TÍTULO : LOS CONCEPTOS DE LÍMITE Y CONTINUIDAD EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA : TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA Y CONCEPCIONES DEL ALUMNO.

Equipo investigador : Modesto Sierra Vázquez, María Teresa González Astudillo, Mª del Carmen López Esteban

ÍNDICE

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

Introducción

Los conceptos de límite y continuidad han estado presentes en los programas del bachillerato español desde los años treinta de nuestro siglo. Actualmente estos conceptos aparecen en los programas de B.U.P. y C.O.U.; igualmente los encontramos en el nuevo bachillerato que propugna la L.O.G.S.E.

Los profesores de enseñanza secundaria, manifiestan las dificultades que surgen en la enseñanza-aprendizaje de estos dos conceptos claves para la comprensión de las matemáticas superiores, y herramientas necesarias para el estudio de las Ciencias Físico-Naturales, Humanas y Sociales.

Investigaciones en Educación Matemática realizadas fuera de nuestro país, han confirmado, que los alumnos no alcanzan una comprensión clara de ambos conceptos (Davis y Vinner, 1986; Tall, 1980; Tall y Vinner, 1981; Sierpinska, 1987; Robert, 1982; Cornu, 1981, 1983; Williams, 1991), por lo nos proponemos analizar las concepciones de los alumnos acerca de los mismos. Algunos de estos estudios, (por ejemplo Sierpinska 1985, 1987) muestran que existe una estrecha relación entre las dificultades de los alumnos, y los problemas de la construcción del conocimiento matemático a lo largo de la historia. Esto nos lleva a la necesidad de analizar las concepciones históricas, y los obstáculos epistemológicos relativos al límite y a la continuidad.

Además, parece necesario, estudiar el proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1985) desde el saber matemático, al saber que se enseña en las aulas; el análisis de los libros de texto desde los años 50 hasta nuestros días, mostrará esta transposición.

Esta investigación es esencialmente exploratoria y cualitativa, por lo que el análisis de datos (que se irá presentando a lo largo de esta memoria) está ajustado a dicho carácter.

Objetivos

1.- Estudiar las concepciones y los obstáculos epistemológicos que han aparecido en el desarrollo histórico de los conceptos de límite y continuidad.

2.- Descubrir las concepciones que tienen los alumnos sobre el límite y la continuidad.

3.- Encontrar las relaciones existentes entre dichas concepciones y las concepciones históricas a que hemos hecho referencia.

4.- Analizar la transposición didáctica del saber matemático al saber escolar a través de los textos utilizados en el bachillerato y C.O.U. y su evolución desde la década de los cincuenta hasta nuestros días como posibles instrumentos generadores de estas concepciones.

Hipótesis

1.- Durante el aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad los alumnos desarrollan una serie de concepciones que están relacionadas con los problemas que han surgido en el desarrollo histórico de estos conceptos.

2.- La transposición didáctica desde el saber de las matemáticas al saber escolar reflejada en los libros de texto es fuente de alguna de estas concepciones.

Métodos y fases

La investigación se ha llevado a cabo en dos cursos académicos. Durante el curso 94-95 llevamos a cabo el análisis de la transposición didáctica de los conceptos de límite y continuidad. Para ello, por una parte, analizamos los planes de estudio del bachillerato en España desde que aparecen ambos conceptos en los cuestionarios. Por otra parte, de acuerdo con la metodología de Schubring (1987) analizamos libros de texto desde la década de los cincuenta hasta nuestros días. También se elaboró un precuestionario para estudiar las concepciones de los alumnos que fue respondido por un grupo de estudiantes, y a su vez presentado a un grupo de profesores de educación secundaria. Una vez analizado este precuestionario, se elaboró el definitivo.

Durante el curso 95-96, el cuestionario fue contestado por los alumnos. A continuación, se realizó un análisis de dicho cuestionario según categorías preestablecidas que han permitido conocer las concepciones de los alumnos acerca de ambos conceptos. Simultáneamente, se estudió el desarrollo histórico de los conceptos de límite y continuidad y se buscaron las relaciones entre las concepciones de los alumnos, las que aparecen en el desarrollo histórico y las generadas por el conocimiento escolar.

Esto se detalla en las siguientes fases.

1ª fase: Transposición didáctica
Selección de libros
1er Nivel: Elaboración de fichas
2º Nivel: Construcción de tablas
3er Nivel: Análisis δ Conceptual.
δ Cognitivo.
δ Fenomenológico.

2ª Fase: Elaboración de instrumentos
Elaboración del precuestionario
Contestación del precuestionario (80 sujetos)
Análisis del precuestionario:
δ 1er listado de criterios de justificación
δ Porcentajes de resolución.
Elaboración del cuestionario definitivo
Análisis a priori del cuestionario

3ªFase: Recogida y tratamiento de datos
Contestación del cuestionario (145 sujetos)
Análisis del cuestionario

4ª Fase: Evolución histórica y conclusiones
Desarrollo histórico de los conceptos
Relaciones entre concepciones
δ Históricas
δ Escolares
δ Alumnos
Conclusiones

Publicaciones generadas

Sierra, M.; González, M.T.; López, C (1997): Aproximación a las concepciones de los alumnos de COU sobre el límite funcional. *Actas del IV Congreso Regional (Castellano-Leonés) de Educación Matemática*. Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas, 181-187. Valladolid.

Sierra, M.; González, M.T.; López, C. (1996): Análisis de los conceptos del límite y continuidad en los libros de texto de Bachillerato. Comunicación breve ICME, 8. Sevilla: ICME 8, 268.

Referencias

Artigue, M. (1989): Epistemologie et didactique. *Cahiers du DIDIREM*. Université Paris 7.
Bachelard, G. (1939): *La formation de l'esprit scientifique*. París: Vrin (Edición original en 1938).
Boyer, C.B. (1959): *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover.
Brousseau, G. (1980): Problems de L'enseignement des décimau. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 1.1, 11-58; 2.1, 37-127.
Brousseau, G. (1983): Les obstacles épistemologiques et les problémes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4.2, 165-198.
Brousseau, G. (1986): *Fondements et methodes de la didactique des mathematique*. Thése d'Etat. Université de Bordeaux France.
Cornu, B. (1983): Quelques obstacles a l'apprentisagge de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques*,vol. 4.2., 236-268.
Cornu, B. (1981): Apprentissage de la notion de limite. Modeles spontanes et modeles propes. *Proceedings of the Fifth Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 322-326.
Chevallard, Y. (1985): *La trasposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigne*. Grenoble: La Pensee Sauvage.
Davis, R.B. y Vinner, S. (1986): The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behavoir*, 5, 281-303.
Fischbein, E. y otros (1979): The intuition of infinity. Educational Studies

in Mathematics, 10, 3-40.
Fox, D. (1980): *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: ENNSA.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an educational Task*. Dordrecht: Reidel.
Grabiner, J.V. (1981): *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Cambridge, MA; MIT press.
Lakatos, I. (1978): *Cauchy and the continuum dans Mathematics, Science and Epistemology*, Cambridge University Press.
Robinet, J. (1983): Une experience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, vol 4.3., 223-292.
Ruiz Higueras, L. (1993): *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Granada (Tesis doctoral inédita).
Schubring, G. (1987): On the methodology of Analysing historical textbooks: Lacroix as Textbook Author, *For the learning of mathematics*, vol 7, nº 3, 41-51.
Sierpinska, A. (1985): Obstacles èpistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didáctique des Mathematique,* vol. 6.1, 5-67.
Sierpinska, A. (1987): Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, 371-397.
Tall, D. (1975): Long-term schema for Calculus an Analysis. *Mathematical Education forTeaching 2*.
Tall, D. (1977): Conflicts and catastrophes in the learning of Mathematics. *Mathematical Education for Teaching*.
Tall, D. y Schwartzenberger, R.L.E. (1978): Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 44-49.
Tall, D. (1980a): Mathematical intuition with special reference to limiting processes. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 170-176.
Tall, D. (1980b): The notion of infinite measuring number and its relevance to the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 271-284.
Tall, D. y Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
Vergnaud, G. (1990): La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 10, 133-170.
Williams, S. (1991): Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 22, 219-236.

CAPÍTULO 1

DESARROLLO HISTÓRICO DE LOS CONCEPTOS DE LÍMITE Y CONTINUIDAD

Introducción

El primer objetivo de nuestra investigación, es llevar a cabo un análisis epistemológico de los conceptos de límite y continuidad. Este estudio cumple varias funciones. En primer lugar, pone de manifiesto que los conceptos matemáticos de límite y continuidad no se desarrollan de modo aislado sino en conexión con otros conceptos. En segundo lugar, muestra el contexto de problemas en los que han aparecido ambos conceptos. En tercer lugar, nos hace ver que los conceptos no se han desarrollado de modo lineal, sino con avances, retrocesos, indecisiones; en fin, nos da cuenta de los obstáculos que han aparecido en el desarrollo de los mismos. Algunos de estos obstáculos, aparecerán en las justificaciones de los alumnos en sus respuestas a las distintas tareas planteadas.

1- Desarrollo histórico de la noción de continuidad.

Aunque es Bolzano el que define el concepto de continuidad a través del límite, podemos afirmar que ya desde los griegos hay un germen de esta idea que se va refinando a lo largo de la historia de las Matemáticas. Las distintas maneras (concepciones) de entender la continuidad de una función, irán ligadas a los problemas que se presentan en cada momento; la continuidad, de este modo, no es un concepto aislado sino que dependerá del modo del hacer en cada época, en particular, del tipo de funciones que se admitan. Por otra parte, veremos como algunas de las concepciones de los alumnos acerca de este concepto, son un reflejo de las que han aparecido a lo largo de la historia. Esta hipótesis, ya probada por El Bouazzoui (1988) la hemos refrendado en nuestro trabajo, según señalamos en los capítulos siguientes. Para el desarrollo histórico de este concepto, hemos consultado obras de historia de las Matemáticas, como las de Boyer (1986), Rey Pastor y Babini (1985), Bourbaki (1972), e investigaciones más específicas como El Bouazzoui (1988), Dugac (1981),Youskchevitz (1976) y Grattan-Guinnes (1984); por eso nuestro trabajo no pretende ser original, sino presentar una síntesis de las mismas.

Matemática griega.

En la matemática griega existe ya una cierta idea de continuidad; tenían una noción de continuidad en sentido intuitivo, pero no se trataba de la continuidad de funciones, puesto que no existía este concepto. Según señala Boyer (1986) los pitagóricos habían supuesto que el espacio y el tiempo pueden ser imaginados como constituidos por puntos e instantes, pero tanto el espacio como el tiempo tienen también otra propiedad, que es más fácil de intuir que definir conocida como continuidad. Aristóteles describe el punto pitagórico como una unidad dotada de posición o como una unidad considerada en el espacio. Contra esta concepción estaban las ideas de los eleáticos, cuyo principio fundamental era la unidad y permanencia del Ser; el representante más característico de estas ideas es Zenón, cuyas paradojas más citadas son las que se refieren a la imposibilidad del movimiento. Estas paradojas son:

i) la de la dicotomía,
ii) la de Aquiles y la tortuga,
iii) la de la flecha,
iv) la del estadio.

La noción de continuidad estaba implícita en las respuestas a estas paradojas. En este periodo hay una concepción intuitiva de la continuidad, que en principio no tiene que ver con la idea de función.

Edad Media

El nombre de Nicole Oresme está necesariamente asociado al concepto de función durante la Edad Media. Boyer (1986) nos dice que Oresme escribió que:

> *Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo*.

En su idea primitiva de representación gráfica de funciones, Oresme dibuja una gráfica velocidad-tiempo que es continua. La continuidad aparece como una propiedad global de las magnitudes medibles.

Siglo XVII

Como es bien conocido, en este siglo se produce la aritmetización de la geometría, lo que va a influir en la idea de continuidad. Como señala El Bouazzoui (1988) durante este periodo se pasa de la concepción geométrica intuitiva de la noción de función a una concepción algebraica gracias a los trabajos de Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665). Las funciones se representan por fórmulas analíticas y la mayor parte de ellas corresponden a trayectorias de un móvil.

Con Descartes, la noción de continuidad toma un carácter geométrico ligado a las curvas. Con Newton (1643-1727) la noción de continuidad continúa siendo geométrica y está ligada al tiempo. Con Leibniz (1646-1716) la continuidad toma un carácter espacial.

Siglo XVIII

Durante el siglo XVIII se desarrolla el concepto de función. Con Euler (1707-1783) la idea de continuidad va ligada a este concepto. En el capítulo primero de su *Introductio in analysis infinitorum* comienza definiendo las nociones iniciales: términos constantes y variable. Define una función como:

> *una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes* (Boyer, 1986, p.558).

Esta restricción de expresión analítica desaparecerá posteriormente después de la polémica establecida con D'Alambert (1717-1783) sobre el problema de la cuerda vibrante. De este modo, en el prefacio de sus *Institutiones calculi differentialis*, de 1975, aparece la nueva definición:

> *Si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquella se llama función de dicha variable.*

Euler define las funciones continuas como aquellas en las que todos sus valores están ligados por una misma ley o dependen de la misma ecuación, es decir, las que están definidas por una sola expresión analítica.

Las funciones “discontinuas” o “mixtas” son las que están definidas por diferentes expresiones en diferentes intervalos del dominio de la variable; nuestras actuales funciones continuas con puntos angulosos serían discontinuas en el sentido de Euler. En definitiva, para Euler el concepto de continuidad está enraizado en la idea de fórmula algebraica. De acuerdo con El Bouazzoui (1988) la idea euleriana de continuidad es adecuada para las funciones numéricas de la época. Las funciones “continuas” son estudiadas en análisis y geometría para la integración de ecuaciones conteniendo diferenciales de funciones de dos o más variables mientras que las “discontinuas” intervienen únicamente para la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales. Pero esta concepción de la continuidad llega a ser fuente de errores: la solución obtenida por Daniel Bernouilli para el problema de la cuerda vibrante como suma de una serie de senos y cosenos debería ser continua y sin embargo es discontinua; en general, la suma de una serie de funciones continuas puede no ser continua. A resolver estas “contradicciones” se dedican los matemáticos posteriores a Euler.

Lagrange (1736-1813) escribió dos grandes tratados sobre funciones: *Teoría de las funciones analíticas* y *Lecciones sobre el Cálculo de las funciones.* Da una nueva definición de función, más rica que la de Euler:

> *Llamamos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas* (citado en Grattan-Guinnes (1984), p.33).

En Lagrange encontramos por vez primera una definición por comprensión de la continuidad. Al considerar el desarrollo en serie entera de la función f (x+i), define implícitamente la continuidad de la siguiente manera:

> *Se podrá encontrar una abcisa i correspondiente a una ordenada menor que una cantidad dada, y entonces todo valor más pequeño de i corresponderá también a ordenadas menores que la cantidad dada* (citado en El Bouazzoui (1988) p.80).

Siglo XIX

Es bien conocido que a lo largo del siglo XIX el concepto de función evoluciona considerablemente. Esto influye en el concepto de continuidad. Se encuentran funciones, a las que aplicando la definición de continuidad, en sentido de Euler, presentan contradicciones. Por ejemplo, la encontrada por Cauchy en 1844:

$$y = x \quad \text{si } x \mu 0 \qquad y = -x \quad \text{si } x < 0$$

Esta función es discontinua en el sentido de Euler pues está definida por dos expresiones. Sin embargo, puede representarse por una sola expresión $y = \sqrt{x^2}$ para todo número real x, por lo que será continua. La distinción entre funciones continuas y mixtas entraña, por consiguiente, contradicciones.

Será Bolzano (1781-1848) el primero en dar una definición de continuidad desligada de las consideraciones geométricas, espaciales y temporales de sus predecesores. Como señalan Rey Pastor y Babini (1985) Bolzano se adelantó en numerosas cuestiones a los analistas más famosos del siglo XIX: en el concepto de función continua, en los criterios de convergencia de series, en la existencia de funciones continuas sin derivada, pero la influencia de sus escritos fue escasa por estar alejado de los centros de poder matemáticos. Definió así el concepto de función continua sobre un intervalo:

> *Decir que una función real f de la variable real x es continua, para todos los valores de x pertenecientes a un intervalo dado, no significa otra cosa que esto: si x es un tal valor cualquiera, la diferencia f (x-w) – f (x) se hace más pequeña que cualquier cantidad dada si se toma w tan pequeña como queramos* (Dugac, 1981, p.16).

En sus trabajos Bolzano demostrará con rigor las propiedades fundamentales de las funciones continuas. El Bouazzaoui (1988) considera esta definición como no geométrica (no hay consideraciones de tipo geométrico), local (se estudia lo que ocurre en un punto y se generaliza a los puntos de un intervalo) y aritmética (se sirve del cálculo). Por vez primera el concepto de continuidad toma la forma de definición matemática.

Como es bien conocido, es Cauchy (1789-1857) quien pone las bases del Análisis Matemático tal y como lo conocemos hoy en día. Su definición de función es la siguiente:

Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas se pude deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de la variable independiente y la otra cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable (citado por Youschkevitch (1976), p.58).

En 1821, Cauchy da su definición de continuidad:

La función f(x) es continua con respecto a x entre los límites dados si, entre estos límites un crecimiento infinitamente pequeño de la variable, produce también un crecimiento infinitamente pequeño de la función misma.

Como vemos aparecen las palabras "infinitamente pequeño", que intuitivamente se sabe lo que es, pero que no está precisado en la definición.

Con Weierstrass (1815-1897) se produce la "aritmetización" del Análisis. Por lo que se refiere a las funciones continuas es el primero en dar a conocer un ejemplo de una función continua en todos sus puntos y no derivable en ninguno de ellos, aunque ya Bolzano había puesto un ejemplo de este tipo de funciones, ejemplo que no había tenido difusión por el aislamiento en que se encontraba Bolzano con respecto de la comunidad de matemáticos. Weierstrass da una definición de continuidad desligada de ciertas ideas intuitivas de crecimientos "infinitamente pequeños", de variable "aproximando" un límite, que estaban presentes en las definiciones anteriores. Su definición recogida en Boyer (1959, p.287) es la siguiente:

$f(x)$ es continua en ciertos límites de x si para todo valor de x_0 en este intervalo y parta todo número positivo ε arbitrariamente pequeño, es posible encontrar un intervalo x_0 tal que para todos los valores de este intervalo la diferencia $f(x) - f(x_0)$ es en valor absoluto inferior a ε.

Aquí Weierstrass introduce el lenguaje de los ε y δ, y utiliza cuantificadores que faltan en las definiciones de Bolzano y Cauchy; además su definición se aplica a cualquier función numérica arbitraria.

Siglo XX

Con los trabajos de Cantor (1845-1918) y Dedekind (1831-1916) comienza el gran desarrollo de la topología, correspondiendo a Hausdorff (1868-1942) la noción de espacio topológico y a Fréchet (1878-1973) la de espacio métrico. Hausdorff definirá el concepto de continuidad de la siguiente manera:

> *Una transformación continua significa que a cada punto del primer espacio hay asociado un único punto del segundo espacio y que dado un entorno de una imagen de un punto existe un entorno del punto origen (o de cada punto origen si hay varios) cuya imagen está contenida en el entorno de dicho punto imagen.*

Con la definición de Hausdorff desaparece la idea intuitiva geométrica de continuidad; la continuidad o no de una función dependerá de las topologías del dominio de la función y del espacio imagen.

2.- Desarrollo histórico del concepto de límite

El concepto de límite, al igual que el de continuidad, no es un concepto aislado, sino que aparece en Matemáticas ligado a otros conceptos como el infinito, la resolución de ciertos problemas geométricos, la convergencia de series, entre otros. A diferencia de la continuidad no es un concepto intuitivo; además, aunque en estos momentos el Análisis se apoya en el concepto de límite, esto no fue así hasta tiempos recientes; reflexionando y refinando ciertos conceptos es como se llegó al de límite. Para llevar a cabo este estudio nos hemos servido de trabajos generales de historia de la matemática como los ya citados de Boyer y Rey Pastor y Babini así como de trabajos especializados como los de Cornu (1983) y Sierpinska (1985,1987).

