntes sobre el límite en 1° de Bachillerato.....	147
4.3.2	Apuntes sobre el límite en 2° de Bachillerato.....	148
4.3.3	Apuntes sobre la continuidad en 1° de Bachillerato.....	149

4.3.4	Apuntes sobre la continuidad en 2° de Bachillerato.....	150
<b>Capítulo 5</b> .....		<b>153</b>
5.1	Conclusiones respecto de las hipótesis formuladas.....	154
5.1.1	Resultados sobre la hipótesis 1ª.....	154
5.1.2	Resultados sobre la hipótesis 2ª.....	155
5.1.3	Resultados sobre la hipótesis 3ª.....	156
5.1.4	Resultados sobre la hipótesis 4ª.....	157
5.2	Conclusiones sobre la enseñanza de los conceptos implicados en la investigación.....	158
5.2.1	Conclusiones sobre la enseñanza del límite de una función.....	158
5.2.2	Conclusiones sobre la enseñanza de la continuidad de una función.....	160
5.2.3	Conclusiones sobre la enseñanza de la derivada de una función.....	162
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....		<b>166</b>
<b>ANEXOS</b> .....		<b>173</b>
Anexo 1.....		174
Anexo 2.....		180

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Análisis del manual 1. Límite. 1º de Bachillerato.....	43
Tabla 2. Análisis del manual 1. Continuidad. 1º de Bachillerato.....	45
Tabla 3. Análisis del manual 2. Límite. 2º de Bachillerato.....	47
Tabla 4. Análisis del manual 2. Continuidad. 2º de Bachillerato.....	50
Tabla 5. Análisis del manual 3. Límite. 1º de Bachillerato.....	52
Tabla 6. Análisis del manual 4. Límite. 2º de Bachillerato.....	53
Tabla 7. Análisis del manual 4. Continuidad. 2º de Bachillerato.....	54
Tabla 8. Análisis del manual 5. Límite. 1º de Bachillerato.....	56
Tabla 9. Análisis del manual 5. Continuidad. 1º de Bachillerato.....	57
Tabla 10. Análisis del manual 6. Límite. 2º de Bachillerato.....	58
Tabla 11. Análisis del manual 6. Continuidad. 2º de Bachillerato.....	60
Tabla 12. Análisis del manual 7. Límite. 2º de Bachillerato.....	61
Tabla 13. Análisis del manual 7. Continuidad. 2º de Bachillerato.....	65
Tabla 14. Análisis del manual 1. Límite. Universidad.....	66
Tabla 15. Análisis del manual 1. Continuidad. Universidad.....	68
Tabla 16. Análisis del manual 2. Límite. Universidad.....	69
Tabla 17. Análisis del manual 2. Continuidad. Universidad.....	71
Tabla 18. Análisis del manual 3. Límite. Universidad (Definición informal).....	72
Tabla 19. Análisis del manual 3. Límite. Universidad (Definición formal).....	73
Tabla 20. Análisis del manual 3. Continuidad. Universidad.....	75
Tabla 21. Análisis del manual 4. Límite. Universidad.....	76
Tabla 22. Análisis del manual 4. Continuidad. Universidad.....	78
Tabla 23. Análisis del manual 5. Límite. Universidad (Definición informal).....	79
Tabla 24. Análisis del manual 5. Límite. Universidad (Definición formal).....	81
Tabla 25. Análisis del manual 5. Continuidad. Universidad.....	82