Matemática griega

En la matemática griega no se puede considerar la noción de límite funcional puesto que, como ya se ha dicho, no existía el concepto de función. Sin embargo, al resolver problemas relativos al cálculo de áreas se producen ciertos procesos iterados que constituyen un primer germen de este concepto. Como ejemplo, se pueden considerar el método de Hipócrates de Chíos (hacia 430 a.C.) para probar que la razón de las áreas de dos círculos es igual a la razón de los cuadrados de los radios y el método de exhaución de Eudoxo (s.-IV). Hipócrates inscribe en los dos círculos polígonos regulares semejantes y aumentando indefinidamente el número de lados recubre los dos círculos; en cada etapa, la razón de las áreas de los polígonos inscritos es igual a la razón del cuadrado de los radios de los círculos; en el límite el área de cada círculo tenderá al área de los polígonos y se mantendrá la relación establecida, que queda probada de esta manera. Por lo que se refiere al método de exhaución de Eudoxo, consiste esencialmente en acotar la cantidad que se quiere calcular entre dos series de magnitudes que convergen hacia ella, una por arriba y otra por debajo. Ambas cotas se comparan bien con la cantidad estudiada, directamente, bien con las cotas correspondientes a un problema análogo y ya resuelto. Esta comparación se realiza por un doble proceso de reducción al absurdo y de aquí el nombre de apagógico con el que también se le conoció en el siglo XVII. Es decir, conocida mediante un proceso previo intuitivo, mecánico o de cualquier otro tipo, la equivalencia entre dos magnitudes A y B, de las cuales una de ellas también es conocida, el método de exhaución lo que hace es demostrar la equivalencia. Y para ello, se prueba en primer lugar que es absurdo suponer que A es mayor que B; en segundo lugar se prueba que suponer que B es mayor que A también es absurdo; de donde se debe deducir que A y B son equivalentes; sin embargo el proceso no es constructivo y requiere para cada problema un planteamiento y resolución particulares. Este método es, ante todo, un método geométrico que permite demostrar los resultados sin hacer llamadas al infinito; como es bien conocido, los griegos manifestaron una gran reticencia a mirar al infinito y se prohibieron su uso en los razonamientos matemáticos. Como señala Cornu (1983) aunque el método de exhaución está bastante próximo a la noción de límite no se puede decir que los griegos tuviesen el concepto de límite; es la geometría y en particular el problema de los cálculos de áreas lo que ha permitido la puesta a punto de una noción (la exhaución) a la que se puede considerar un ancestro de la noción de límite.

Siglo XVII

Algunos de los problemas que se tratan de resolver son los siguientes:

- Encontrar los límites de elementos geométricos (secantes a una curva que pasan por un punto fijo a la curva, polígonos inscritos en un círculo, etc.).
- Medir las magnitudes y los elementos “diferenciales” asociados a las curvas y superficies (tangentes, radios de curvatura, asíntotas, máximos y mínimos).
- Calcular las formas indeterminadas.
- Evaluar el orden de las magnitudes de sumas parciales de series

divergentes o de restos de series convergentes.

A resolver estos problemas, en los que está implícito el concepto de límite, se dedican los matemáticos de esta época.

Cavalieri (1598?-1647) formuló un método original, que se conoce como el método de los indivisibles, que consiste en considerar como indivisibles a los elementos que constituyen una figura de dimensión mayor: los puntos son los indivisibles de un segmento; los segmentos de figuras planas; las secciones planas, de sólidos: Entonces, para hallar por ejemplo el volumen de un cilindro, se descompone en una infinidad de cilindros de altura infinitamente pequeña, mediante un haz de planos paralelos y la suma de todos esos cilindros será el volumen del cuerpo pedido. Aunque este método fue criticado, en un principio, por los matemáticos de su tiempo (veasé, por ejemplo, la de Tacquet en su obra *Quatuor cylindricorum et annulorum*...), acabó siendo utilizado por todos.

Fermat (1601-1665) crea un método para resolver los problemas de máximos y mínimos. Según señala Boyer (1986) no disponía del concepto de límite, pero su método sigue un camino completamente paralelo al que podemos ver hoy en los libros de texto: ante el problema de dividir un segmento de longitud a en dos segmentos x y $a-x$ cuyo producto $x(a-x) = ax-x^2$ sea máximo, Fermat reeemplaza x por $x+e$.

> *$a(x+e) - (x+e)^2 = ax + ae - x^2 - 2xe - e^2$, y esto debe ser poco diferente de $ax - x^2$; entonces $ae - 2xe - e^2 \varphi 0$, $a \varphi 2x+e$, es decir $a \varphi 2x$, de donde $x \varphi a/2$*

No habla del paso al límite, su razonamiento es puramente algebraico, pero aquí hay un germen de la noción de límite y de derivada.

Como ya se ha señalado al hablar de continuidad, Newton tienen una visión cinemática del análisis. En su *De quadratura curvarum*, afirmará:

> *No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes todo lo pequeñas que se quieran, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas son descritas y engendradas, no por yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de sus puntos; las superficies, por el movimiento de líneas; los sólidos, por el movimiento de las superficies; los ángulos, por la rotación de sus lados; los tiempos por un flujo continuo; y así sucesivamente.*

Su idea es asimilar las cantidades variables a cuerpos en movimiento, las variables x e y son cantidades que van fluyendo, de las cuales salen las fluxiones p y q o velocidades de variación; para ello utiliza, en un principio los infinitamente pequeños, que trata de evitar posteriormente en su obra *De quadratura curvarum*, donde sustituye las cantidades fluentes por la teoría de las llamadas “razones primera y última”, hablando de la razón primera de los incrementos nacientes o la razón última de incrementos evanescentes, que son de una gran importancia en la historia en la noción de límite.

> *Las razones últimas en las que las cantidades desaparecen no son realmente razones de cantidades últimas, sino los límites hacia los cuales las razones de las cantidades decrecientes sin límite se aproximan también, y hacia las cuales pueden aproximarse tanto como cualquier valor dado, pero que no pueden pasarlas o alcanzarlas antes de que las cantidades sean disminuidas indefinidamente* (Op. Omnia citado en Cornu (1983) p.46)

Como bien hace observar Cornu (1983), el interés de Newton está en la razón de las cantidades, que se aproxima a un límite cuando las dos cantidades tienden a cero, esto es, la derivada no es una aplicación del concepto de límite sino que el cálculo de derivadas es el que ha conducido hacia este concepto.

Sin embargo, la oscuridad de las expresiones como cantidades evanescentes, fluentes y el uso de lo infinitamente pequeño desatarán una fuerte polémica entre los matemáticos siendo el arzobispo Berkeley (1685-1753) con su obra de *The Analyst*, el máximo exponente de esta crítica.

Siglo XVIII

D’Alembert (1789-1857) insistirá en la misma línea que Berkeley, en que hay que despojar al cálculo de su “metafísica”:

> *Quería saber qué idea clara y precisa se puede esperar que surja en el espíritu por una definición parecida. Una cantidad es algo o nada; si es algo, no se ha desvanecido; si no es nada está desvanecida totalmente. Es una quimera pensar en un estado intermedio entre los dos anteriores* (citado en de Lorenzo, 1971, p.121)

En su artículo *Límite de la Enciclopedia* escribe que una cantidad es el límite de otra cantidad variable si esta segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que una cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella); no cabe duda que está definición supone un avance sobre lo anterior, pero se trata de una definición muy poco operativa.

Lagrange (1736-1813) en su obra *Théorie des fonctionas analytiques* trata de desarrollar el Cálculo de modo que sea más riguroso para lo que ensaya desembarazarse de los infinitamente pequeños; desarrollando f(x)=1/(1-x) por la división larga obtenemos:

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+...+x^n+ ...$$

si multiplicamos el coeficiente de x^n por n! al valor obtenido le denominó Lagrange el valor de la función derivada n-sima de la función en el punto x=0. Lagrange pensó que por este método había conseguido eliminar la necesidad de infinitesimales o de límites, a pesar de lo cual continuó utilizándolos paralelamente a sus funciones derivadas. Lagrange es uno de los principales artífices en el paso al dominio numérico aplicando posteriormente sus resultados a la geometría y a la mecánica.

Siglos XIX-XX

Como ya se ha dicho anteriormente, es Cauchy el que pone las bases del Análisis Matemático. Rechazó el planteamiento de Lagrange basado en el desarrollo en series de potencias del Teorema de Taylor, tomando en cambio como fundamental el concepto de límite de D'Alembert, aunque dándole un carácter aritmético que lo hace más preciso. Prescindiendo tanto de la geometría como de los infinitésimos y de las velocidades de cambio, formula Cauchy la siguiente definición de límite:

> *Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo de manera que terminan de diferir de él tan poco como queramos este último valor se llama el límite de todos los demás* (citado en Boyer () p.647)

Además da la definición de infinitésimo como lo consideramos actualmente, es decir como una función cuyo límite es cero, superando de este modo la consideración que se hacía entonces de infinitésimo como un número constante muy pequeño:

> *Diremos que una variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico disminuye indefinidamente de manera que converge hacia límite cero.*

Sin embargo, como señala Cornu (1983) la noción de límite en Cauchy no está definitivamente afinada; se confunde con la noción de punto de acumulación: lim $_{x\delta 0}$ sen 1/x tiene para Cauchy una infinidad de valores comprendidos entre –1 y 1.

Sin lugar a dudas la definición de Cauchy para el límite era mucho más avanzada que las anteriores, pero en ella había expresiones como *aproximarse indefinidamente*, *diferir de él tan poco como queramos*, que son imprecisas. Será Weierstrass (1815-1897) el que formule una definición de límite totalmente aritmética, donde desaparecen tales imprecisiones. En la obra de su discípulo Heine (1821-1881), *Elemente*, escrita en 1872 aparece la siguiente definición de límite:

> *Si dado cualquier ε, existe un η_0 tal que o < η < η_0 la diferencia $f(x_0+\eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x=x_0$* (citado en Boyer (1986), p.696)

Definición que llega hasta nuestros días, con el pequeño cambio de la η por la δ. Posteriormente se introducirá la definición topológica y métrica que traduce la anterior.

Conclusión.

Por lo que se refiere a la continuidad el estudio histórico nos muestra que a lo largo de la historia han aparecido sucesivas concepciones de este concepto.

El Bouazzoui (1988) señala que se constata que en el proceso histórico del concepto de continuidad se han producido dos fenómenos. El primero es que la noción de continuidad ha ido definiéndose cada vez mejor, mejor objetivada y más operacional, y que ha ido progresando desde lo intuitivo hacia lo geométrico, después a lo numérico y finalmente a lo topológico. El segundo se refiere a la generalización de la noción de función: de la ausencia de la idea de función se pasa en primer lugar a funciones numéricas, después a funciones definidas por expresiones algebraicas. A continuación vienen las funciones definidas por funciones numéricas arbitrarias y finalmente las funciones definidas entre espacios topológicos y métricos. La idea de continuidad, en definitiva, ha dependido del tipo de funciones aceptada por la comunidad de matemáticos; así la concepción euleriana se mantendrá durante mucho tiempo, coexistiendo con otras concepciones más avanzadas, ya que parte de la comunidad no aceptará como objetivos "legítimos" de las Matemáticas las funciones discontinuas y las funciones continuas sin derivada. Esto nos lleva al problema de la definición de los objetos matemáticos que rebasa la intención de este estudio.

En cuanto al concepto de límite también a lo largo de la historia han aparecido diversas concepciones, según muestra el estudio realizado anteriormente.

Este devenir histórico ha sido interpretado por algunos investigadores en términos de obstáculos epistemológicos. Es G. Brousseau (1983) quien introduce el concepto de obstáculo en Didáctica de la Matemática para comprender los procesos de aprendizaje en matemáticas:

> *El error y el fracaso no tienen el papel simplificado que a menudo se les ha señalado. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre o el azar, según se pensaba en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior que tuvo su interés, su éxito y que ahora se revela como falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo, no son fortuitos o imprevisibles, se constituyen en obstáculos* (Brousseau, 1983).

Brousseau (1983) clasifica los obstáculos en tres tipos:

- Obstáculos de origen ontogénico, debido a las limitaciones del sujeto en el momento del desarrollo.
- Obstáculos de origen didáctico, debido al sistema de enseñanza en que están inmersos los sujetos.
- Obstáculos de origen epistemológico, debidos al conocimiento mismo; se les puede encontrar en la evolución histórica de los conceptos y en la práctica de la educación.

Cornu (1983) y Sierspinska (1985,1987) han estudiado estos obstáculos y nos remitimos a sus trabajos. Por encima de sus clasificaciones y discrepancias, nos interesa para nuestro estudio hacer hincapié en sus coincidencias que, a nuestro juicio, son las siguientes:

- Obstáculos ligados a la idea de infinito, que se deben a considerar que el paso al límite no es una operación matemática; desde los griegos hasta D'Alembert hay una gran reticencia a considerar el infinito; se admite el infinito potencial pero no al infinito actual.

Incluimos aquí los obstáculos ligados a las nociones de "infinitamente pequeño" o "infinitamente grande"

- Obstáculos ligados al paso de lo geométrico a lo numérico, que incluyen la pregunta de si el límite se alcanza o no; hasta la definición de Cauchy el límite no podía ser alcanzado.

- Obstáculos ligados al concepto de función, que tiene como consecuencia, entre otras, que la atención se centre exclusivamente en los aspectos relacionales, sin tener en cuenta los entornos.

- Obstáculos ligados a la simbolización. El símbolo de la operación del paso al límite fue introducido por Cauchy; hasta entonces no se había considerado necesario ya que el paso al límite formaba parte de otras operaciones como las diferenciales o integrales y simplemente se empleaba el signo de igualdad.

Cornu (1983) señala certeramente que sin que los obstáculos encontrados en la historia sean los mismos con los que tropezará el estudiante, se puede pensar que hay un cierto número de pasos obligados comunes y que ciertas circunstancias que han permitido en la historia superar un obstáculo pueden darnos las indicaciones para poner a punto situaciones que, hoy en día, permitirán al alumno afrontar mejor los obstáculos.

Referencias

Bourbaki, N. (1972): *Notas de Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Boyer, C.B. (1959): *The history of the calculus and its conceptual Development*. New York: Dover.

Boyer, C. (1986): *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1983): Les obstacles èpistemologiques et les problèmes en mathèmatiques. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, vol. 4.2., 165-168.

Cornu, B. (1983): *Apprentissage de la notion de limit. Conceptions et obstacles*. These de doctorat de troisieme cycle des mathematiques pures. Université de Grenoble.
Dugac, P. (1981): Des fonctions comme expresions analytiques aux functions représentables analytiquement. En, J.W. Dauben (ed.), *Mathematical Perspectives*. New York: Academic Press, 13-36.
El Bouazzoui, H. (1988): *Conceptions des èleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*. Theses du grade de Ph. D. Université Laval.
Grattan-Guinnes, Y. (1984): *Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial.
Lorenzo, J. De (1971): *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos.
Rey Pastor, J. Y Babini, J. (1985): *Historia de la Matem*ática. Barcelona: Gedisa.
Sierpinska, A. (1985): Obstacles èpistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactiques des Mathèmatiques*, vol. 6.1, 5-67.
Sierpinska, A. (1987): Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, 371-397.
Youschkevitch, A.P. (1976): The concept of function up to middle of the 19th century. *Archive for the history of exact sciences*, 16, 36-85.

CAPÍTULO 2

CONCEPCIONES DE LOS ALUMNOS DE B.U.P. Y C.O.U. SOBRE EL LÍMITE Y LA CONTINUIDAD.

Introducción.

El segundo objetivo de nuestra investigación es: "Descubrir las concepciones que tienen los alumnos sobre el límite y la continuidad". Para cubrir este objetivo se ha utilizado un cuestionario escrito, en el que hemos optado por preguntas abiertas para que los alumnos no sólo tengan que calcular o responder sobre el límite y la continuidad, sino dar una justificación acerca del límite de una función o de por qué una función es o no es continua. De esta forma, el alumno puede expresar libremente aquellas concepciones que tiene de estos conceptos. Por cuestiones operativas, para su posterior revisión, hemos utilizado dos cuestionarios separados, uno para el concepto de límite y otro para el concepto de continuidad.

1.- Precuestionario.

Este precuestionario se recoge en el anexo 1 y a continuación se presentan sus características, resultados y justificaciones de los alumnos.

1.1.- Características del precuestionario.

Previamente a la elaboración de los cuestionarios se diseñó un precuestionario que fue presentado a un grupo de profesores de Enseñanza Secundaria para que hicieran sugerencias acerca de los diferentes items. Las puntualizaciones que se hicieron se referían a cuestiones de notación, como los símbolos usados (sobre todo en las expresiones gráficas) para que fuesen iguales a las usadas habitualmente por los alumnos.

Constaba de 25 preguntas, 13 dedicadas al límite y 12 a continuidad. En lo que se refiere al límite, basándonos en las tres representaciones posibles: gráfica, algebraica y numérica, se ha diseñado el precuestionario de modo que estas tres formas de representación figuren en el mismo. De esta manera 3 items corresponden a tablas de valores de funciones, 5 a gráficas de funciones, 2 a expresiones algebraicas y en 2 items aparece el límite en un contexto de resolución de problemas de situaciones geométricas. El item número 12 enunciado en un contexto geométrico se ha presentado en dos formas diferentes para estudiar si las respuestas de los alumnos dependían de la forma de presentación, es decir, si influía dar en la pregunta la formulación algebraica de la función, que describe la dependencia del área del triángulo respecto a la abcisa de un punto del eje OX que es uno de los vértices. En la última pregunta se pide a los alumnos que indiquen cómo explicarían a un alumno de un curso inferior el concepto de límite. Se han cubierto todos los casos posibles de funciones con límite finito, límite infinito, sin límite, límites laterales coincidentes y no coincidentes. El punto donde se debe calcular el límite en unos casos es finito y en otros es $+\infty$ ó $-\infty$.

En lo que se refiere a continuidad, 7 items corresponden a funciones dadas por su representación gráfica y 4 a funciones dadas por una representación algebraica. En un último item, al igual que en el caso del concepto de límite, se pide a los alumnos que indiquen cómo explicarían a un alumno de un curso inferior el concepto de continuidad. En los items han sido cubiertos tanto la continuidad, como los posibles casos de discontinuidad.

El precuestionario fue contestado por un grupo de 80 alumnos de C.O.U. del Instituto de Enseñanza Secundaria "Claudio Moyano" de Zamora. De estos alumnos, 46 contestaron a la parte que se refiere al concepto de límite y 34 a la parte de continuidad. Estos alumnos pertenecían a 3 grupos diferentes y dentro de un mismo grupo unos alumnos contestaron a las preguntas de límite y otros a las de continuidad, tardando en realizar el precuestionario una hora.

1.2.- Resultados del precuestionario.

La encuesta se ha analizado item a item estudiando si las respuestas son correctas, si aparecen justificaciones, si las respuestas son incorrectas o si los alumnos no contestaron. Estos resultados se recogen en tablas independientes para límite y para continuidad en el anexo 2.

A) En cuanto al límite se han considerado cuatro bloques de items según el tipo de representación utilizada, siendo estos: tabla, gráficas, expresiones algebraicas y geométricas. Finalmente se han analizado las respuestas al último item que, por ser genérico, no está incluido en ninguno de los bloques anteriores.

En general los alumnos tienen bastantes dificultades para justificar sus respuestas, tendiendo a utilizar procedimientos algorítmicos. Los resultados más significativos en cada uno de los bloques son:

Tablas: Este bloque comprende tres items. En el primero, aunque aparecía la tabla de valores de la función, también se daba la expresión algebraica, siendo mayoritario el número de alumnos que utilizaban esta segunda representación frente a la primera. En los otros dos items hay pocas respuestas correctas, incluso muchos no contestan; en particular en el tercer item solamente hay 3 respuestas correctas.

Gráficas: Este bloque comprende 5 items. El número de respuestas correctas es mayor, estando en torno a un 40%. Igualmente se eleva el número de alumnos que justifican correctamente las respuestas. En los dos items donde aparecen discontinuidades, los alumnos tienen más dificultades y se eleva el número de alumnos que no contestan.

Expresiones algebraicas: Dentro de este bloque se han incluido dos items. El número de respuestas correctas es del 80% en el primer item en el que la función es una parábola, y del 63% en el segundo en que la función está definida a trozos. Practicamente todos los alumnos contestaban estos items. Hay que destacar también que hay una mayor riqueza en las justificaciones.

Geométricas: Los dos items incluidos en este bloque, aunque se refieren al cálculo del límite de áreas de triángulos, tienen un tratamiento distinto por parte de los alumnos, ya que en el primero de ellos utilizan basicamente aproximaciones intuitivas y en el segundo se apoyan en la expresión algebraica. En el primer item el número de respuestas correctas es del 58% y en el segundo del 37% En cuanto al item en el que se daban las dos versiones, se llegó a la conclusión de que no influía dar la representación algebraica de la función, ya que, cuando no se daba muchos alumnos calculaban previamente esta función para posteriormente hallar el límite.

Respecto de la **última pregunta**, al pedirles que escriban cómo explicarían la noción de límite de una función en un punto a alumnos de un curso inferior, las respuestas correctas son un 24%, si tomamos como correcta la idea intuitiva de límite de una función en un punto, ya que ningún alumno empleó la definición formal. Se observa que las respuestas de los alumnos están contaminadas por la idea de continuidad, ya que 10 alumnos tratan de explicar la idea de límite como el valor que toma la función en el punto.

Esta parte de la investigación, ha sido presentada como Comunicación al IV Seminario Regional de Educación Matemática celebrado en Valladolid los días 10,11 y 12 de Septiembre de 1996.

B) La parte del cuestionario que se refiere a continuidad, se ha analizado de modo similar. En este caso se han considerado dos bloques de items: gráficas y expresiones algebraicas. Se presentan a continuación los resultados más significativos en ambos bloques:

Gráficas: Comprende 7 items que hemos subdividido en cuatro grupos. El *primer grupo* está formado por los dos primeros items donde se representan gráficas de funciones continuas, el primero de una sola rama y el segundo unión de varias ramas; el número de alumnos que no contestan es de un 9%, el número de respuestas correctas es elevado y aproximadamente la mitad de los alumnos justifican las respuestas.

El *segundo grupo* está formado por los dos items siguientes, en el primero la función tiene un agujero y en el segundo la función tiene un salto finito en un punto. Las respuestas correctas de estos items superan el 80% y las justificaciones un 65%. Parece, en principio, sorprendente que los alumnos justifiquen mejor este tipo de discontinuidad que el caso continuo.

El *tercer grupo* corresponde a una gráfica de tipo salto finito en varios puntos; baja el número de respuestas correctas que ahora es del 61% y el de justificaciones que es del 44%.

Finalmente, el *cuarto grupo* compuesto por dos items en los que interviene el infinito, baja el número de justificaciones que está en torno al 35% y el número de respuestas correctas es del 65%. Se confirma la sospecha inicial de que cuando intervienen procesos ligados con el infinito los alumnos tienen más dificultades.

Expresiones algebraicas: Comprende cuatro items. En el primero de ellos se trata de una función polinómica y un alto porcentaje de alumnos (85%) contesta que es continua aunque sólo un 50% justifican la razón.

El segundo item es una hipérbola y en el punto donde hay una asíntota la función se define dándole el valor 0. El número de respuestas es ligeramente superior al 50% pero baja sensiblemente el número de alumnos que justifican (26%).

El tercer item es una función definida a trozos y discontinua; es el item donde el número de respuestas correctas es menor (41%). El número de justificaciones es el 32%. El tanto por ciento de alumnos que no contestan es del 14%.

El último item de este bloque, se trata de una función de saltos finitos en los números naturales. Aunque el 44% contesta correctamente diciendo que se trata de una función discontinua, sólo el 9% (tres personas) justifican la respuesta, siendo el número de alumnos que no contestan el 14%.

Finalmente en el **último item** se pedía a los alumnos que escribieran cómo explicarían la noción de función continua a alumnos de un curso inferior, las respuestas correctas son del 76%, siendo la idea más extendida de continuidad, la de una función que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

1.3.- Justificaciones del precuestionario.

Asimismo, se estudiaron las justificaciones aportadas por los alumnos en este precuestionario para tener una aproximación de las que se podían obtener en el cuestionario, y de esta forma poder agruparlas para elaborar una lista de criterios de justificación que hemos recogido en el apartado 5.2. de este capítulo. Cada criterio incluirá, por tanto, una serie de justificaciones en las que está presente o que traducen la misma idea.

A título de ejemplo, reproducimos algunas justificaciones correspondientes a dos items de límite y a otros dos de continuidad:

LÍMITES:

- En el item GL16 hemos encontrado justificaciones como:

- "Cuanto más se acerca x a 2 la función tiende a 1".
- "Si tomamos valores cercanos a 2 los valores de la función se van acercando al 1".
- "A medida que x se acerca al valor 2, f(x) se acerca a 1".

Todas estas justificaciones se han agrupado en el mismo criterio que hemos llamado J1: "Aproximarse".

- En el item GL17 entre las respuestas obtenidas podemos citar:

- "Cuando $x \to 0$ la función es continua".
- "Es una función continua".
- "Una función continua, por la izquierda es una recta creciente $y = -x$ y por la derecha es una constante $y = 1$ luego la función es continua en todo el intervalo".

En este caso hablamos del criterio J4: "La función es continua".

CONTINUIDAD:

- En el item G1 entre otras justificaciones están:

- "Se puede escribir sin levantar el lápiz del papel".
- "Se puede dibujar la gráfica de un solo trazo".
- "No hay que levantar la tiza de la pizarra para dibujarla",

que corresponden al criterio J1: "Se dibuja sin levantar el lápiz del papel".

- Por último en el item E10 hay justificaciones del tipo:

- "$\lim_{x\delta 1^+} = \lim_{x\delta 1^-} = f(1)$"
- "Es continua en el punto de abcisa 1, $\lim_{x\delta 1^+} f(x) = \lim_{x\delta 1^-} f(x)= f(1) = 0$",

que se incluyen en el criterio J6. " Existe $f(x_0)$ y $\lim_{x\delta x0} f(x) = f(x_0)$".

2.- Cuestionario.

2.1.- Características del cuestionario.

Del estudio del precuestionario se obtuvieron algunas conclusiones que permitieron perfeccionarlo. Dado que ciertos items han ocasionado respuestas similares hemos decidido realizar una selección, pero de forma que cada tipo de justificación utilizada pueda reaparecer en el nuevo cuestionario. Además, como una de las conclusiones a las que llegamos al estudiar las respuestas de los alumnos era que la mayoría se limitaban a realizar cálculos, sin que hubiera una justificación explícita de ellos, decidimos introducir algún item en el que los cálculos estuvieran hechos, y sólo se les preguntara el por qué de la respuesta. También hemos modificado algunos items para provocar que los alumnos explicaran las respuestas dadas. El cuestionario definitivo aparece en el anexo 3.

2.1.1.- Cuestionario sobre el límite.

- *Elaboración.*

En la parte correspondiente a límite, entre los items correspondientes a tablas de funciones, se han eliminado T13 y T15 por ser similares al T14 y no aportar más información que éste. En el item T13 además se daba la expresión algebraica, que era la expresión que usaban los alumnos en detrimento de la tabla de valores de la función; y en el caso de T15 la mayoría de los alumnos no contestaban dicho item. El enunciado de T14 se ha modificado manteniendo intactos los datos, para que los alumnos no se encontraran con una pregunta tipo examen, y enfatizar de esta forma el que aportaran justificaciones para poder estudiar luego las concepciones.

Respecto de los items correspondientes a gráficas de funciones, se ha eliminado el item GL17, por ser algunas respuestas encontradas similares a las del GL16, al tratarse en ambos casos de la gráfica de una función continua, y otras similares a GL19 por tratarse de funciones con dos expresiones algebraicas diferentes respecto a las abcisas menores que un número real y mayores que él respectivamente y estar definida la función en dicho punto. El item GL19 se ha modificado, pidiendo a los alumnos en vez de calcular el límite en un punto en el que no existe, que dibujen la gráfica de una función que cumpla esas condiciones, para poder obtener una mayor riqueza en las respuestas a dicha pregunta y una mayor precisión respecto a las concepciones de los alumnos en torno al concepto de límite.

En el bloque de items correspondiente a expresiones algebraicas, se ha eliminado EL21 porque la función a la que se refiere está incluida en el item siguiente. Se ha introducido un item nuevo, LE6, en el que ya se da el límite de una función y se pide la justificación. Se trata en este caso de una función con una indeterminación en el punto de abcisa $x = 1$ y su incorporación se debe a que este tipo de situaciones no se habían contemplado en el precuestionario, siendo según nuestro parecer, este tipo de funciones las que producen algunos conflictos en las ideas que tienen los alumnos sobre el límite.

En el bloque que se refiere a situaciones geométricas se ha eliminado el GE24 porque se trata, igual que el GE23, del cálculo del límite del área de un triángulo bajo ciertas condiciones, siendo el aparato algebraico de mayor complicación el que se ha eliminado. Volvemos a insistir en que nuestro objetivo se refiere a las concepciones de los alumnos en torno al concepto de límite y en ningún caso nos interesan las habilidades que tengan en las manipulaciones algebraicas.

Por último el item 25 se ha mantenido, haciendo más sencillo su enunciado.

En todos los items se ha procurado eliminar o sustituir la expresión "calcula" por las razones anteriormente expuestas.

- *Codificación*.

Hemos codificado los items, haciendo referencia, primero a que el concepto que interviene es el de límite, por ello se empieza con una L; segundo al tipo de representación usada para definir la función, utilizando para ello la inicial de dicho tipo; y por último, el orden de la pregunta en el cuestionario, así tenemos:

- Funciones expresadas mediante tablas: LT1.
- Funciones expresadas mediante gráficas: LG2, LG3, LG4, LG5.
- Funciones expresadas mediante expresiones algebraicas: LE6, LE7.
- Funciones expresadas en situaciones geométricas: LGE8.
- En el último item, como no hay expresiones de funciones, se le ha asignado el código L9.

- *Características*.

Las variables que se han tenido en cuenta respecto a los items del cuestionario están agrupadas en tres bloques según se refieran a: la forma de representación de la función, el tipo de límite y al cálculo del límite. Son las siguientes:

DEFINICIÓN	VALOR	CÓDIGO
<u>Forma de Representación</u>		
1.- Expresión por tablas	1	LCE1
O no	0	
2.- Expresión por gráficas	1	LCE2
O no	0	
3.- Expresión algebraica	1	LCE3
O no	0	
4.- Expresión geométrica	1	LCE4
O no	0	

Tipo de Límite

5.- Existencia del límite	1	LCE5
O no	0	
6.- Límite Finito	1	LCE6
O Infinito	0	
7.-Existencia de algún límite lateral	1	LCE7
O no	0	
8.- Indeterminación	1	LCE8
O no	0	

Cálculo del Límite

9.- Punto de cálculo de límite finito	1	LCE9
Infinito	0	
10.- Se pide calcular el límite	1	LCE10
O no	0	

El valor 1 se ha utilizado cuando la variable es considerada en sentido positivo, y el valor 0 en caso contrario.

En la matriz LM1 siguiente indicamos para cada item los valores de las variables. Las filas de la matriz son las variables y las columnas son los items del cuestionario.

LM1 Matriz a priori del límite.

	LCE1	LCE2	LCE3	LCE4	LCE5	LCE6	LCE7	LCE8	LCE9	LCE10
LT1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
LG2	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
LG3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
LG4	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
LG5	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1
LE6	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
LE7	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
LGE8	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1

Con el programa SPSS versión 6.1.3. hemos llevado a cabo un análisis factorial de esta matriz. Observando la matriz de coeficientes de correlaciones de Pearson entre los items (anexo 4.1.), hay variables "bastante" correlacionadas

r (LE7, LE6) = 0,60	α = 0,033
r (LG2, LE7) = 0,60	α = 0,033
r (LGE8, LE7) = 0,60	α = 0,033
r (LG5, LG3) = 0,61	α = 0,030
r (LG5, LG4) = 0,61	α = 0,030
r (LT1, LG5) = 0,58	α = 0,038

Al llevar a cabo el análisis factorial, los tres primeros factores explican el 79,1% de la inercia total, siendo el porcentaje de variabilidad total explicado por el primer factor el 35%, el del segundo el 30,7% y del tercero el 13,4%. Estos tres factores tienen un autovalor mayor que 1 por lo cual se han elegido para explicar la variabilidad total de las variables. La información relativa a estos tres factores esta en la tabla Final Statistics, en la que están reflejados los índices de comunalidad de cada variable siendo estos bastante cercanos a 1, lo cual indica que los items están bien representados en estos factores.

La matriz factorial (Factor Matrix) nos da las saturaciones de cada item sobre cada factor. Obteniendo los siguientes resultados:

Factor 1 = {LG2, LG3, LG4, LG5}
Factor 2 = {LE6, LE7, LGE8}
Factor 3 = {LT1}

Relacionando estos datos con la matriz a priori, se constata las variables que son comunes a los items de cada factor:

- LC2: "expresión por gráficas, o no" es común a los items del factor 1.
- LC3 y LC4: "expresión algebraica, o no" y "expresión geométrica, o no" están asociados a los items del factor 2.
- LC1: "expresión por tablas, o no" es el carácter discriminatorio del item del factor 3.

2.1.2. Cuestionario sobre la continuidad.

- *Elaboración*.

En la parte del cuestionario de continuidad, en el bloque de funciones dadas por una representación gráfica, se ha eliminado G1, ya que las respuestas eran iguales que las de G2, incluso en esta última había una mayor variedad en las contestaciones al ser una función definida a trozos y, que según los resultados obtenidos, da más problemas a los alumnos. También se ha suprimido G6 por ser una función, la hipérbola equilátera, que aparece en un item de la parte correspondiente a límites y porque en la pregunta siguiente se contempla el caso de una función con límites infinitos no definida en el punto x = 0, y en la pregunta anterior ya aparece una función en la que los límites laterales en ciertos puntos no coinciden, con lo cual ya aparecen en el cuestionario las características que nos interesan de dicha función.

En el bloque de funciones dadas por su expresión algebraica, se ha eliminado E9, ya que es una función discontinua en un punto, situación que se repite en el siguiente item E10, aunque la función no sea la misma.

El resto de los items se ha mantenido intacto debido a la gran cantidad de justificaciones expresadas por los alumnos.

- *Codificación*.

La codificación usada es similar a las de la parte anterior: se usa una C para indicar que se refiere a continuidad, luego se indica el tipo de representación y por último el orden que ocupa la pregunta en el cuestionario. Los items son por lo tanto:

- Referidos a gráficas de funciones: CG1, CG2, CG3, CG4, CG5.
- Referidos a expresiones algebraicas: CE6, CE7, CE8.
- El último item es el C9 porque no se representa ninguna función.

- *Características*.

Igual que para el cuestionario de límite, hay una serie de variables asociadas a los items del cuestionario de continuidad. Están agrupados en tres bloques: forma de representación, dominio de definición y tipos de continuidad. Estas variables son las siguientes:

DEFINICIÓN	VALORES	CÓDIGOS
Forma de Representación		
1.- Expresión gráfica	1	CCE1
O algebraica	0	
2.- Expresión en un solo trozo	1	CCE2
O no	0	
3.- Trozos unidos	1	CCE3
O no	0	
Dominio de Definición		
4.- Dominio de definición es R	1	CCE4
O no	0	
5.- Es un intervalo de R	1	CCE5
O no	0	
6.- Es una unión disjunta de intervalos de R	1	CCE6
O no	0	
Continuidad.		
7.- Restricción del estudio de la continuidad de la función a N	1	CCE7
O no	0	
8.- Continua en su dominio	1	CCE8
O no	0	
9.- Discontinuidad evitable	1	CCE9
O no	0	
10.- Discontinuidad de salto finito	1	CCE10
O no	0	
11.- Algún límite lateral infinito	1	CCE11
O no	0	

El valor 1 se ha usado cuando la variable es considerada en general en un sentido positivo, y el valor 0 en caso contrario. En la matriz CM1 siguiente, indicamos para cada item los valores de las variables anteriores. Las filas de la matriz son las variables y las columnas son los items del cuestionario.

CM1 Matriz a priori de continuidad

	CCE1	CCE2	CCE3	CCE4	CCE5	CCE6	CCE7	CCE8	CCE9	CCE10	CCE11
CG1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
CG2	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
CG3	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
CG4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
CG5	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
CE6	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
CE7	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
CE8	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0

Se ha realizado un análisis factorial de esta matriz de forma similar al llevado a cabo en el caso del límite. La matriz de coeficientes de correlación entre los items está recogida en el (anexo 4.2.) siendo los índices mas altos.

r (CG1, CE8) = -0’57	α = 0’033
r (CG2, CG3) = 0’54	α = 0’042
r (CG2, CG5) = 0’54	α = 0’042
r (CG4, CG3) = 0’54	α = 0’042
r (CE7, CE8) = 0’60	α = 0’023

Al analizar el análisis de factores, los tres primeros factores explican el 75’3 % de la inercia total, siendo el porcentaje de variabilidad total explicado por el primer factor el 39’9%, el del segundo el 19’5% y el del tercero el 15’9%. Estos tres factores tienen un autovalor mayor que 1 por lo cual se han elegido para explicar la variabilidad total de las variables.

La matriz factorial rotada nos da los siguientes resultados:

Factor 1 = {CG2, CE7, CE8, CG5}
Factor 2 = {CG1, CG4, CG3}
Factor 3 = {CE6}

Relacionando estos datos con la matriz a priori no hemos podido constatar una relación entre los factores y las características de los items.

3.- Población.

Para llevar a cabo esta investigación se ha pasado el cuestionario en 6 aulas correspondientes a dos niveles: 2º de B.U.P. (dos aulas) y C.O.U. (cuatro aulas). se han elegido estos dos niveles por ser aquellos que, según el plan de estudios, tienen en su programación los dos conceptos de límite y continuidad.

Las dos aulas de 2º de B.U.P. en las que se ha pasado el cuestionario son del Instituto de Secundaria “Ramos del Manzano” de Vitigudino (RM) corresponden a dos profesores diferentes, y son las únicas de este nivel que hay en dicho instituto.

Las cuatro aulas restantes corresponden al nivel C.O.U y pertenecen a dos institutos diferentes ubicados en Salamanca: tres están en el Instituto de Enseñanza Secundaria “La Vaguada” (LV) y la otra en el Instituto de Secundaria “Lucía de Medrano” (LM). Todas las aulas de C.O.U. pertenecen a la opción B, en la cual las materias científicas como biología, química, física y matemática forman el núcleo esencial de la enseñanza. Las cuatro aulas corresponden a tres profesores diferentes, dos en el instituto de La Vaguada y uno del instituto Lucía de Medrano.

Tanto en las aulas de C.O.U., como en las de 2º de B.U.P., se ha planteado el cuestionario a todos los alumnos que asisten de forma habitual a dichas aulas. Ha sido contestado por todos ellos, salvo en 2º de B.U.P., en el cuestionario de continuidad, donde ha habido 7 cuestionarios sin ninguna respuesta. Todos los grupos son mixtos, y en la siguiente tabla se puede observar la distribución de grupos y alumnos:

INSTITUTO	AULA	ALUMNOS	EFECTIVOS
Lucía de Medrano (LM)	COU B	1-30	30
La Vaguada (LV)	COU C	31-53	23
La Vaguada (LV)	COU A	54-76	23
La Vaguada (LV)	COU B	77-96	20
Ramos del Manzano (RM)	2ºA	97-123	27
Ramos del Manzano (RM)	2ºC	124-145	22
TOTAL			145

El total de alumnos que han contestado el cuestionario es 145, de los cuales 87 son mujeres y 58 hombres. Los alumnos de C.O.U. están enumerados del 1 al 96 y los de 2º B.U.P. del 97 al 145.

El momento elegido para pasar el cuestionario ha sido, en C.O.U. durante el segundo trimestre, y en 2º de B.U.P. al final del segundo trimestre. Se ha tenido en cuenta que los tópicos ya hubieran sido explicados por los profesores, y que los alumnos hubieran trabajado suficientemente con ellos.

4.- Resultados.

Para analizar los cuestionarios se ha utilizado el paquete estadístico SPSS versión 6.1.3. Los datos se han organizado en dos tablas de doble entrada (anexo 5.1.1. para límite y 5.2.1. para continuidad), donde las columnas son los sujetos enumerados del 1 al 145 y las filas son las variables consideradas cuyo carácter, valores y códigos se recogen a continuación:

VARIABLE		CARACTER	VALOR	CÓDIGO
LÍMITE	CONTINUIDAD			
LT1	CG1			
LG2	CG2			
LG3	CG3		1 = Éxito	1
LG4	CG4	Cuantitativa Discreta		
LG5	CG5			
LE6	CE6			
LE7	CE7		0 = Fracaso	0
LGE8	CE8			
L9	C9			
INSTITUTO		Cualitativa Nominal	Lucía de Medrano La Vaguada Ramos del Manzano	LM LV RM
CURSO		Cualitativa Ordinal	2º B.U.P. COU	2º B.U.P. COU
GRUPO		Cualitativa Nominal	A B C D	A B C D
SEXO		Cualitativa Nominal	Hombre Mujer	H M
ENTORNO		Cualitativa Nominal	Urbano Rural	URB RUR

En lo que se refiere a los items se hay codificado con 1 si la respuesta y su justificación eran correctas, y con 0 si la respuesta era incorrecta, no se justifica correctamente, o no se respondía.

4.1. Cuestionario sobre el límite

- **Porcentaje de resolución por alumnos**

Se ha creado una variable x que mide el porcentaje de resolución del cuestionario por alumno, siendo su expresión

$$x = \frac{\boxtimes\ \text{puntuación de un alumno}}{8}\ \&\ 100$$

El estudio descriptivo de esta variable se presenta a continuación

La variable x toma cualquier valor de 0 a 100, siendo éste su rango. La media de los porcentajes de resolución es del 45% y la desviación típica es del 32%.

Considerando independientemente los alumnos de COU y de 2º de B.U.P. los resultados son los siguientes

Los resultados muestran que los alumnos no resuelven correctamente situaciones problemáticas donde está involucrado el concepto de límite, siendo estos resultados mucho más acusados para 2º de B.U.P. Además la desviación típica es muy grande. El propósito de nuestro estudio no es hacer un análisis de las diferencias entre grupos de alumnos, por lo que no se lleva a cabo un estudio descriptivo comparando dichos grupos. Parece lógico pensar que las concepciones de los profesores, su enseñanza y el tipo de manual utilizado influyen en esta dispersión.

El histograma de frecuencias de la variable x, considerando el total de los alumnos es el siguiente:

Las tres medidas de centralización: media, mediana y moda, difieren mucho unas de otras. Además, el valor de la curtosis y de la asimetría nos conducen a afirmar que la distribución no se ajusta a la distribución normal.