Tabla 26. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según concepciones (Bachillerato).. (Cuestión 1. Límite)	116
Tabla 27. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según concepciones (Universidad)..	116
Tabla 28. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según obstáculos (Bachillerato).....	118
Tabla 29. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según obstáculos (Universidad).....	119
Tabla 30. Frecuencias y porcentajes, según relaciones correctas e incorrectas, entre expresiones y gráficas (Bachillerato)..... (Cuestión 2. Límite)	121
Tabla 31. Frecuencias y porcentajes, según relaciones correctas e incorrectas, entre expresiones y gráficas (Universidad).....	121
Tabla 32. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según obstáculos (Bachillerato)....	122
Tabla 33. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según obstáculos (Universidad)....	123
Tabla 34. Frecuencias y porcentajes, según relaciones correctas e incorrectas, entre tablas y valor del límite (Bachillerato)..... (Cuestión 3. Límite)	124
Tabla 35. Frecuencias y porcentajes, según relaciones correctas e incorrectas, entre tablas y valor del límite (Universidad).....	124
Tabla 36. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según obstáculos (Bachillerato)....	126
Tabla 37. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según obstáculos (Universidad)....	127
Tabla 38. Relación entre el número de respuestas incorrectas y el número de obstáculos manifestados por los estudiantes (Bachillerato)..... (Cuestiones 2 y 3. Límite. Pretest)	128
Tabla 39. Relación entre el número de respuestas incorrectas y el número de obstáculos manifestados por los estudiantes (Universidad)..... (Cuestiones 2 y 3. Límite. Pretest)	128
Tabla 40. Relación entre el número de respuestas incorrectas y el número de obstáculos manifestados por los estudiantes (Bachillerato)..... (Cuestiones 2 y 3. Límite. Postest)	129
Tabla 41. Relación entre el número de respuestas incorrectas y el número de obstáculos manifestados por los estudiantes (Universidad)..... (Cuestiones 2 y 3. Límite. Postest)	128
Tabla 42. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según concepciones y obstáculos (Bachillerato)..... (Cuestión 1. Continuidad)	131



Tabla 43. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según concepciones y obstáculos (Universidad)..... (Cuestión 1. Continuidad)	132
Tabla 44. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según concepciones y obstáculos (Bachillerato)..... (Cuestión 2. Continuidad)	133
Tabla 45. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según concepciones y obstáculos (Universidad)..... (Cuestión 2. Continuidad)	134
Tabla 46. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según concepciones y obstáculos (Bachillerato)..... (Cuestión 3. Continuidad)	135
Tabla 47. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según concepciones y obstáculos (Universidad).....	135
Tabla 48. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según concepciones en pretest (Bachillerato-Universidad)..... (Cuestión 1. Tangente)	138
Tabla 49. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según concepciones (Bachillerato)...	139
Tabla 50. Frecuencias y porcentajes según respuestas correctas y puntuaciones obtenidas (Bachillerato).....	140
Tabla 51. Frecuencias y porcentajes de respuestas correctas e incorrectas por gráficas (Bachillerato).....	140
Tabla 52. Evolución del perfil de tangente (Bachillerato).....	141
Tabla 53. Frecuencias y porcentajes de respuestas, según concepciones y obstáculos (Bachillerato)..... (Cuestión 2. Derivada)	142
Tabla 54. Frecuencias y porcentajes, según respuestas correctas e incorrectas (Bachillerato).....	142
Tabla 55. Frecuencias y porcentajes, según respuestas correctas e incorrectas (Bachillerato)..... (Cuestión 3. Derivada)	143
Tabla 56. Frecuencias y porcentajes, según concepciones y obstáculos (Bachillerato).... (Cuestión 4. Derivada)	144
Tabla 57. Frecuencias y porcentajes, según concepciones (Bachillerato)..... (Cuestión 5. Derivada)	145
Tabla 58. Frecuencias y porcentajes, según concepciones (Bachillerato)..... (Cuestión 6. Derivada)	146

Tabla 59. Síntesis del análisis de los apuntes del profesor sobre el límite (1° de Bachillerato).....	148
Tabla 60. Síntesis del análisis de los apuntes del profesor sobre el límite (2° de Bachillerato).....	149
Tabla 61. Síntesis del análisis de los apuntes del profesor sobre la continuidad (1° de Bachillerato).....	150
Tabla 62. Síntesis del análisis de los apuntes del profesor sobre la continuidad (2° de Bachillerato).....	151