- **Porcentaje de resolución por items.**

Para estudiar la resolución de los items se ha creado una nueva variable, cuya expresión es:

$$y = \frac{\boxtimes \text{ puntuaciones de un item}}{145} \,\&\, 100$$

y cuyos valores por item son:

item	valor
LT1	23,45
LG3	34,48
LG5	40,00
LGE8	41,38
LG4	46,90
LE6	53,10
LG2	56,55
LE7	61,38

El recorrido de la variable y, va desde el 23,45% hasta el 61,38%, siendo el rango por tanto 37,931. Agrupando los items según su porcentaje de resolución se pueden establecer 4 grupos:

porcentaje	items
- 30%	LT1
30% - 40%	LG3, LG5
40% - 50%	LG4, LGE8
50% -	LE6, LE7, LG2

Se observa que la forma de expresión de la función condiciona las respuestas de los alumnos, siendo el orden de dificultad: tablas, gráficas y expresiones algebraicas. En cuanto al item "geométrico" LGE8, su nivel de dificultad lo podemos asociar con el de las gráficas. Estos resultados pueden ser debidos al mayor énfasis en la enseñanza que se pone en las expresiones algebraicas frente a las gráficas y las tablas.

- **Análisis jerárquico de conglomerados.**

Para analizar la similitud entre los items, una vez que han sido respondidos por los alumnos, hemos llevado a cabo un análisis jerárquico de conglomerados, utilizando el programa informático ya mencionado. Para ello, en primer lugar, se ha calculado la matriz de coeficientes de correlación de similitud (anexo 5.1.2.). En dicha matriz se puede ver que el mayor índice de correlación corresponde a LGE8 y LT1 (0,4920) que serán el par de variables que se agrupan en primer lugar. En sucesivas etapas se van agrupando el resto de las variables, siguiendo el siguiente esquema:

Etapa 1

$C_1 = \{LE6\}$, $C_2 = \{LE7\}$, $C_3 = \{LG2\}$, $C_4 = \{LG3\}$, $C_5 = \{LG4\}$, $C_6 = \{LG5\}$, $C_7 = \{LGE8\}$, $C_8 = \{LT1\}$

Etapa 2

$C_1 = \{LE6\}$, $C_2 = \{LE7\}$, $C_3 = \{LG2, LG4, LG5\}$, $C_4 = \{LG3\}$, $C_5 = \{LGE8, LT1\}$

Etapa 3

$C_1 = \{LE6, LG3\}$, $C_2 = \{LE7\}$, $C_3 = \{LG2, LG4, LG5\}$, $C_4 = \{LGE8, LT1\}$

Etapa 4

C_1 = {LE6, LG2, LG3, LG4, LG5}, C_2 = {LE7}, C_3 = {LGE8, LT1}

Etapa 5

C_1 = {LE6, LG2, LG3, LG4, LG5, LGE8, LT1}, C_2 = {LE7}

Esto se refleja en la siguiente tabla, en el gráfico de carámbanos y en el dendograma correspondientes:

- **Análisis factorial**

El análisis factorial pretende interpretar las relaciones entre los items hallando la intercorrelación o estructura de dependencia entre ellos y explicando estas variables iniciales mediante un número reducido de variables latentes o hipotéticas llamadas factores. Al realizar este análisis con el paquete estadístico ya mencionado, se observa (anexo 5.1.3.) que el único autovalor mayor que 1 es el referente a la variable LE6, pero si nos quedamos con un único subespacio vectorial de una dimensión, la calidad de representación de toda la muestra se reduce al 43,9%; esta cantidad global se traduce a que la calidad de la representación de alguna variable es muy buena, pero para otras no lo es tanto. Por consiguiente se ha decidido considerar cuatro factores en donde la calidad de representación de la muestra aumenta hasta el 73, 1%.

La matriz factorial es la siguiente:

En esta matriz aparecen cuatro subconjuntos claramente diferenciados de items (variables):

{LG2, LG5} {LE6, LG3} {LGE8, LT1} {LE7}

por lo que respecta a LG4 está más correlacionada con el primer subconjunto y algo menos con el segundo. Estos datos coinciden con el análisis jerárquico de conglomerados realizado anteriormente.

4.2. Cuestionario sobre la continuidad

Se ha seguido un proceso de análisis idéntico, al del cuestionario sobre el límite.

- **Porcentaje de resolución por alumnos**

Se ha creado una variable x2 que mide el porcentaje de solución del cuestionario por alumno, siendo su expresión:

$$x2 = \frac{\boxtimes \text{ puntuación de un alumno}}{8} \,\&\, 100$$

El estudio descriptivo de esta variable se presenta a continuación:

La variable X2 toma cualquier valor de 0 a 100. La media de los porcentajes de resultados de resolución es del 54,4% y la desviación típica del 26,6%.

Considerando independientemente los alumnos de COU y de 2º B.U.P., los resultados son los siguientes:

Los resultados son mejores que los obtenidos para el límite; en el caso de COU las medias son de 55,4% en el límite y 60,4% en continuidad y para 2º de B.U.P. las diferencias son más acusadas siendo un 23,7% y 40,9% respectivamente. Por otra parte las desviaciones típicas en ambos cursos son menores en el cuestionario sobre continuidad. No obstante, a nuestro juicio, los resultados muestran que un número muy elevado de alumnos no contestan correctamente, a pesar de haber recibido una enseñanza específica de este concepto.

El histograma de frecuencias es el siguiente:

Igual que ocurría con el límite, las tres medidas de centralización difieren mucho unas de otras; además el valor de la curtosis y de la asimetría nos conducen a afirmar que la distribución no se ajusta a la normal.

- **Porcentaje de resolución por items**

Se ha creado una nueva variable y definida igual que en el caso del límite para calcular los porcentajes de resolución de cada item.

Los valores por items son:

item	valor
CE8	9,66
CE7	44,14
CG5	45,52
CG3	46,90
CG4	59,31
CG1	63,45
CE6	73,10
CG2	75,15

El recorrido de la variable va desde el 9,66% hasta el 75,15%; siendo el rango 65,51%. Se pueden establecer cuatro grupos de items según porcentajes similares de resolución:

porcentaje	items
-10%	CE8
40% - 50%	CE7, CG5, CG3
59% - 70%	CG4, CG1
70% -	CE6, CG2

El item CE8 es contestado correctamente por menos del 10% a nuestro juicio, esto se debe a que es una función "rara" restringiéndose el estudio de la continuidad al conjunto de los números naturales. En el caso de 2º de B.U.P. ningún alumno lo resuelve correctamente. La definición de continuidad no "funciona" en este caso. Por contra, más del 70% de los alumnos resuelven correctamente los items CG2 y CE6, que se refieren a una gráfica con agujero y un polinomio respectivamente. En el primer caso utilizan la idea intuitiva de continuidad y en el segundo utilizan un teorema conocido. Llama la atención que el item CG1 no sea contestado correctamente por un 36,6%, cuando los investigadores esperábamos, que casi todos los alumnos tuvieran éxito en dicho item. Creemos que esto puede ser debido a que es una función con puntos angulosos, a las que el mismo Euler negaba la condición de continuidad. En los items CG3 y CG4, las funciones son discontinuas en ciertos puntos, aunque están definidas en dichos puntos. Esta condición puede "chocar" con la concepción de algunos alumnos de que una función es continua si está definida en el punto. Finalmente, en el item CG5, hay una dificultad añadida relacionada con el infinito.

- **Análisis jerárquico de conglomerados**

Se ha procedido igual que en el análisis del cuestionario del límite, es decir, en primer lugar, se ha calculado la matriz de coeficientes de correlación de similitud (anexo 5.2.2.). En dicha matriz se puede ver que el mayor índice de correlación corresponde a CG2 y CG3 (0,4784) que serán el par de variables que se agrupan en primer lugar; en sucesivas etapas se van agrupando el resto de las variables, siguiendo el siguiente esquema:

Etapa 1

C_1 = {CG2}, C_2 = {CG3}, C_3 = {CG1}, C_4 = {CE7}, C_5= {CG4}, C_6 = {CG5} C_7 = {CE6}, C_8 = {CE8}

Etapa 2

C_1 = {CG2, CG3}, C_2 = {CG1}, C_3 = {CE7}, C_4 = {CG4}, C_5 = {CG5}, C_6 = {CE6}, C_7 = {CE8}

Etapa 3

C_1 = {CG2, CG3}, C_2 = {CG1}, C_3 = {CE7, CG4}, C_4 = {CG5}, C_5 = {CE6}, C_6 = {CE8}

Etapa 4

C_1 = {CG2, CG3, CG1}, C_2 = {CE7, CG4, CG5}, C_3 = {CE6}, C_4= {CE8}

Etapa 5

C_1 = {CG2, CG3, CG1, CE7, CG4, CG5}, C_2 = {CE6}, C_3 = {CE8}

Esto se refleja en la siguiente tabla, en el gráfico de carámbanos y en el dendograma correspondiente:

- **Análisis factorial**

Se ha procedido, de manera similar al cuestionario para el límite, a hacer un análisis factorial, cuyos resultados se recogen en el anexo 5.2.3. Se observa que hay dos autovalores mayores que 1 correspondientes a las variables CE6 y CE7, pero si nos quedamos con un subespacio vectorial de 2 dimensiones, la calidad de representación de algunas variables es muy buena, pero para otras no lo es tanto, por consiguiente se ha decidido considerar, cuatro factores, eN donde la calidad de representación de la muestra aumenta hasta el 70,6%.

La matriz factorial es la siguiente:

En esta matriz aparecen cuatro subconjuntos claramente diferenciados de items {CG3,CE7,CG2,CG4,CG5}, {CE6}, {CE8}, {CG1} pero este último item está bastante correlacionado con el primer subconjunto. Este agrupamiento coincide con la etapa 5 del análisis jerárquico de conglomerados visto anteriormente.

5.- Resultados del análisis de las justificaciones.

En los cuestionarios que se presentaron a los alumnos, éstos no solo tenían que decidir cuál era el límite de una función en un punto o si la función era continua en un punto especificado. Deben explicar por qué les daba una determinada solución. Aparecen entonces los criterios de justificación utilizados para dar dichas explicaciones.

5.1. Categorías de los criterios de justificación

A partir de las respuestas dadas por los alumnos en el precuestionario, se establecieron ciertas categorías que agrupaban justificaciones en las que subyacía una misma idea. Algunos criterios, se podían incluir en más de una categoría, porque en las explicaciones se entremezclaban varias ideas (concept image, Tall y Vinner (1981)). La norma que usamos para decidir en cuál de ellas lo clasificábamos tenía en cuenta:

a) Las justificaciones usadas en otros items (si se observaba una cierta tendencia a utilizar una misma idea, ésta determinaba la clasificación).
b) la repetición de una idea en el mismo item (algunas justificaciones parecen tener una idea conductora de la justificación que es la que se usa para incluirla en una categoría).

Entre dichas justificaciones hay al mismo tiempo algunas que son válidas y otras que no las son. En total hemos considerado 13 categorías relacionadas con el límite y 15 con la continuidad que se presentan a continuación. En cada uno de los criterios hemos elegido expresiones escritas por los alumnos, que ayudan a comprender el enunciado genérico de ese criterio.

JUSTIFICACIONES PARA EL LÍMITE

L1: <u>Aproximarse</u>.

"cuando x se aproxima a 1, f(x) es igual a 3"
"el límite es infinito porque nunca se llega a B"
"el límite es infinito porque cada vez se va a más"
"los valores se acercan pero nunca se va a llegar hasta él"
"cuando x es casi 1, la función valE casi 3"
"dada la sucesión de valores de x que tiene por límite 1, la sucesión de sus imágenes tiene por límite 3"
"la función se acerca por ambos lados sin llegar a él"

L2: <u>El valor de la función en el punto</u>

"el límite es 1porque al sustituirlo queda 1"
"si la x tiende a 1 queda √-4 y los números negativos no tienen raíz"
"no existe, las ramas no llegan a ningún punto"
"el límite es el valor que toma la variable dependiente cuando la variable independiente tiende al punto x_0"
"no hay límite, cuando x tiende a ≡, la y va tomando diferentes valores"
"el valor de la función no existe"

L3: <u>Utilización de los límites laterales</u>

"no tiene límite porque no se unen los límites laterales"
"... tenemos que hallar los límites laterales ..."
"... hay un límite lateral por la izquierda y otro por la derecha. Cuando esos dos límites coinciden en ese punto, esa función es continua"
"el límite de la función es 1 porque cuando la función tiende a 2 por la izquierda y por la derecha dicha función toma 0 o tiende a tomar el valor 1"
"no existe el límite de f(x) cuando x tiende a 1 porque la función toma distintos valores por la izquierda y la derecha"

L4: La función es continua

"es una función continua"
"es una función discontinua de primera especie"
"se observaría una discontinuidad de salto finito en el punto conflictivo 0"
"es continua toda la función menos en el punto 1"
"esta función es continua, y derivable en dicho intervalo"
"en el punto (1, 3) la función tiene una discontinuidad evitable"

L5: Utilización de la fórmula de la derivada

"... al hacer el límite es derivable en dicho punto"
"$\lim_{x\delta 1^-} f(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $\lim_{x\delta 1^+} f(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ "

L6: Utilización de funciones conocidas

"la y es el cuadrado de f(x)"
"$\lim_{x\delta 0} f(x) = 0$ porque es una hipérbola equilátera"
"$f(x) = \ln x$"
"no tiene límite porque se trata de una función trigonométrica"
"es una onda"
"es la gráfica del seno, en su progresión al infinito toma todos los valores entre –1 y 1"
"es una función armónica"

L7: La función tiene ramas

"la gráfica nos da dos funciones simétricas, cuando x sea cero, será cero en las dos"
"la función tiene dos partes del límite, por un lado tiende a un valor y por otro a otro valor infinito"

L8: <u>Concepto de indeterminación</u>

“1^3-1/1-1 = 0/0 indeterminación, el límite no es 3”
“lim $_{x\delta 1}$ (x^3-1)/(x-1) = 0/0 indeterminación, así lim $_{x\delta 1}$ (x^3-1)/(x-1) =
= lim $_{x\delta 1}$ 3x^2 /1 = 3/1 =3”
“lim $_{x\delta 1}$ $\dfrac{(x-1)\,(x^2+x+1)}{x-1}$ = 3”

L9: <u>Visual</u>

“no existe porque en 0 no hay gráfica”
“el área del triángulo pasaría de ser un triángulo a una recta”
“por medio de la gráfica vemos que la función va oscilando luego cuando xδ≡ el límite no existe”
“el límite es infinito porque la función sigue, no se corta”
“el límite de f(x) es el punto (2,1) el cual corta la raya y pasa por el punto”

L10: <u>Definición formal</u>

“lim$_{x\delta a}$ f(x) = b si y sólo si para todo ε > 0, existe un δ tal que si 0 < ξx-aξ < δ εξf(x)-bξ < ε”
“… E (3,ε) | E* (1, δ) tal que si x ∈ E* (1, δ) entonces x^3-1/x-1 ∈ E (3, ε)”
“Para cualquier ε > 0 hay un k > 0 de manera que si x > k ξf(x)-lξ < ε”

L11: <u>Otras</u>

“Es 2 porque es en el último punto que corta al eje”
“El límite de una función es un punto a partir del cual caen todos los demás”
“El límite es infinito porque la función no tiene cotas”
“En ese punto la función no se anula”

L12: <u>Respuesta si/no sin justificación</u>

L13: <u>Ausencia de respuesta</u>

JUSTIFICACIONES PARA LA CONTINUIDAD

C1: <u>Se dibuja sin levantar el lápiz del papel</u>

“el trazo es continuo, no hay interrupciones”
“el trazado de la gráfica no se interrumpe”
“su gráfica se puede representar de un solo trazo”
“no se corta en ningún punto del intervalo”
“no es continua porque el punto x_0 no está incluido”
“no es continua porque no se puede dibujar sin levantar el boli del papel”

C2: La curva es discontinua porque tiene saltos

“no es continua porque está cortada en x_1 y en x_2”
“presenta una discontinuidad inevitable de salto finito”
“es una discontinuidad de salto”

C3: Curva que tiene asíntotas

“los dos trazos no se pintarán porque nunca se llegará a tocar el eje y”

C4: Asimilación con funciones conocidas

“sí porque es una parábola”

C5: Función definida a trozos

“no hay una sola función, sino dos que coinciden en un punto”
“no es continua porque va a cachos”
“no es continua porque una está en un eje y otra en otro y no se llegan a juntar"
“la función f(x) está definida en 3 tramos: En el tramo [1,2] la función no es continua pues el 1 si pertenece al intervalo cerrado [a, b] pero al ser abierto queda excluido. Lo mismo pasa en el punto 4. Por tanto el tramo continuo sería el [c,d]”

C6: Existe $f(x_0)$ y $\lim_{x\delta x_0} f(x) = f(x_0)$

“no es continua, no coincide el valor de la función con el valor del límite”
“es continua en R porque | $\lim_{x\delta 0} f(x)$ y es ≡ y además f(0) =≡ ”
“no es continua porque el límite de la función en un punto, no coincide con el valor de la función en el punto”
“$f(-1) = -1$, $\lim_{x\delta -1^-} f(x) = -1$ $\lim_{x\delta -1^+} f(x) = -x^2 + 1 = 0$ no es continua”

C7: Utilización de teoremas

“es continua porque f (x) es un polinomio” “una función polinómica es continua en R”

C8: La función es derivable

“una función continua es aquella que al hacer las derivadas laterales sale la misma solución por la derecha que por la izquierda”

C10: Relación entre los límites laterales sin tener en cuenta el valor de la función en el punto

“no es continua porque no coinciden los límites laterales”
“si es continua porque coinciden los límites laterales”
“no es continua, existen los límites laterales pero no coinciden”
“no es continua, ya que $\lim_{x\delta x1-} f(x)$! $\lim_{x\delta x1+} f(x)$”

C11: La función está definida en todo punto

“si es continua, porque todos los valores existen en R”
“no es continua, porque hay un punto que no está en la función”
“no es continua, ya que no lo es en x_0, $f(x_0)$ no existe”
“es continua porque existe en todos los puntos”
“el dominio es todo R”

C12: Continua en (a,b) pues es continua en todo punto del intervalo

“para que una función sea continua en un intervalo abierto debe ocurrir que sea continua en todos los puntos del intervalo”
“es continua porque …x_0 ? (a, b) $\lim_{x\delta x0-} f(x) = \lim_{x\delta x0+} f(x) = f(x_0)$”
“es continua en todos los puntos interiores, por lo tanto es continua en el intervalo (a, b)”
“no es continua en un punto del intervalo”

C13: Otras

“no es continua porque en el punto x_0 no está indicada”
“no es continua porque es inversa”
“no es una función”
“son dos funciones simétricas”
“no es continua, porque si fuera continua, si x ? N”
“para que f(x) sea continua en x = a tiene que estar acotada”

C14: Respuesta si/no sin justificación

C15: Ausencia de respuesta

5.2.- Estudio descriptivo de los criterios de justificación

Los datos se han organizado en dos tablas de doble entrada, una para límite y otra para continuidad (anexos 5.1.4. y 5.2.4., respectivamente) donde las columnas son los sujetos numerados del 1 al 145 y las filas son las mismas variables (items, instituto, sexo, curso, entorno, grupo) consideradas en las tablas de resultados. Los valores de las variables son los mismos que los indicados en la tabla de la página 36 salvo en las referidas a los items en las cuales los valores son los distintos criterios de justificación, en lugar de 0 y 1.

Para analizar esta matriz se ha utilizado el mismo paquete estadístico SPSS versión 6.1.3.

a) Límite

Para cada item se ha hecho la tabla de frecuencias de los criterios de justificación utilizadas para responder a dicho item, acompañada del gráfico de barras correspondiente (anexo 5.1.5.). Estos datos han permitido construir la siguiente tabla de contingencia donde las filas son los items y las columnas los criterios de justificación.

	LT1	LG2	LG3	LG4	LG5	LE6	LE7	LGE8	L9	Σ
L1	23	17	14	1	7	39	4	72	35	212
L2	5	27	6	6	11	10	9	1	14	89
L3	54	25	4	45	61	15	89	2	20	315
L4	4	20	3	17	6	6	1	0	1	58
L5	1	1	0	0	0	0	5	0	4	11
L6	3	1	54	5	9	1	0	0	0	73
L7	0	0	0	2	4	0	2	0	0	8
L8	0	0	0	0	0	17	1	0	0	18
L9	11	3	17	2	2	1	1	0	3	40
L10	5	4	1	0	1	14	0	0	22	47
L11	4	4	5	1	8	3	2	7	14	48
L12	16	17	13	22	16	21	4	8	2	119
L13	19	26	27	33	19	18	26	55	30	250

Se observa que globalmente hay ciertos criterios que son más utilizados que otros, es el caso de L3 (Utilización de límites por la derecha y por la izquierda) y L1 (Aproximarse). Sin embargo el criterio L10 (Definición formal) sólo se utiliza en 47 ocasiones, de las que 22 corresponden al item L9 donde se pedía que explicaran a un compañero el concepto de límite, y en 25 ocasiones para resolver tareas. Esto pone de manifiesto el desdoblamiento del modo de actuar de los alumnos que utilizan la definición formal cuando se les pide de forma más o menos explícita, pero no la tienen en cuenta cuando se enfrentan a situaciones problemáticas. Una vez más corroboran las ideas de Tall y Vinner (1981) con la distinción entre "definición del concepto" e "imagen del concepto".

Analizando la tabla item a item, se constata que hay criterios que se utilizan mayoritariamente para responder a dicho item.

item	Se responde mayoritariamente por	porcentaje
LT1	L3	37
LG2	L2 Y L3	18,5 y 17,1
LG3	L6	37
LG4	L3	30,8
LG5	L3	41,1
LE6	L1	26
LE7	L3	61
LGE8	L1	49,3
L9	L1	24

Estos criterios son L1 y L3, como se ha dicho anteriormente, pero además aparece L6 (Utilización de funciones conocidas) asociado al item LG3 (Función seno) y L2 (El valor de la función en el punto) asociado a LG2 (Función continua). En ambos casos, el enunciado del item da pie a usar dichos criterios con preferencia a otros. Finalmente, llama la atención que, aunque los alumnos han trabajado con el concepto de límite en su enseñanza reglada, en todos los items hay un elevado porcentaje de alumnos que no responden, o no justifican.

b) Continuidad.

Al igual que con el límite, se han hecho unas tablas de frecuencias para los criterios de justificación usados en cada item del cuestionario de continuidad (anexo 5.2.5.). A continuación se construyó la siguiente tabla de contingencia donde las filas son los items y las columnas son los criterios de justificación.

	CG1	CG2	CG3	CG4	CG5	CE6	CE7	CE8	C9	Σ
C1	50	22	21	15	8	2	9	3	62	242
C2	8	4	7	32	8	0	5	1	2	67
C3	0	0	0	0	22	0	0	0	0	22
C4	0	0	0	3	0	13	0	6	0	22
C5	7	3	1	6	5	0	6	0	0	28
C6	13	17	41	12	17	1	32	14	36	183
C7	0	0	1	0	0	85	5	4	1	96
C8	0	0	1	0	0	2	0	0	2	5
C9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C10	3	2	2	25	8	1	32	7	5	85
C11	23	62	24	14	30	17	10	17	10	207
C12	17	15	14	3	1	21	4	5	0	161
C13	8	6	10	11	16	5	8	51	5	120
C14	9	7	12	11	13	4	7	6	0	69
C15	1	1	5	7	11	8	21	25	16	95

De forma global los criterios más usados son C1 (Se dibuja sin levantar el lápiz del papel) y C11 (La función está definida en todo punto), a pesar de que este último criterio no es correcto. Los alumnos tienen una idea muy intuitiva de continuidad. Aunque en un número elevado de ocasiones (183) utilizan el criterio C6 (existe $f(x_0)$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$), sin embargo <u>ningún</u> alumno utiliza en ninguna ocasión el criterio C9 (Definición formal de continuidad). Las respuestas al último item confirman esta manera de hacer de los alumnos; siendo el criterio más utilizado C1, pero teniendo también una gran frecuencia C6.

Analizando la tabla item a item, también se constata que hay criterios que se utilizan mayoritariamente para responder a dicho item.

<u>item</u>	<u>Se responde mayoritariamente por</u>	<u>Con frecuencia</u>
CG1	C1	34,2
CG2	C11	42,5
CG3	C6	28,1
CG4	C2 y C10	21,9 y 17,1
CG5	C11	20,5
CE6	C7	58,2
CE7	C6 y C10	21,9 y 21,9
CE8	C13	34,9
C9	C1	42,5

Estos criterios son C1, C11 y C6 como se indicó antes, pero también aparece C10 (Relación entre los límites laterales sin tener en cuenta el valor de la función en un punto) y C2 (La curva es discontinua porque tiene saltos) asociados con items referidos a funciones definidas a trozos (CG4 y CE7) y C7 (Utilización de teoremas) relacionados con el item CE6 en el que se da la expresión algebraica de un polinomio de segundo grado.

En el item CE8 sobre continuidad en el conjunto de los números naturales, que sólo fue contestado correctamente por 18 alumnos (aunque muchos más dieron justificaciones), los criterios utilizados fueron muy diversos, sin poderse encuadrar en los que se usaron para el resto de las preguntas.

Conclusión

Recordemos que en nuestra investigación pretendemos encontrar las concepciones que tienen los alumnos de 2º de B.U.P. y COU sobre el límite funcional y la continuidad y tratar de encontrar las posibles relaciones existentes entre dichas concepciones y las que han aparecido en el desarrollo histórico de ambos conceptos.

a) Continuidad.

Del análisis del cuestionario reflejado en las páginas anteriores y del estudio histórico realizado en el capítulo 1, podemos establecer una cierta relación entre los criterios de justificación en que hemos clasificado las respuestas de los alumnos y las concepciones que aparecían en dicho desarrollo histórico. Así, por ejemplo, el criterio C1 (se dibuja sin levantar el lápiz del papel) y C2 (discontinua porque tiene saltos) pueden considerarse próximos a la concepción intuitiva o geométrica que aparece en los trabajos de Descartes, Newton o Leibniz. Los criterios C5 (definida por trozos) y C8 (es continua porque es derivable) correspondería a la concepción de Euler; en efecto la condición de derivabilidad supone la falta de puntos angulosos en la gráfica de la función, lo que se traduce a la idea euleriana de estar definida "de una sola vez". El criterio C9 corresponde a la definición de Weierstrass. En cuanto al criterio C6 ($\lim_{x\delta x0} f(x) = f(x_0)$) le podemos asociar con la concepción de Cauchy, y con la de Weierstrass, aunque en la mayoría de los casos los alumnos se limitan a aplicar un algoritmo. El criterio C11 (la función está definida en todo punto) correspondería a una concepción errónea, muy instalada en la mente de los alumnos. Los restantes criterios de justificación no los podemos asociar a ninguna de las concepciones, sino que serían más bien inducidos por la enseñanza recibida por los alumnos; en efecto los programas incluyen consideraciones sobre asíntotas (criterio C3), trabajos con funciones conocidas (criterio C4), teoremas que se enuncian y demuestran a lo largo del curso (criterio C7), límites laterales (criterio C10) y definiciones de continuidad en un intervalo abierto o cerrado (criterio C12). En este sentido el mismo criterio C6 podría ser considerado dentro de este grupo. Hay dos concepciones claramente erróneas que son la de Euler y la que asegura que una función es continua si está definida en todo punto de su dominio de definición.

Por otra parte, si consideramos la frecuencia de los criterios de justificación por parte de los alumnos, ya se señaló que el más usado es el C1 (se dibuja sin levantar el lápiz del papel), que hemos considerado próximo a la concepción intuitiva o geométrica, por tanto, esta sería la concepción dominante. A continuación, vendría la concepción (errónea) ligada al criterio de justificación C11 (la función está definida en todo punto). La tercera concepción dominante es la relacionada con el criterio C6 (existe $f(x_0)$ y $\lim_{x\delta x0} f(x) = f(x_0)$). Sin embargo la concepción de Weierstrass que corresponde al criterio C9 (definición formal) no se manifiesta en ningún alumno.

Se observa también, al analizar la tabla de justificaciones (anexo 5.2.4.) que la mayoría de los alumnos utilizan cada uno de ellos, diferentes criterios de justificación, por lo que parece razonable, pensar que hay una multiplicidad de concepciones sobre la continuidad de cada alumno, aunque es una cuestión que queda abierta para un estudio posterior.

Es interesante analizar las respuestas dadas en el último item y su relación con las dadas para los demás items. Se observa que el mayor número de criterios de justificación corresponde a C12 (se dibuja sin levantar el lápiz del papel) lo que está en consonancia con el resto de los items y refleja la concepción intuitiva de los alumnos acerca de la continuidad. También hay que señalar el gran número de respuestas asociadas al criterio C6 (existe $f(x_0)$ y $\lim_{x\delta x0} f(x) = f(x_0)$). Sin embargo, el criterio C11 (la función está definida en el punto) es más utilizado al resolver las tareas de los otros items que el criterio C6.

b) Límite

Por lo que se refiere a las concepciones de los alumnos sobre el límite funcional, es más complejo hacer una clasificación por la mayor sutileza de este concepto. Esto se refleja por ejemplo en los estudios de

Cornu (1983), Sierpinska (1985, 1987) y Williams (1991) en los que las clasificaciones realizadas son dispares, aunque hay una conclusión unánime de la dificultad de la comprensión de este concepto en los últimos años de la educación secundaria y primer año universitario.

Al igual que en el caso de la continuidad hemos tratado de relacionar los criterios de justificación con las concepciones que han aparecido en el desarrollo histórico.

El criterio L1 (aproximarse) correspondería a las concepciones de D'Alembert y de Cauchy. Tanto en la definición de D'Alembert como en la de Cauchy se expresa el concepto de límite como "cantidades variables que se aproximan a una fija difiriendo de ella en menos de una cantidad dada" aunque en D'Alembert el límite no se puede alcanzar y en Cauchy es alcanzable.

El criterio L2 (sustituir el valor de la función en el punto) es próximo a la idea de Euler y Lagrange donde la atención se centra exclusivamente en los aspectos relacionados de la función sin tener en cuenta los entornos. Y el criterio L10 (definición formal) corresponde a la definición ε, δ de Weierstrass. El criterio L4 (la función es continua) puede ser producto de una contaminación de la idea de límite por la continuidad, y en el L9 (visual) parece que los sujetos solamente razonan sobre la representación de la función sin usar la noción de límite. El resto de los criterios de justificación serían más bien inducidos por la enseñanza recibida por los alumnos. En efecto, los programas incluyen: concepto de límite lateral (criterio L3), derivadas (criterio L5), indeterminaciones (criterio L8) y trabajo con funciones conocidas (criterio L6). En cuanto al criterio L7 (la función tiene ramas) se puede considerar por un lado como conocimiento escolar pero también ligada a la concepción de Euler sobre funciones.

Si consideramos la frecuencia de los criterios de justificación por parte de los alumnos, ya se señaló que el más utilizado es el L3 (utilización de límites por la derecha y por la izquierda) que lo hemos clasificado como conocimiento escolar. A continuación vendría L1 (Aproximarse) que corresponde a las concepciones de D'Alembert y de Cauchy. La tercera concepción dominante sería la de Euler y Lagrange que hemos asociado al criterio L2 (sustituir el valor de la función en el punto). La concepción de Weierstrass correspondiendo a L10 (definición formal ε, δ) es utilizada esporadicamente.

Al igual que hemos afirmado para la continuidad la mayoría de los alumnos utilizan, cada uno de ellos, diferentes criterios de justificación, por lo que parece razonable pensar que cada alumno tiene una multiplicidad de concepciones sobre el límite, quedando esta cuestión abierta para un estudio posterior.

Si analizamos las respuestas dadas en el último item, se observa que el mayor número de respuestas corresponde a L1 (aproximarse) que refleja la concepción intuitiva de los alumnos acerca del límite, estando en segundo lugar los criterios L10 (definición formal ε, δ) y L3 (utilización de límites por la derecha y por la izquierda) que corresponden a las concepciones formales relacionadas con el límite.

Referencias.

Cornu, B. (1983): *Apprentissage de la notion de limit. Conceptions et obstacles*. These de doctorat de troisieme cycle des mathematiques pures. Université de Grenoble.

Sierpinska, A. (1985): Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didáctique des Mathematique*, 6.1, 5-67.

Sierpinska, A. (1987): Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.

Williams, S. (1991): *Models of limits help by college students*. Journal for Research in Mathematic Education, 22, 219-236.

Tall y Vinner (1981): *Concept image and concept definition in mathematic with particular reference to limit and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

CAPÍTULO 3

PLANES DE ESTUDIO.
ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO: 1940-1995.

Introducción.

En este capítulo se estudian los planes de estudio de Bachillerato desde la Segunda República hasta la Ley de Ordenación General del

Sistema Educativo (L.O.G.S.E.) promulgada en 1990, y se hace un análisis de libros de texto durante este periodo referido a los conceptos de límite y continuidad. Los Decretos y Órdenes Ministeriales sobre planes de estudio determinan el currículo oficial, pero son los libros de texto los que fijan este currículo en la actividad diaria del aula, por lo que su análisis parece necesario más allá de las frías disposiciones ministeriales. Además, este análisis de libros de texto pondrá de manifiesto el proceso de elementarización o transposición didáctica desde el saber matemático como ciencia al saber enseñado por los profesores.

1.- Planes de estudio de Bachillerato.

Vamos a estudiar los planes de estudio de Bachillerato y del Curso de Orientación Universitaria (llamado Preuniversitario antes de la Ley General de Educación). Para dicho estudio hemos utilizado las disposiciones oficiales de cada momento y los trabajos de Rico y Sierra (1994,1997). Presentaremos una visión general de cada plan de estudio, y particularizaremos para el caso de límite y continuidad.

1.1.- Planes de estudios durante la Segunda República.

Con la proclamación de la República, 1931, con Marcelo Domingo como Ministro de Instrucción Pública y Bellas Artes, se derogó el Plan Callejo, elaborado durante la dictadura de Primo de Rivera, y se restableció el Plan de 1903 con pequeñas modificaciones; en 1932 se revisó este plan de estudios.

En el año 1934, durante el Ministerio de Filiberto Villalobos, se estableció un nuevo Bachillerato que constaba de siete cursos que incluían la asignatura de Matemáticas en cada uno. Según señalan Rico y Sierra (1994), este plan establecía que el primer ciclo de la enseñanza -los tres primeros cursos- tuviese un carácter instrumental e intuitivo. El segundo ciclo se divide en dos grados, en el primer grado - cursos cuarto y quinto - las asignaturas tendrán propósito formativo y desarrollo cíclico; en el segundo grado - sexto y séptimo - se profundizaba en las disciplinas.

En este nuevo Bachillerato, en quinto curso, dentro del bloque Aritmética y Álgebra, aparece en los cuestionarios:

> *Idea de límite de una función. Idea de continuidad y discontinuidad.*

En sexto curso, dentro del mismo bloque:

Límite de una sucesión de números reales. Límites de las sucesiones formadas con la suma, producto y cociente formada por otras dos. Formas simbólicas de las fracciones.

En séptimo año, dentro del bloque de Análisis:

Continuidad de funciones.

Este plan de estudios tiene un carácter cíclico y unitario, superando la división en asignaturas de matemáticas poco coordinadas de planes anteriores.

Los cuestionarios oficiales se acompañan con unas observaciones sobre enseñanza y exámenes, donde se hacen recomendaciones tendentes a limitar el grado de abstracción de las materias enseñadas, adaptándola a la edad mental de los alumnos, procuran evitar que los alumnos lleguen a considerar las Matemáticas como una ciencia desligada de la realidad, a la necesidad de proponer numerosos ejercicios fundamentados en la vida real o en cuestiones suscitadas por otras disciplinas, especialmente la Física. Sin embargo no hay recomendaciones sobre la enseñanza del Análisis y, en particular, sobre el límite y la continuidad.

1.2.- Planes de estudios durante la Guerra Civil y la Posguerra.

El gobierno de la República no elaboró modificaciones ni nuevos Planes de Estudios durante la Guerra Civil. Por el contrario, el Gobierno de Franco, siendo Ministro Sainz Rodríguez, preparó un nuevo Plan en 1938 que tendría vigencia durante la Posguerra.

Este plan seguía organizando los estudios de Bachillerato en siete cursos, estableció un Examen de Estado al finalizar el mismo, reguló la edición de libros de texto, y estimuló la iniciativa privada para la creación de centros de enseñanza. Ideológicamente, estaba dedicado a exaltar los valores religiosos, patrióticos y conservadores, prevaleciendo los aspectos formativos y de orientación ideológica y política sobre los instrumentales y los utilitarios. También, trataba de aunar los aspectos humanísticos y científicos en un solo tipo de Bachillerato. La asignatura de Matemáticas formaba parte de los programas de los siete cursos de bachillerato, y se desarrollaba sobre un esquema cíclico. En la distribución de materias según el Boletín Oficial del Estado de 23 de Septiembre no aparece explícitamente Cálculo Diferencial e Integral, aunque la costumbre de la época era introducir esta parte en los contenidos de Álgebra o de Álgebra Superior.

1.3.- Planes de estudios en la década de los cincuenta.

En 1953 (B.O.E. de 2 de Julio) se establece un nuevo plan de estudios para el Bachillerato. La nueva organización rompe el carácter unitario que hasta entonces había tenido. Sus características fundamentales son:

- Seis cursos de duración, donde los cuatro primeros son comunes (bachillerato elemental) y los dos últimos (bachillerato superior) están divididos en dos especialidades denominadas Ciencias y Letras.
- Instauración de un examen de carácter nacional, denominado reválida, al final de cada bachillerato.
- Establecimiento de un curso puente con los estudios superiores, denominado preuniversitario, cuya organización y evaluación es compartida con la Universidad.

La asignatura de Matemáticas es obligatoria en el Bachillerato Elemental y en la especialidad de Ciencias del Bachillerato Superior.

En lo que se refiere al límite y a la continuidad aparece en los cuestionarios de sexto curso dentro del bloque de Análisis:

> *Operaciones con números reales. Límite de una sucesión de números reales. Infinitésimos. Cálculo de Límites.*
> *El número e.*
> *Función. Idea de función continua. Función de funciones.*

Al final de los cuestionarios aparecen unas orientaciones metodológicas para cada uno de los cursos, limitándose, a lo que se refiere al Análisis, a afirmar que se consideraba necesario introducir nociones de cálculo infinitesimal en el Bachillerato y considera el número *e* “sin el que no es posible dar un paso en esta rama de las matemáticas”. No hay más consideraciones sobre la enseñanza del Análisis.

Este plan de estudios fue modificado en el año 1957 (O.M. de 31 de Mayo de 1957) corrigiendo algunos fallos organizativos, pero sin presentar cambios fundamentales.

Por lo que se refiere al Preuniversitario, no se establecieron programas, sino que en cada asignatura, y en particular en Matemáticas, se estudiaban temas monográficos que cambiaban cada año, según directrices del M.E.N.

1.4.- Introducción de la matemática moderna en el Bachillerato.

Durante la década de los sesenta la "matemática moderna" se va introduciendo en los programas de Bachillerato. El punto de arranque lo podemos situar en la Reunión de Catedráticos de Matemáticas de Enseñanza Media que, organizada por el Centro de Orientación Didáctica del Ministerio de Educación Nacional, se celebró en Madrid en 1959, con el título "Nuevas orientaciones en la Enseñanza de las Matemáticas". En dicha reunión, D. Pedro Abellanas, catedrático de Geometría de la Universidad Central, disertó sobre las bondades de la nueva corriente en la enseñanza de las Matemáticas.

En 1962 se constituyó la "Comisión para el Ensayo Didáctico sobre Matemática Moderna en los Institutos Nacionales" (creado por O.M. de 7 de Diciembre de 1961) presidida por el profesor Abellanas y cuyo trabajo piloto se desarrollará en los Institutos "Cervantes" (Madrid) por el profesor J.R. Pascual Ibarra; "Milá y Fontanals"(Barcelona) por el profesor J. Casulleras y "Padre Suárez" (Granada) por el profesor F. Marcos de Lanuza. La comisión editó, en los años 1967 y 1969, textos piloto para el 5º y 6º curso de Bachillerato respectivamente. También el Ministerio editó unos Cuadernos Didácticos dedicados a desarrollar temas de matemáticas modernas. A partir del año 1963 hasta el año 1966, la revista Enseñanza Media publicó una serie de artículos bajo el título: "Lecciones de matemática moderna"; de este modo, y progresivamente, se fue implantando un programa de matemática moderna en el Bachillerato cuyos cimientos es la Teoría de Conjuntos y que maneja las estructuras de las matemáticas en sentido bourbakista, es decir, las estructuras algebraicas, de orden y topológicas.

Los textos piloto se convirtieron, de hecho, en el nuevo programa de Matemáticas en el Bachillerato.

Por lo que se refiere al límite y a la continuidad, en 5º curso se hace una breve introducción a estos conceptos dentro del capítulo dedicado a Funciones de variable real y en 6º curso, dentro de un capítulo titulado de igual manera, se profundiza en ambos conceptos, primando el punto de vista topológico como veremos al estudiar dichos textos.

1.5.- Planes de estudios a partir de la Ley General de Educación.

A comienzos de la década de los setenta se emprende una reestructuración del sistema educativo español, que culmina con la aprobación de la Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, promulgada el 4 de Agosto de 1970. Se estableció el Bachillerato Unificado y Polivalente, B.U.P., y el Curso de Orientación Universitaria, C.O.U., necesario para acceder a estudios universitarios. La duración del Bachillerato se estableció en tres cursos (14-17 años). El plan de estudios se estructuraba en materias comunes, materias optativas y enseñanzas y actividades técnico-profesionales.

Las Matemáticas aparecieron como una asignatura dentro del área "Ciencias Matemáticas y de la Naturaleza". Sin embargo, hasta el año 1975 no se estableció el curriculo para el nuevo Bachillerato (Decreto del 23 de enero de 1975, desarrollado en el B.O.E. del 18 de Abril del mismo año). Las Matemáticas tenían carácter de asignatura obligatoria en cada uno de los tres cursos del Bachillerato, aunque posteriormente las de tercer curso pasaron a ser opcionales.

El programa mantiene una orientación formalista y estructuralista. Rico y Sierra (1997) señalan tres ideas que sustentan el convencimiento del carácter irreversible dado al programa de las matemáticas modernas: en primer lugar, el carácter científico, completo y avanzado del nuevo programa de las matemáticas escolares. Este punto de vista es parcial e incompleto ya que se desconocen las dificultades de fundamentación y desarrollo de la mayor parte de los temas de la matemática elemental en base al programa bourbakista. La segunda idea, fue la supuesta implantación de estos programas en la mayoría de los países, salvo raras excepciones y su aceptación universal. La tercera razón, fue la legitimación desde el punto de vista de la psicología, bajo la influencia de los grandes psicólogos cognitivos de la época, principalmente Piaget y Bruner. Sin mayor criterio, durante años se defendió que la enseñanza de estructuras matemáticas a niños y adolescentes estaba fundada en argumentos cognitivos, respondía a una moderna teoría del aprendizaje y tenía carácter evolutivo. "Tenemos pues que en los años setenta se produce en España una confluencia de intereses entre algunos profesores universitarios, ciertos responsables administrativos del diseño curricular y algunos psicólogos de la educación quienes, con una considerable deficiencia de formación sobre el curriculo de las matemáticas, sus problemas y limitaciones, establecen un programa de formación formalista desde preescolar hasta la universidad.

La vigencia de este curriculo la ciframos en ventidos años y su periodo de influencia indiscutible de sitúa en la década de los setenta” Rico y Sierra (1997).

Salvo algunas excepciones, el programa de la matemática moderna se recibió acriticamente y se incorporó a nuestro sistema educativo sin una reflexión propia sobre nuestras necesidades específicas.

Por lo que se refiere al límite y a la continuidad en los documentos oficiales aparece en 2º curso:

Función real de variable real. Límite. Continuidad.

Y se da la siguiente orientación didáctica:

El concepto de límite convendrá introducirlo en su forma métrica; el cálculo de límites debe reducirse a casos sencillos.

En cuanto al Curso de Orientación Universitaria se consolida la tendencia a considerarlo como el último año del Bachillerato, aunque la coordinación corresponde a las universidades a través de sus Institutos de Ciencias de la Educación. Así se establece, en primera instancia, en la Orden Ministerial de 30 de Septiembre de 1970, por lo que se dictan normas para la implantación con carácter experimental del Curso de Orientación Universitaria. Esta Orden consideraba materias fundamentales, materias optativas técnicas de trabajo intelectual y cursillos o seminarios de orientación universitaria propiamente dicha.

Entre las materias fundamentales aparece:

Matemática, entendida como lenguaje científico utilizado tanto en el campo de las ciencias naturales cuanto en las sociales y antropológicas.

Las materias optativas se entendían como ciencias fundamentales relacionadas con determinadas especialidades de estudios superiores. Se agrupaban en cuatro grandes apartados, siendo uno de ellos:

Física-Química, Geología, Biología y Matemáticas.

Posteriormente, en el mismo decreto en el que se aprobaba el Plan de Estudios del Bachillerato, se reguló el Curso de Orientación Universitaria, estableciendo un núcleo de materias comunes y dos opciones; en cada opción aparecían, a su vez, dos materias obligatorias y tres optativas debiendo escoger el alumno dos de éstas. Las Matemáticas figuran como optativa en la opción A y como obligatorias en la opción B.

El programa contenía cuatro grandes temas:

Sistemas de ecuaciones lineales (seis semanas). Espacio afín y euclídeos tridimensionales (ocho semanas). Ampliación de cálculo diferencial e integral (nueve semanas). Ampliación del cálculo de probabilidades (cuatro semanas).

No se pormenoriza el contenido de estos grandes temas. Hay unas brevísimas orientaciones didácticas. En nuestro caso, no hay mención explícita al límite y a la continuidad.

Más tarde, la Orden de 3 de Septiembre de 1987 modifica la estructura del plan de estudios de C.O.U., distribuyendo en cuatro opciones las materias de las dos anteriormente existentes, e incorporando a las opciones C y D las enseñanzas de Matemáticas II, específicas para estas opciones, orientadas hacia las ciencias humanas y sociales. Por Resolución de 20 de Enero de 1988 se establece el programa de esta asignatura, con tres grandes temas:

Elementos de álgebra lineal. Análisis descriptivo de funciones y gráficas. Elementos de Probabilidad y Estadística.

En el segundo tema aparece:

Idea intuitiva de continuidad.

Y las siguientes orientaciones didácticas:

No es imprescindible la formalización del concepto de límite ni utilizar una notación rigurosa para definir un vocabulario básico.
Ni el cálculo sistemático de límites.

Estos planes de estudios del Curso de Orientación Universitaria tienen vigencia actualmente, mientras se implanta en el sistema educativo la nueva reforma.

1.6.- Plan de estudios derivado de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (L.O.G.S.E.).

Durante la década de los 80, se produjo un amplio debate sobre la reforma educativa en España que culminó con la aprobación y promulgación en 1990 de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (L.O.G.S.E.) que ha supuesto una profunda transformación de dicho sistema. Esta ley establece una nueva etapa de 12 a 16 años denominada Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.). El Bachillerato se reduce a dos años de duración, suprimiéndose el Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.), que se cursará como regla general entre los 16 y los 18 años. Se han establecido cuatro modalidades de Bachillerato: Artes, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, Tecnología y Humanidades y Ciencias Sociales.

En el Real Decreto 1178/1992 de 2 de Octubre se fijan las enseñanzas mínimas para el Bachillerato, desarrolladas por el M.E.C. para los centros de ámbito territorial de su competencia en el Real Decreto 1179/1992 de 2 de Octubre. Según este Real Decreto las Matemáticas son materias propias en los 2 cursos de las modalidades de: Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, Humanidades y Ciencias Sociales y Tecnología. Entre las materias optativas del Bachillerato de Artes, hay una asignatura de Matemáticas de la forma.

La asignatura de Matemáticas I de las modalidades de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, y Tecnología tiene los siguientes núcleos temáticos: Estadística y Probabilidad, Geometría, Funciones, Aritmética y Álgebra y Resolución de Problemas. La asignatura Matemáticas II tiene los siguientes núcleos: Álgebra Lineal, Análisis y Geometría.

La asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, tiene los siguientes bloques: Aritmética y Álgebra, Funciones, Estadística y Probabilidad y Resolución de Problemas y las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II: Álgebra, Análisis y Estadística y Probabilidad.

Los bloques de contenido son precedidos de una introducción en la que se explicitan las nuevas orientaciones que el M.E.C. pretende en la enseñanza de las Matemáticas y van seguidos de unos criterios de evaluación. Estas nuevas orientaciones inciden en el triple papel que deben desempeñar las Matemáticas en el Bachillerato: instrumental, formativo y de fundamentación teórica. Resaltan el papel de las Matemáticas como un conjunto de conocimientos que nacen de la necesidad de resolver determinados problemas prácticos, y remarca la idea de que participar en el conocimiento matemático consiste, más que en la posesión de los resultados finales de esta ciencia, en el dominio de su “forma de hacer”.

Por lo que se refiere al límite y la continuidad, en Matemáticas I, dentro del epígrafe de Funciones, de las modalidades de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnología, aparece:

> *Tratamiento intuitivo y gráfico de ramas infinitas, continuidad, derivabilidad y área bajo una curva. Utilización de estos conceptos en la interpretación de todo tipo de fenómenos con relaciones funcionales.*

Y en Matemáticas II, dentro del epígrafe de Análisis:

> *Introducción a los conceptos de límite y derivada de una función en un punto.*
> *Cálculo de límites y derivadas de las familias de funciones conocidas.*
> *Aplicación de los conceptos de límite y derivada a la representación de funciones y al estudio de situaciones susceptibles de ser tratadas mediante las funciones.*

En las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, dentro del epígrafe de Funciones, aparece:

> *Análisis del dominio, crecimiento y decrecimiento, valores extremos y tendencias de funciones y gráficas. Idea gráfica de continuidad.*

Y en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, en el epígrafe de Análisis:

> *Aproximación al concepto de límite, a partir de la interpretación de las tendencias de una función. Ramas infinitas.*
> *Aplicación del límite y la derivada a la determinación e interpretación de las propiedades locales de funciones habituales basadas en situaciones contextualizadas.*

En este nuevo currículo del Bachillerato, apreciamos que los conceptos de límite y continuidad se presentan y estudian resaltando su conexión con la interpretación de funciones y fenómenos naturales o sociales, y con el concepto de derivada.

2.- Análisis de libros de texto: 1940-1995.

2.1.- Metodología de análisis de libros de texto.

Durante los últimos años se ha puesto de manifiesto, la importancia del análisis de libros de texto, ya que son un reflejo de la actividad en el aula, más que las disposiciones oficiales que, en muchos casos, son simplemente una declaración de intenciones. En este sentido hay que hacer referencia entre otros a los trabajos de Schubring (1987) y Tavignot (1993).

Hemos analizado libros publicados desde la terminación de la guerra civil hasta 1995, considerándose los siguientes periodos; que en líneas generales corresponden a la vigencia de los sucesivos planes de estudio o de las reformas emprendidas:

- Periodo comprendido entre 1940 y 1967. Este periodo abarca desde el final de la guerra civil hasta 1967 en que se publican textos piloto para la introducción de la matemática moderna en el Bachillerato. Tiene un punto de inflexión en 1953, año en que se publica un nuevo plan de estudios (modificado parcialmente en 1957). Se han analizado cinco libros de este periodo.

- Periodo comprendido entre 1967 y 1975. Este periodo abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado Polivalente (B.U.P.) 1975. Se han analizado nueve libros de diversos autores y editoriales, entre ellos, los textos piloto publicados por la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media.

- Periodo comprendido entre 1975 y 1990. Este periodo comprende desde la implantación del B.U.P. hasta la promulgación de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (L.O.G.S.E.). Se han analizado ocho libros

- Periodo comprendido entre 1990 y 1995. Este periodo abarca desde la promulgación de la LOGSE hasta el inicio de esta investigación en 1995. Se han analizado cinco libros.

El criterio para la elección de los libros de texto ha sido el de los autores más “famosos” o de las editoriales más importantes de cada uno de los periodos. También se ha procurado que los autores elegidos tuviesen producción en los distintos periodos, para estudiar la evolución del tratamiento de los conceptos de límite y continuidad, que es uno de los objetivos de nuestra investigación. No obstante, dada la imposibilidad de abarcar toda la producción de libros de texto, se puede haber producido alguna laguna, siendo en definitiva los criterios de elección responsabilidad exclusiva de los investigadores.

El análisis de libros de texto se ha llevado a cabo en tres etapas, cada una de las cuales profundiza el trabajo realizado en la etapa anterior.

En la *primera etapa*, se han elaborado fichas que se reproducen en el anexo 6 con los datos fundamentales del libro: título, autor, editorial, año de edición, plan de estudios y un resumen del contenido de los capítulos relacionados con el límite y la continuidad.

En la *segunda etapa*, se ha llevado a cabo un análisis en tres dimensiones:

I) Modo de presentación del concepto:

Se han analizado fundamentalmente si la manera de introducirlo sigue alguna de las secuencias: definición - ejemplo – propiedades – problema; ejemplo o actividades – definición – propiedades – problemas; actividades dirigidas – definición – propiedades – problemas; o bien si mezclan las actividades con las definiciones.

II) Estructura de su desarrollo:

Se ha estudiado la secuenciación de la presentación de los conceptos de límite y continuidad; para ello se ha hecho un listado de las definiciones y propiedades relacionadas con ambos conceptos, numerándolos según su orden de aparición. Se incluye también el tipo de definición para el límite (métrico, topológico, secuencial o geométrico) y para la continuidad (topológico, métrico, mediante el límite, incremental).

III) Ejercicios y problemas.

Se han clasificado los problemas en cinco categorías, indicando su presencia o ausencia en cada libro de texto:

- Demostración del límite de una función en un punto.
- Cálculo algebraico de límites.
- Límites en sentido geométrico.
- Puntos de discontinuidad de funciones.

- Discusión de continuidad de funciones.

El análisis de estas dos primeras etapas se ve reflejado en las fichas y tablas que aparecen, separadas por los distintos periodos, en el anexo 6, y ha sido la base de una Comunicación presentada en el 8º ICME celebrado en Sevilla del 14 al 21 de Julio de 1996.

En la *tercera etapa*, recogiendo los resultados de las etapas anteriores, se han considerado tres aspectos para el análisis: conceptual, cognitivo y fenomenológico, según el siguiente esquema.

ANÁLISIS CONCEPTUAL
- Secuenciación de contenidos.
- Definiciones: tipo y papel que juegan en el texto.
- Ejemplos y ejercicios.
- Propiedades y teoremas.
- Representaciones gráficas y simbólicas.
- Aspectos materiales.

ANÁLISIS COGNITIVO
- Objetivos e intenciones del autor (expresadas habitualmente en el prólogo).
- Teorías de enseñanza-aprendizaje subyacentes.
- Capacidades que se quieran desarrollar.

ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO
- En torno a las propias matemáticas.
- En torno a otras ciencias.

En los apartados siguientes de este capítulo, se presentan los resultados de este análisis.

2.2.- 1940-1967: Desde la terminación de la Guerra Civil hasta la introducción de la matemática moderna en los institutos de Bachillerato.

Introducción.

Este periodo abarca desde la terminación de la guerra civil hasta el año 1967, en el que se publican los textos piloto sobre “matemática moderna”; es un periodo con dos partes bien diferenciadas: hasta 1953 se mantiene con ligeras modificaciones el plan de estudios de 1938, y en ese año se promulga un nuevo plan de estudios para el Bachillerato, que se modifica parcialmente en 1957.

Hemos analizado cinco libros agrupados en dos bloques:

Bloque A:

- Fernández de Castro y Jiménez Jiménez.
  MATEMÁTICAS. PREPARACIÓN DEL EXAMEN DE ESTADO.
  Manuel Fernández de Castro y José Luis Jiménez Jiménez.
  Escelicer. Cádiz-Madrid. Anterior a 1955.

- Bruño.
  MATEMÁTICAS 6º CURSO.
  Ediciones Bruño. Madrid. 1968.

Bloque B:

- Sixto Ríos y Rodríguez San Juan (50) 6º.
  MATEMÁTICAS. SEXTO CURSO DE BACHILLERATO.
  Sixto Ríos, y A. Rodríguez San Juan.
  Los autores. Madrid. 1950.

- Sixto Ríos y Rodríguez San Juan (60) 6º.
  MATEMÁTICAS. SEXTO CURSO DE BACHILLERATO.
  Sixto Ríos, y A. Rodríguez San Juan.
  Los autores. Madrid., 1968.

- Sixto Ríos y Rodríguez San Juan (68) 5º.
  MATEMÁTICAS. QUINTO CURSO DE BACHILLERATO.
  Sixto Ríos, y A. Rodríguez San Juan.
  Los autores. Madrid. 1968.

El libro de Manuel Fernández de Castro y José Luis Jiménez Jiménez es una especie de enciclopedia de matemáticas, el esquema del libro sugiere que el tratamiento de los conceptos es cíclico a lo largo de todo el Bachillerato, ya que las diferentes partes del libro: aritmética, álgebra, geometría métrica, trigonometría, cálculo diferencial, geometría analítica y cálculo integral, están divididas en lecciones secuenciadas con indicación del curso al que corresponden.

Por lo que se refiere a los libros de Sixto Ríos y Rodríguez San Juan, en el libro de quinto de 1968 sólo aparece la definición de límite, que se repite y amplía en los libros de 6º, por lo que las referencias a ese libro de 5º son mínimas. Además, los dos libros de 6º son prácticamente iguales, por lo que se ha unificado su tratamiento.

Análisis Conceptual.

A.- Secuenciación de contenidos.

Hay una clara evolución en la secuenciación de los contenidos desde el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez donde se utiliza un lenguaje de variables hasta los libros de Rodríguez San Juan y Sixto Ríos donde el lenguaje de las funciones aparece explícito.

En lo que se refiere al bloque A, en el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez, el límite y la continuidad aparecen en la parte quinta: cálculo diferencial. Comienza con la definición de variable, sucesión y límite, da reglas generales y excepcionales de paso al límite, a continuación trata de funciones, introduce el lenguaje de incrementos y da la definición de continuidad utilizando este lenguaje, sin embargo, no aparece la definición de límite de una función. En Bruño hay un cierto cambio; el concepto de límite aparece en una lección titulada “Generalidades sobre funciones” y la continuidad ocupa la lección siguiente. Aunque también comienza con variables y cálculos de límites, da explicitamente la definición de límite de una función en un punto utilizando el lenguaje de sucesiones. Igual que en el caso de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez, ambos conceptos aparecen dentro del libro, en la parte dedicada al cálculo diferencial.

En los libros del bloque B, hay un cambio sustancial en cuanto a la presentación de los conceptos de límite y continuidad, se encuentran incluidos en una lección dedicada a funciones, desarrollándose ambos conceptos desligados del concepto de variable, adquiriendo un status propio que a nuestro juicio no tenía en el bloque anterior. Se trata primero el concepto de límite dando la definición por sucesiones, y a partir de este concepto se define la continuidad.

B.- Definiciones.

En el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez aparece la definición de límite de variable, particularizando para el caso de sucesiones; es una definición oscura donde se mezclan a la vez el concepto de variable y el concepto de sucesión; esta definición es la siguiente: “Se dice que una variable tiene un límite o tiende a un límite, si en la sucesión de sus valores, se verifica que a partir de uno de ellos la diferencia entre los demás y el límite, es, en valor absoluto, tan pequeña como se quiera”. Como se observa, la idea de infinitésimo esta implícitamente subyacente en ella, y efectivamente, los autores tratan de inmediato esta cuestión. Además, cuando presentan las reglas de paso al límite, utilizan este lenguaje. Algo parecido ocurre con la definición de continuidad. Como no se ha dado explícitamente la definición de límite de una función en un punto, hay que utilizar otro lenguaje, en este caso el lenguaje de incrementos, para definir la continuidad. Esta definición es la siguiente:” se dice que una función es continua en el punto *a* (es decir cuando x = *a*) si al tender x a *a* los dos incrementos tienden a 0. Si ésto no se verifica la función se dice discontinua”.

En Bruño hay un cierto cambio, la definición de límite se da explícitamente, utilizando el lenguaje de sucesiones, y a partir de aquí la definición de función continua en un punto, aunque retoma el lenguaje de los incrementos, llega a la siguiente conclusión: “La condición necesaria y suficiente para que una función sea continua en un punto, es al tender a 0 el incremento de la variable tomado a partir de ese punto tienda también a 0 el incremento de la función”. Se observa como hay una tendencia en este autor hacia un nuevo lenguaje en las definiciones, pero sin perder el lenguaje anterior.

En Rodríguez San Juan y Sixto Ríos aunque el concepto de función se sigue presentando ligada al concepto de variable, el concepto de límite se define a partir de las funciones, y se hace mediante sucesiones. La definición es la siguiente: “ El límite de la función f(x) cuando x tiende a *a* es el número b, si se verifica que los valores de la función f(x) se aproximan tanto como queramos a b, tomando los valores de la variable x convenientemente próximos a *a* (no se hace ninguna hipótesis sobre el valor de la función en el punto *a*)”. Además, nos da una interpretación geométrica del límite de una función en un punto utilizando entornos simétricos.

Por lo que se refiere a la continuidad Rodríguez San Juan y Sixto Ríos, la presentan de modo intuitivo y a continuación dan la definición clásica a través del límite, que traduce inmediatamente a la forma métrica y posteriormente al lenguaje de incrementos.

C.- Ejemplos y ejercicios.

En los libros del bloque A, particularmente en el de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez, los ejemplos son escasos y habitualmente están después de las definiciones. En cuanto a los ejercicios en el libro de Bruño aparecen al final de cada lección y Fernández de Castro y Jiménez Jiménez tienen un libro dedicado exclusivamente a ejercicios y problemas del que no disponemos.

Los ejercicios son los típicos de cocientes de polinomios, raíces, logaritmos, funciones trigonométricas, exponenciales, ejercicios relacionados con el número *e*, ... y curiosamente mezcla los límites de funciones con los de sucesiones.

En los libros del bloque B se nota un aumento en la cantidad de ejemplos, que suceden a las definiciones, con cada definición, propiedad o regla se da uno o varios ejemplos para ilustrarlas. Los ejercicios aparecen al final de cada lección en la edición de 1950 y al final del libro en la de 1968. Junto a los típicos ejercicios a los que nos hemos referido en el bloque A, se incluyen ejercicios en contextos geométricos, siendo esto un caso singular, puesto que no los hemos encontrado en ningún otro libro de los restantes periodos analizados. A nuestro juicio, esto constituye una pérdida considerable para una comprensión integral del concepto de límite asociado a diferentes representaciones.

Reproducimos a continuación uno de estos ejercicios:

“Una sucesión de circunferencias de radios 1, 1/2, 1/3,... tiene sus centros sobre la recta AB y cada una (excepto la primera) es tangente a la anterior. Se traza una recta CD paralela a AB, a distancia h. Sea N(h) el número de circunferencias que tienen puntos comunes con CD. Probar que:

$$\lim_{h\delta 0} h\, N(h) = 1$$

D.- Teoremas.

En los libros de los dos bloques se demuestran las propiedades algebraicas de los límites, utilizando el lenguaje de los infinitésimos. En cuanto a la continuidad, se presentan las propiedades algebraicas de las funciones continuas que se demuestran utilizando los incrementos. Aparecen algunas indeterminaciones y reglas para el cálculo de límites.

E.- Representaciones gráficas y simbólicas.

a) Representaciones gráficas. En los libros del bloque A, las representaciones gráficas son muy escasas, se limitan a representar el caso de una función continua y diferentes tipos de discontinuidades. En Fernández de Castro y Jiménez Jiménez aparece un cuadro resumen de las operaciones con límites donde consecuentemente aparecen las indeterminaciones.

En los libros del bloque B, hay un aumento notable de representaciones gráficas, en el caso del límite, para dar una interpretación geométrica y presentar ejemplos como el caso de E(x). En el caso de la continuidad, para ejemplificar las propiedades de las funciones continuas y la discontinuidad. Todas las gráficas presentadas son cartesianas.

b) Representaciones simbólicas. La notación que se usa para el límite en los libros del bloque A, está asociada a la idea de variable. Las variables se representan con letras normales y los infinitésimos con las letras griegas correspondientes a las utilizadas para las variables. Se utiliza el símbolo ∞ para representar el infinito, y esto ocurrirá de aquí en adelante en todos los libros estudiados, así mismo, se hace uso del valor absoluto (con la notación clásica de las barras) en las demostraciones. Aparecen numerosas expresiones a lo largo de los textos como: "tienden a", "tan pequeño como se quiera", "n crece infinitamente", "mayor que cualquier número por grande que sea", "tiende a cero más rapidamente que". También se trabaja con órdenes de infinitésimos e infinitésimos equivalentes.

En los libros del bloque B aparece una simbolización más moderna del límite, los autores escriben:

"$\lim_{x\delta a} f(x) = b$, o bien $f(x) \to b$, cuando $x \to a$
Que se lee f(x) tiende a *b*, cuando x tiende a *a*".

Se trabaja mucho el lenguaje de ε, de modo que, cuando los autores demuestran que el límite de una función es un cierto valor, a lo largo de dicha demostración afinan el valor de ε (ε/2, ε/4,...) de modo que al final salga en el segundo miembro de la desigualdad ☙. También son frecuentes expresiones que hemos mencionado anteriormente para los libros del bloque A.

En todos los libros, excepto en el de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez, aparece la notación clásica de continuidad utilizando el límite. Se utiliza la letra griega ☛ (delta mayúscula) para simbolizar los incrementos.

F.- Aspectos materiales.

Hay similitudes en los aspectos materiales de los libros que hemos estudiado en esta época. En cuanto al tipo de letra las reglas, definiciones y expresiones nuevas están en cursiva, y los títulos de los epígrafes (que están numerados) están en negrita. Los ejemplos, demostraciones y aclaraciones están escritos en letra más pequeña.

Análisis cognitivo.

El único libro en el que aparecen explicitados el objeto de la lección es en el de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez donde los conceptos tienen un carácter esencialmente instrumental ya que lo que se pretende es: “Hallar unas reglas sencillas que nos permitan calcular con seguridad y rapidez el límite de variables complicadas en los que intervienen operaciones diversas algebraicas y aun trascendentes”. Este carácter instrumental está presente también en los otros libros estudiados.

Una segunda característica es el carácter cíclico de los contenidos que se repiten en sucesivos cursos ampliándose y completándose en cada uno respecto del anterior. Así, en el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez los temas están incluidos en una parte que recibe el nombre de Cálculo Diferencial y corresponden a 6º curso de Bachillerato; en Rodríguez San Juan y Sixto Ríos en 5º curso da la definición de concepto de límite que amplía en 6º junto con el de continuidad.

En todos los libros el desarrollo es secuencial y formal, aunque las demostraciones no son totalmente rigurosas, sino que tienen ciertas componentes intuitivas. La idea que subyace es la de una matemática ya hecha que el alumno debe memorizar y practicar resolviendo ejercicios.

A nuestro juicio, los conceptos de límite y continuidad están presentados para poder introducir el concepto de derivada.

En definitiva las capacidades que se pretenden desarrollar en el alumno son: memorización de definiciones y propiedades y práctica algorítmica, con alguna excepción en los ejercicios planteados.

Análisis fenomenológico.

En el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez cuando trata el concepto de variable hace alguna referencia a fenómenos naturales como: hora del día, estación del año y circunstancias meteorológicas. Hecha esta salvedad, al tratar los conceptos de límite y continuidad, el resto de los libros hacen solamente referencias a aspectos matemáticos, y en general como ya hemos señalado, el límite es concebido como una preparación para la derivada. Aunque en algunos casos, como en Rodríguez San Juan y Sixto Ríos hay una componente geométrica importante referida al estudio de límites de pendientes de rectas secantes a una curva, de longitudes de cuerdas, de áreas bajo ciertas condiciones, de sucesiones de circunferencias.

2.3.- 1967-1975. Introducción de la matemática moderna.

Introducción.

Este periodo abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado y Polivalente (B.U.P.) en 1975. Hemos analizado en primer lugar y de modo independiente los textos piloto publicados por la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media. A continuación se han analizado otros siete textos de este periodo.

Textos piloto del M.E.C.

Estos textos son:

- Texto piloto 5º.
  MATEMÁTICA MODERNA: QUINTO CURSO.
  Pedro Abellenas Cebollero, Joaquín García Rua, Alfredo Rodríguez Labajo, Juan Casulleras Regás, Francisco Marcos de Lanuza.

M.E.C. Madrid. 1967.

- Textos piloto 6º.
  MATEMÁTICA MODERNA. SEXTO CURSO.
  Pedro Abellanas Cebollero, Joaquín García Rua, Alfredo Rodríguez Labajo, Juán Casulleras Regás, Francisco Marcos de Lanuza.
  M.E.C. Madrid. 1969.

Análisis conceptual.

A.- Secuenciación de contenidos.

En ambos libros los conceptos de límite y continuidad se estudian dentro del capítulo dedicado a funciones. En el libro de quinto se introducen los conceptos que se desarrollan con más detalle en sexto. Además de las definiciones, se tratan los casos de límites infinitos y en el infinito, y las operaciones con límites de funciones. En el anexo 6.2 se puede ver detalladamente la secuenciación de contenidos.

B.- Definiciones.

Dado que estos libros están enmarcados en la corriente de la matemática moderna, hay un predominio de la definición topológica, que les lleva a utilizar entornos generales para dar las definiciones. Por ejemplo: "Diremos que una función f(x) = y tiene por límite b para x = a cuando para todo entorno E_b del punto, se verifica $f^{-1}(E_b) = E_a$ - a, o bien $f^{-1}(E_b) = E_a$. En el segundo caso, además de tener límite la función en x = a, diremos que es continua en dicho punto". Como observamos, se dan simultaneamente las definiciones de límite y continuidad.

Posteriormente esta definición se traduce para poder dar la definición métrica.

Para la discontinuidad, además de presentarla de modo intuitivo, da la definición negativa por entornos de la siguiente manera: "Como podemos ver la gráfica de la función está 'partida', este concepto de estar 'partida' podemos expresarlo en forma matemática mediante los entornos del punto b, observando que en este caso hay entornos E_b del punto b tales que $f^{-1}(E_b)$ = A, siendo A un conjunto de puntos que no es un entorno del punto a". También aparece la definición de límite infinito y en el infinito utilizando el mismo lenguaje de entornos.

C.- Ejemplos y ejercicios.

Los ejemplos son anteriores a las definiciones, se refieren a cocientes de funciones polinómicas, parábolas e hipérbolas. Sólo en el libro de sexto hay ejercicios al final del tema, unos resueltos y otros propuestos.

D.- Teoremas.

Se enuncian y demuestran teoremas relativos a las operaciones con límites, que a pesar del carácter topológico de las definiciones, el procedimiento seguido para estas operaciones es el métrico.

E.- Representaciones gráficas y simbólicas.

a) Representaciones gráficas. Son exclusivamente cartesianas y se dirigen a tratar las definiciones de los conceptos en sentido topológico, representando consecuentemente los entornos de un punto y de su imagen inversa, así como los entornos en el infinito.

b) Representaciones simbólicas. En cuanto al límite, se utiliza la doble simbolización:

$$\lim_{x\delta a} f(x) = b \text{ , o bien, } f(x)_{x\delta a}\to b.$$

Los entornos se simbolizan utilizando subíndices, por ejemplo E_a y E_b, y también (b-ε, b+ε). En las definiciones métricas las letras utilizadas son γ y ε.

La notación para la continuidad, es la clásica: $\lim_{x\delta a} f(x) = f(a)$.

F.- Aspectos materiales.

Hay dos tintas; negra para el texto y azul para gráficas y epígrafes de los textos. Se utilizan dos tipos de letras: normal y cursiva. La maquetación, el tipo de letra, el texto, en general la encuadernación misma, resulta más agradable a la vista que los textos anteriores.

Análisis cognitivo.

Como ya se ha dicho al escribir sobre los planes de estudio, estos textos piloto son la culminación de los trabajos de la "Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos

Nacionales de Enseñanza Media", presidida por el profesor Don Pedro Abellanas, Catedrático de la Universidad de Madrid. Las razones que se apuntan para introducir la matemática moderna en el bachillerato están recogidas en Rico y Sierra (1994), y son las siguientes:

1- La matemática moderna proporciona esquemas más sencillos para poder presentar la materia del Bachillerato.
2- Con la matemática moderna se pueden organizar dichas materias de modo más racional.
3- Los fines esenciales de la matemática en la enseñanza media son dos: formativo e instrumental.
4- Ambos fines pueden lograrse con más eficacia mediante la matemática moderna.
5- Tanto, en la teoría como en los algoritmos, el alumno, con la matemática moderna puede llegar a discurrir con más precisión y claridad.
6- Con la matemática moderna se estudiarán las materias que tengan carácter fundamental, y las que no poseen este carácter, quedarán relegadas como simples ejercicios a desarrollar por los alumnos.

Siguiendo las ideas de la matemática moderna, en los textos piloto, los conjuntos y las aplicaciones son los cimientos sobre los que se pretende construir y las estructuras, las herramientas para construir dicho edificio. Las ideas señaladas anteriormente se ven reflejadas, en particular, en el tratamiento del límite y la continuidad. La orientación topológica no es casual sino es justamente, la preconizada por los pioneros de la reforma de las matemáticas en consonancia con las ideas bourbakistas. Hay un refinamiento en el tratamiento de las gráficas y en el abundante lenguaje de entornos que aparece en ellos y a lo largo del texto, definiéndose entornos generales y como conjunto de puntos que cumplen una determinada condición. No obstante, y a pesar de su declaración de intenciones, el carácter instrumental de las matemáticas deja mucho que desear, si entendemos dicho carácter como herramienta para estudiar fenómenos de otras ciencias.

Las capacidades que se pretenden desarrollar son: la adquisición de las formas de hacer del nuevo lenguaje de la matemática moderna, el conocimiento de las definiciones de límite y continuidad en este lenguaje, el desarrollo de algoritmos para el cálculo de límites de expresiones algebraicas.

Análisis fenomenológico.

No hay referencias a fenómenos que puedan ser organizados mediante el límite o en los que intervenga la continuidad que sean exteriores a la propia matemática. La matemática se encierra en si misma y se explica por ella misma. Incluso desaparecen las interpretaciones y los problemas en sentido geométrico de la época anterior; parece como si esta parte del análisis matemático fuera independiente del resto de las ramas de las matemáticas. Insistimos en la predominación de la visión topológica, que lleva a la desaparición de la idea intuitiva de aproximación en el caso del límite. Incluso en el caso de discontinuidad de una función, la idea de estar partida, más que una idea intuitiva, es una idea que utiliza para reafirmar el uso de los entornos.

Otros libros de texto del periodo 1967-1975.

Como ya se ha dicho en la introducción, se han analizado otros siete libros de texto. Mientras que en algunos de ellos se observa la influencia de los textos piloto, en otros se mantienen los métodos anteriores. Así, aparecen tres tendencias:

Bloque A:

Los que siguen el modelo anterior (representados en los libros de Rodríguez San Juán y Sixto Ríos):

- Edelvives
  MATEMÁTICA SEXTO CURSO
  Sin autores (aprobado por O.M. 23-2-68)
  Edelvives. Zaragoza. 1972.

- S.S.
  MATEMÁTICAS 6º CURSO.
  Salvador Segura.
  E.C.I.R. Valencia. 1974.

- TF y CC.
  COU. MATEMÁTICAS ESPECIALES.
  José Tuduri y Rafael Casal Cienfuegos-Jovellanos.
  Vimasa. Tarrasa. 1974.

Bloque B:

Los que siguen las orientaciones e ideas de los textos piloto:

- FML (72) 5º
  MATEMÁTICAS 5º CURSO
  Marcos de Lanuza
  G. del Toro. Madrid. 1972.

- FML (72) COU especiales
  MATEMÁTICAS COU OPTATIVO.
  Marcos de Lanuza
  G. del Toro. Madrid. 1972.

Bloque C:

Los que introducen la matemática estructural y axiomática, pero a la vez proponen actividades para el alumno y las explicaciones se apoyan en la experimentación:

- A y V (73) 6º
  MATEMÁTICAS 6º BACHILLERATO (límite) vol. 2.
  José Mª Agustí y Antoni Vila.
  Vicens-Vives. Barcelona. 1973.

- S.M. (73) COU
  MATEMÁTICAS GENERALES COU.
  C. Marcos, J. Martínez.
  SM. Valencia. 1973.

Análisis conceptual.

A.- Secuenciación de contenidos.

Se observa que hay una evolución en la secuenciación de los contenidos.

En los tres libros del bloque A no hay temas específicos acerca del límite y la continuidad, ambos conceptos están incluidos en el tema referido a funciones, como si los autores quisieran señalar que ambos conceptos son propiedades que las funciones pudieran o no tener.

Sin embargo, en cuanto al bloque B, en los libros de Marcos de Lanuza hay un tema específico referido exclusivamente a límite y continuidad de una función donde ambos conceptos se desarrollan paralelamente. Un paso más se da en el bloque C donde hay capítulos independientes dedicados al límite y a la continuidad, lo que revela la importancia que dan los autores a estos conceptos; en SM se introduce el concepto de límite en primer lugar y en Agustí y Vila lo hace con la continuidad, con lo que la secuencia de contenidos es diferente.

En cuanto a los contenidos se observa como se produce un aumento progresivo de estos, así mientras en los tres libros del bloque A no aparecen ni límites laterales ni infinitos, en el bloque B ya se introducen los límites infinitos y en el bloque C ambos.

En el anexo 6.2. se puede ver detalladamente la secuenciación de contenidos.

B.- Definiciones.

Al igual que ocurre con los contenidos, se observa un cambio progresivo en el tratamiento de las definiciones. Así, mientras que en los tres textos del bloque A la definición del límite es anterior a la de continuidad y le sirve de apoyo, en el bloque B aparecen mezcladas ambas definiciones, y finalmente en el bloque C cada uno de los dos autores sigue un criterio diferente.

En el bloque A se enfatiza la definición por sucesiones en cuanto al concepto de límite y la de incrementos para la continuidad aunque también aparecen, a nuestro juicio de modo residual, las definiciones métrica y topológica. En los libros del bloque B predomina la manera de hacer topológica en ambos conceptos, y finalmente en el bloque C, SM da la definición clásica, topológica y métrica aunque trabaja preferentemente con la última y en Agustí y Vila trabaja con la definición topológica. A nuestro juicio, hay una mayor autonomía pedagógica en los autores de este último bloque.

La idea intuitiva de continuidad está presente en todos los bloques y todos los autores, bien como punto de partida bien como conclusión.

C.- Ejemplos y ejercicios.

Mientras que en los libros del bloque A se sigue la típica secuencia definición - ejemplos, en los del bloque B los ejemplos pretenden ser una idea intuitiva para llegar a la definición; y en los del C se quiere conducir progresivamente al alumno a partir de ciertos ejemplos hasta las definiciones.

En el primer bloque, los ejemplos aparecen después de las definiciones como apoyo a éstas, y se refieren a expresiones polinómicas y cocientes de éstas; en el segundo bloque, los ejemplos son anteriores a las definiciones, y se refieren, además de a las funciones polinómicas, a exponenciales y potencias. En los del último bloque los ejercicios son muy abundantes, intentando que la formalización se complete con la experimentación como apoyo y herramienta, pero todos los ejemplos son de la propia matemática sin aplicaciones a otras áreas.

En estos últimos libros y en alguno del bloque anterior, se incluyen ejercicios propuestos intercalados en el texto referidos a la teoría inmediatamente anterior, aunque en todos los libros hay una lista de ejercicios al finalizar cada capítulo.

D.- Teoremas.

En todos los libros se enuncian (y en casi todos se demuestran) las propiedades algebraicas de límites y funciones continuas. Las demostraciones están en consonancia con el tipo de definiciones que prevalecen en cada uno de los textos. Algunos contenidos posteriores determinan la inclusión de ciertos teoremas y su demostración, por ejemplo, en Salvador Segura (bloque A) demuestra la continuidad de algunas funciones elementales como aplicación al teorema:

"Si una función $y = f(x)$ es monótona creciente en el intervalo (a, b) y admite función inversa $x = \varphi (y)$ en el intervalo correspondiente $(f(a),f(b))$, ambas son continuas en sus respectivos intervalos", que está demostrado por reducción al absurdo.

Es significativo que en el libro de Agustí y Vila, que llevando la "matemática moderna" hasta sus últimas consecuencias se demuestran teoremas relativos a la estructura del conjunto de las funciones continuas, llegando a la estructura del espacio vectorial de las funciones continuas sobre el cuerpo de los números reales.

Otro aspecto importante a considerar son las indeterminaciones, que en los libros de los bloques A y B son casos especiales del cálculo de límites, y en el bloque C se empieza a considerar como conceptos en sí mismos, dando reglas o pistas para resolver algunas.

E.- Representaciones gráficas y simbólicas.

a) Representaciones gráficas. Están estrechamente ligadas al tipo de definición que se utiliza para límite y continuidad. Así por ejemplo, las tablas se utilizan:

i) En el libro de Edelvives (bloque A) los autores presentan tablas donde aparecen los valores de la sucesión y los correspondientes de f(x).

ii) En el libro de Agustí y Vila (bloque C) las tablas de valores de la función se usan para comprobar prácticamente que se verifica la definición topológica en casos particulares.

Las gráficas cartesianas aparecen en todos los libros estudiados. En ellas se representan tanto funciones continuas como discontinuas. Siendo las más habituales parábolas, hipérbolas, logarítmicas, trigonométricas, exponenciales, cocientes de polinomios, y otras realizadas a mano alzada según las características que interese resaltar. Por ejemplo:

Pág. 290 de Marcos de Lanuza, C.O.U.

Pág. 67 de Edelvives

Además hay otros tipos de representaciones gráficas como diagramas de Venn, libro de SM (bloque C), por ejemplo:

Pág. 63 de S.M.

Y la que aparece en Agustí y Vila (bloque C):

Pág. 220 de A. y V.

El único libro que clarifica las discontinuidades es el de Edelvives (bloque A), considerando tres tipos que son:

(a) Por salto brusco finito

(b) Por salto brusco infinito

(c) Por tomar la función valores imaginarios, y se representa:

b) Representaciones simbólicas. En cuanto al concepto de límite todos utilizan $\lim_{x \to a} f(x) = l$ con las letras “a”, “l” u otras diferentes, y también $f(x)_{x \to a} \to l$. Las excepciones las constituyen el libro de Marcos de

Lanuza del bloque B con $\lim_{x=a} f(x) = f(a)$ y el libro de Agustí y Vila (bloque C) con $\lim_a F = l$

Las notaciones evolucionan desde las correspondientes a la definición de límite por sucesiones hasta la definición topológica. Así por ejemplo, en el libro de Edelvives al dar la definición de límite por sucesiones dice textualmente: "esto se representa simbólicamente así;

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \text{ o bien, } f(x) \to L \text{ cuando } x \to a$$

y se lee límite de función efe de x, cuando x tiende a *a* es igual a L, o bien función efe tiende a L, cuando x tiende a *a*"; se observa que en la simbolización no aparece ninguna referencia a una sucesión de valores de x que tenga por límite a.

En cuanto a las notaciones dadas en la definición métrica se utiliza el lenguaje clásico de ε y δ, excepto en SM que utiliza ε y ⑥. Por ejemplo, en SM (bloque C) la notación utilizada es:

"Se dice que f(x) tiende hacia L cuando x tiende hacia x_0, si para todo ε > 0 existe ⑥ > 0 tal que: ($|x-x_0| <$ ⑥ y x ∈ I) ⇨ $|f(x) - L| <$ ε".

El significado que se da al símbolo ε varía de unos a otros, mientras que en unos se considera como algo "arbitrariamente pequeño" (Salvador Segura, bloque A), en otros se considera simplemente ε > 0 (Tuduri y Casal Cienfuegos-Jovellanos, bloque A y SM, bloque C).

Como en los libros del bloque B se utiliza la definición topológica, aparecen referencias a entornos pero no hay notaciones simbólicas sobre estos entornos, se tratan exclusivamente de forma verbal. Sin embargo, en el siguiente bloque si aparecen notaciones de entornos y hay un inicio en SM del uso de los símbolos de los cuantificadores. Por ejemplo, en Agustí y Vila (bloque C) se dice:

"Diremos que l es el límite de F en a, si para todo entorno B de l se puede encontrar un entorno reducido de *a* $A_0 = A- \{a\}$de modo que $f(A_0)\_B$".

En cuanto a las notaciones utilizadas para la continuidad todos los libros, excepto Agustí y Vila (bloque C), utilizan la notación $\lim_{x\delta a} f(x) = f(a)$, y la simbolización usada está en estrecha relación con la utilizada para el límite. Hay que señalar que en los libros del bloque A se utiliza la simbolización de incrementos en consonancia con las definiciones dadas en este lenguaje, asímismo aparecen términos como infinitésimo. Los incrementos desaparecen casi por completo en los libros de los bloques B y C.

Es característico del libro de Marcos de Lanuza (bloque B) la notación “y = f(x) = l + ☙ (x) siendo ☙ (x) una función nula en x = a” que luego utilizará para demostrar propiedades y desarrollar el resto de la teoría.

F.- Aspectos materiales.

Hay que señalar de inmediato que hay grandes diferencias entre unos libros y otros.

En los libros de Salvador Segura y Edelvives del bloque A se utilizan diferentes tipos de letras: negrita para los títulos, cursiva para las definiciones y letra más pequeña para los ejemplos. Las gráficas están intercaladas en el texto y numeradas y, en el caso de Salvador Segura encuadradas.

El libro de Tuduri y Casal Cienfuegos-Jovellanos es un libro que no está serigrafiado: la letra es de máquina de escribir y los símbolos especiales como letras griegas, flechas, etc. están hechas a mano, así como las gráficas.

En los libros del bloque B se utilizan: negrita para los títulos, cursivas para la palabra “definición” así como todas aquellas expresiones novedosas. Las gráficas están hechas a mano y en algunos casos el texto y la gráfica están a dos columnas y en otros casos las gráficas están intercaladas en el texto.

Por último, los libros del bloque C se distinguen por un mayor cuidado en la forma de presentación y, en nuestra opinión, por buscar a través de ésta un cierto estilo editorial. Los dos libros están impresos en dos tintas: negra y sepia en SM, y negra y rojo en Agustí y Vila. Los tipos de letra son: normal, negrita y cursiva. En cuanto a las gráficas, en el libro de SM están hechas a mano y normalmente intercaladas en el texto, pero en algunos casos están a dos columnas la gráfica y el texto. En el libro de Agustí y Vila, las gráficas son muy numerosas, están colocadas entre el texto, el grafo de la función está en tinta roja y los ejes en negro; utilizan un punto gordo para indicar la existencia de la imagen de un punto y un punto agujereado para indicar su no existencia. Hay que destacar que el libro de

Agustí y Vila tiene un tamaño mayor que los anteriores pues tiene un formato folio, y además los contenidos se separan en dos volúmenes.

Análisis cognitivo.

En los libros del *bloque A*, no aparecen prólogos por lo que no podemos conocer, de modo explícito, las intenciones de los autores al escribir dichos libros.

Los tres libros incluyen límite y continuidad en un capítulo de funciones. A nuestro juicio parece como si estos conceptos fuesen propiedades que pueden tener o no las funciones. Además, el lenguaje de los libros de Salvador Segura y Edelvives está pensado para el concepto posterior de derivada. Igualmente, se puede asegurar, que el concepto de límite es simplemente un útil para tratar la continuidad.

En los dos libros de sexto curso, los autores se limitan a definir los conceptos y apenas hay demostraciones sino simplemente comprobaciones, con algunas singularidades, como en el caso del teorema al que ya hemos hecho referencia sobre la función inversa del libro de Salvador Segura, que se demuestra por reducción al absurdo.

Las capacidades que se pretenden desarrollar son: aprendizaje memorístico de las definiciones y aplicación de estas definiciones a la resolución de ejercicios.

Los dos libros del *bloque B* suponen una ruptura con el periodo anterior, como ya se ha señalado. Siguen las orientaciones de los textos piloto, por lo que sigue siendo válido lo que se comentó respecto de los aspectos cognitivos de los textos piloto, en particular, en el libro de 5º, su autor señala en el prólogo: "la evidencia sensible del éxito de la reforma de la matemática moderna", afirmando también, que los textos piloto son una guía completa y segura para seguir los nuevos métodos de la matemática.

En el mismo prólogo, el autor asegura que se ha visto obligado a cambiar el orden de las materias sin tocar la integridad de la misma. Sitúa al principio del libro la Teoría de Conjuntos, utilizando la metáfora del juego, en la que la teoría serían las fichas y las reglas las relaciones matemáticas con el concepto de aplicación.

Por otra parte, el autor tiene puesta su mira en los futuros estudios universitarios de los estudiantes, afirmando que todos los conocimientos del libro les son realmente útiles.

En el libro de COU en la introducción del capítulo 1º, justifica el uso de la Teoría de Conjuntos argumentando que: "la matemática actual arranca de la idea de conjunto y se desarrolla formalmente hasta desembocar partiendo del número natural en el número real enlazando de este modo las dos matemáticas de Pitágoras. Desarrollamos brevemente este proceso llamado de aritmetización del Análisis", todo lo cual, encuadra este libro en el marco teórico de la matemática moderna.

Límite y continuidad aparecen en una lección distinta de la de funciones. Los conceptos de conjunto, número real y entorno, se utilizan constantemente. Las definiciones son preparadas mediante ejemplos y a lo largo de ambos textos se presentan demostraciones de forma paralela para límite y continuidad.

Las capacidades que se pretenden desarrollar son: aprendizaje comprensivo de las definiciones, y aplicación de estas a la resolución de ejercicios, con una cierta comprensión de las propiedades fundamentales de límite y continuidad.

Los libros del *bloque C* se sitúan decididamente en la corriente de la matemática moderna, esto está claramente expresado en el libro editado por SM, en cuyo prólogo se ensalza a Bourbaki por haber "reelaborado modernamente con expresión axiomática y formalizada toda la matemática tradicional centrando su estudio en las estructuras abstractas y generales". Considera una doble vertiente de las matemáticas:

1. Como modelo para la ciencia por su axiomatización y formalización.
2. Como herramienta por su dimensión como apoyo experimental que tiene toda ciencia.

Este decantamiento hacia la matemática moderna se ve también en la alusión que en el mismo prólogo se hace a Piaget, donde se dice textualmente que "Piaget ha demostrado que las formas humanas de pensamiento coinciden con las estructuras de la matemática moderna".

En palabras de los autores, "la asimilación por parte de los alumnos de la estructura axiomática y formalizada que tiene la matemática moderna debe completarse con la intuición basada en la experiencia". En este sentido llama la atención la gran cantidad de ejercicios que hay a lo largo del texto.

Con todos estos ingredientes los autores piensan que: “la perspectiva es mucho más agradable e interesante y por supuesto más lógica. Y además los alumnos las asimilan más rápidamente y desde luego sin tanta dificultad como los mayores”.

Los contenidos del libro de SM se han relacionado teniendo en cuenta que van dirigidos a alumnos que estudiarán en el futuro carreras de ciencias y están inspirados en los programas de algunas Universidades.

El libro de Agustí y Vila se inscribe también en la tendencia de la matemática moderna, con una clara influencia de las obras de Papy y colaboradores. El lenguaje utilizado es el de entornos, con una clara preponderancia de los aspectos topológicos sobre los métricos.

Aunque ambos libros se inscriben en la corriente de la matemática moderna, la manera de introducir las definiciones cambian sustancialmente de uno a otro. Así, mientras que en el libro de SM las definiciones no son precedidas de ejemplos, en el de Agustí y Vila hay una preparación sistemática, dando aproximaciones sucesivas hasta llegar a la definición correcta. A nuestro juicio, esto puede ser debido a que el libro de SM prepara para el ingreso en la Universidad y sigue por consiguiente un modelo pedagógico parecido al universitario.

En cuanto a las demostraciones, se limitan a las propiedades fundamentales de las funciones continuas en el libro de SM y en el de Agustí y Vila a las propiedades algebraicas de las funciones continuas.

Respecto a las capacidades que se pretenden desarrollar, en nuestra opinión, son muy diferentes de un libro a otro, posiblemente por los cursos distintos a los que se dirigen. Así, mientras que en el libro de SM se pretende que el alumno aprenda memorísticamente las definiciones, se acostumbren al mecanismo de las demostraciones deductivas y realicen numerosos ejercicios, en el libro de Agustí y Vila se pretende que el alumno vaya construyendo de una manera dirigida los distintos conceptos, entrever algunas demostraciones y que realice numerosos ejercicios.

Mientras que en el libro de SM respecto de las gráficas se utilizan diagramas conjuntistas en el de Agustí y Vila se utilizan gráficas cartesianas procurando favorecer la intuición del alumno.

Análisis fenomenológico.

En los libros del *bloque A* no hay referencias a situaciones o fenómenos propios de otras ciencias distintas de las matemáticas, y en el caso de éstas, se reducen a casos de funciones polinómicas, radicales, logaritmos, cocientes de polinomios y funciones trigonométricas. La idea de límite funcional sólo aparece como ejemplo más significativo en Salvador Segura en el grifo que deja caer una gota cada minuto, dicha idea está basada en el límite de sucesiones.

Respecto al *bloque B* hay una diferencia esencial con el anterior al utilizar no sólo expresiones algebraicas, sino también interpretación de gráficas de funciones, aunque los tipos de funciones usadas son basicamente las mismas que las anteriores con la excepción de que se incluyen situaciones referidas al número *e*.

En los dos libros del *bloque C* hay distintas peculiaridades. En el libro de SM las funciones que se utilizan están expresadas algebraicamente y son las mismas que las de los grupos anteriores, no apareciendo funciones logarítmicas ni exponenciales a pesar de ser de COU. Se incluyen también situaciones en las que la dependencia funcional se expresa a través de ejercicios geométricos como el caso de circunferencias y tangentes a ellas que cumplen ciertas condiciones o relacionados con resolución de ecuaciones, determinantes y otras cuestiones puramente algebraicas, también aparecen progresiones aritméticas y geométricas.

En el libro de Agustí y Vila además de expresiones algebraicas hay relaciones con conceptos de Teoría de Conjuntos, espacios vectoriales, traslación de gráficas, raíces de polinomios, simplificación de cocientes de polinomios.

2.4.- 1975-1990: Desarrollo del plan de estudios del Bachillerato Unificado y Polivalente (B.U.P.) y del Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.).

Introducción.

Con la implantación del nuevo bachillerato se produce una expansión editorial. Se han analizado siete libros de 2º de B.U.P. y un libro de C.O.U. y se ha observado lo siguiente:

Algunos autores que han editado libros durante el periodo anterior continúan escribiendo textos idénticos como en el caso de Agustí y Vila y con ligeras modificaciones en los libros de Marcos de Lanuza. En estos libros se observa un mayor número de propiedades enunciadas y demostradas, el libro de 2º B.U.P. es casi idéntico al de C.O.U. del año 72 y el de C.O.U. del 76 una ampliación del anterior. Esta ampliación se detecta esencialmente en la inclusión de nuevos teoremas: teorema de la función inversa, teorema de Bolzano, teorema de Bolzano y Weiertrass, teorema de la continuidad uniforme y teorema de Heine.

- FML (78) 2º B.U.P.
  MATEMÁTICAS 2º B.U.P
  Marcos de Lanuza, F.
  G. del Toro. Madrid. 1978.

- FML (76) C.O.U.
  MATEMÁTICAS ESPECIALES. C.O.U.
  Marcos de Lanuza, F.
  G. del Toro. Madrid. 1976.

- A y V (76) 2º B.U.P.
  MATEMÁTICAS. VECTORES. 2º B.U.P.
  Agustí, J.M. y Vila A.
  Vicens Vives. Barcelona. 1976.

Además, gran cantidad de editoriales proponen desarrollos curriculares en Matemáticas a partir de la aprobación de la Ley General de Educación de 1970 desarrollada para Bachillerato en el Decreto 23/1/75. Se puede observar que la tendencia de la matemática moderna se impone en todos estos libros. A cuatro textos dedicaremos un análisis detallado:

- Magisterio
  MATEMÁTICAS 2º BACHILLERATO.
  Javier Guillén Barona, Roberto Navarro, Juán Antonio Peña, Sebastián Ferrer Martínez.
  Magisterio. Madrid. 1976.

- Teide
  MATEMÁTICAS 2º CURSO DE B.U.P.
  Juán Boadas. Rafael Romero. Ramón Villalbí.
  Teide. Barcelona. 1976.

- Anaya.
  MATEMÁTICAS 2º DE B.U.P.
  Javier Etayo. José Colera. Adrés Ruíz.

Anaya. Salamanca. 1977.

- Santillana.
  MATEMÁTICAS 2º BACHILLERATO.
  Máximo Anzola. José Carundro. María Gutierrez.
  Santillana. Madrid. 1976.

Una notable excepción es el libro publicado por el Grupo Cero de Valencia, que siguiendo las ideas metodológicas de Frendenthal, presenta los conceptos de límite y continuidad mediante una serie de actividades dirigidas sin definir explícitamente dichos conceptos. Este libro lo analizaremos independientemente.

- Grupo Cero.
  MATEMÁTICAS DE BACHILLERATO Volumen 2.
  Grupo Cero.
  Editorial Teide. Barcelona. 1985.

Libros de texto del bloque central del periodo 1975-1990

Son los de las editoriales Magisterio, Teide, Anaya y Santillana citados más arriba.

Análisis conceptual.

A.- Secuenciación de contenidos.

En los cuatro libros del bloque hay capítulos independientes dedicados al límite y a la continuidad, y además, excepto en Santillana, otro u otros capítulos dedicados al cálculo de límites, pretendiendo dar al alumno herramientas para resolver ejercicios.

En el apéndice 6.3. se puede observar la secuenciación de los contenidos. Quizá lo más llamativo sea el trabajo sistemático con límites laterales.

B.- Definiciones.

La definición de límite se da prioritariamente de forma métrica, aunque también se da por sucesiones (Teide) y topológica (Santillana, Teide). En los cuatro libros se definen límites laterales y se presentan todos los casos finitos e infinitos del límite y de la variable, haciendo siempre gráficas de funciones y observando que cumplen las definiciones correspondientes utilizando el lenguaje de valores absolutos. El único libro que continúa utilizando infinitésimos es el de Anaya.

En cuanto a la definición de continuidad, todos comienzan con la definición clásica, dando posteriormente la métrica (Anaya y Santillana) y la topológica (Teide y Santillana). En los cuatro libros aparece la idea intuitiva de que una función es continua si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Solamente Teide define continuidad a la derecha y a la izquierda. Teide y Santillana hacen una clasificación de las discontinuidades: evitables, de primera especie y de segunda especie, finita e infinita.

C.- Ejemplos y ejercicios.

En todos estos libros los ejemplos, tanto de límite como de continuidad, son muy numerosos y aparecen indistintamente antes o después de las definiciones. Magisterio propone preguntas intercaladas en el texto que: “sirven para comprobar si el alumno va comprendiendo la información de los párrafos precedentes” según manifiestan los autores en el prólogo, y Santillana y Anaya los incluyen en una segunda columna a lo largo del texto. Además al final de cada capítulo, hay ejercicios propuestos en todos los libros.

Las funciones tratadas son: polinómicas y cocientes de ellas, raíces, potencias, exponenciales, valores absolutos, funciones definidas a trozos o en subconjunto de R. No aparecen funciones trigonométricas, quizás porque posteriormente hay capítulos dedicados a este tipo de funciones.

D.- Teoremas.

Al igual que ocurría en el periodo anterior, se enuncian y demuestran las propiedades algebraicas de límites y de funciones continuas. Además, en el libro de Santillana se demuestran teoremas relativos a la estructura de funciones continuas, llegando a las estructuras de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales y de anillo.

En cuanto a las indeterminaciones, aparecen en todos los libros, excepto en Santillana.

E.- Representaciones gráficas y simbólicas.

a) Representaciones gráficas. En nuestro estudio hemos detectado un aumento considerable de representaciones gráficas respecto del periodo anterior, especialmente en los libros de Santillana y Teide. Representaciones gráficas mediante tablas aparecen en estas dos editoriales, aunque con distinto sentido. Mientras que en Teide se utilizan para aproximarse al valor de la variable estudiando los correspondientes valores de f (x), en Santillana se utilizan para el trabajo en los valores de ☙ de la definición del límite, lo cual es coherente con la tendencia hacia la definición por sucesiones utilizada en Teide, o hacia la definición topológica utilizada en Santillana. Estas tablas aparecen asociadas a gráficas cartesianas de funciones concretas.

Gráficas cartesianas aparecen en todos los libros. En ellas se representan tanto funciones continuas, como discontinuas, siendo las más habituales: rectas, parábolas, hipérbolas, logarítmicas, cocientes de polinomios, escalonadas, definidas a trozos. Se utilizan gráficas cartesianas como apoyo a la definición de límite y continuidad, aunque difieren de unos libros a otros como se puede ver a continuación:

Pág. 231 de Santillana

Pág. 63 de Teide

Pág. 80 de Anaya

Otras representaciones gráficas son:

i) Tablas-resumen de operaciones con límites donde alguno es infinito o cero (Teide).
ii) Tablas de los tipos de discontinuidades (Teide y Santillana).

iii) Tablas con expresiones indeterminadas (Anaya).
iv) Gráfica sobre la función compuesta (Santillana).
v) Diagrama estructural de la unidad donde se encuadra límite y continuidad (Santillana).

b) Representaciones simbólicas. Hay que señalar de entrada que la simbolización aumenta respecto al periodo anterior. El lenguaje de ε y δ está consolidado y aparecen por doquier símbolos, subíndices, superíndices, valores absolutos, flechas, etc., aunque en ninguno de los libros aparecen los símbolos de los cuantificadores.

En cuanto al límite todos utilizan la notación $\lim_{x\delta a} f(x) = l$ donde las letras "a" y "l" son sustituidas, a veces, por otras distintas. Como hemos señalado anteriormente los límites laterales son muy utilizados, lo que se refleja en la aparición de la correspondiente notación simbólica en dos versiones:

lim	lim	en Santillana, Teide y Magisterio
xτa+	xτa-	
lim	lim	en Anaya.
xτa	xτa	
x < a	x > a	

Como ya se ha dicho los límites infinitos se presentan en los cuatro textos, todos consideran, excepto Teide, los casos +≡ y -≡ , lo que se refleja en la notación simbólica correspondiente.

El uso del lenguaje de entorno o de valor absoluto, viene determinado por el peso que los autores dan a las definiciones topológica o métrica en sus respectivos textos: en Santillana y en Teide donde la topológica juega un papel preponderante se utilizan los entornos aunque con distinta notación E (l,ε) en el caso de Santillana y E_r (l) en el de Teide. A título de ejemplo, Santillana da la siguiente definición:

"Se dice que la función f tiene por límite el número real L cuando x tiende a *a* si para todo entorno E(L,ε) de L de radio ε se puede encontrar un entorno E_1(a, δ) de a de radio δ tal que si x ∈ E_1 (a, δ), xγa, se verifica: f(x)∈ E(L,ε), y se escribe $\lim_{x\delta a} f(x) = L$".

Mientras que Anaya utiliza la definición métrica:

"$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe algún $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$ ".

En cuanto a la continuidad, todos utilizan la notación $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y la correspondiente a los límites laterales en dicho punto.

F.- Aspectos materiales.

Aunque cada uno de los libros refleja el estilo propio de su editorial, se observan similitudes entre ellos que son características de este periodo: la utilización de dos tintas, sobre todo para encuadrar y para trazar los grafos de funciones, la tendencia a encuadrar definiciones y resúmenes, en un intento de centrar la atención del alumno sobre aquellos puntos que el autor considera importantes, y el enunciado de objetivos específicos al comienzo de cada tema (excepto en el caso de Teide que no los enuncia).

El mayor desarrollo editorial y las nuevas técnicas de impresión se denota en la profusión de tipos de letras usadas, grandes, pequeñas, negritas, cursivas, con subíndices y superíndices, símbolos lógicos, perfección en el trazado de gráficas, llaves,... Además en los libros de Santillana y Anaya se utilizan dos columnas, una para hacer el desarrollo del tema y otra para ejercicios, ejemplos y ampliaciones del texto.

<u>Análisis cognitivo</u>.

Todos los libros tienen prólogo en el que los autores expresan sus intenciones prácticamente coincidentes en todos ellos. La idea predominante es presentar las Matemáticas desde la corriente de la matemática moderna, con rigor pero: "al mismo tiempo evitar caer en un excesivo rigorismo que harían inteligibles las citadas cuestiones para los alumnos de esta edad" (Santillana) o "con el lenguaje y el rigor necesarios, pero al mismo tiempo viables para los alumnos" (Teide).

También es determinante la idea de los autores de construir un edificio de las matemáticas en el que cada uno de los temas se va agrupando y necesita de los anteriores. Claramente la organización preconizada es global, así, todos afirman partir de los conocimientos presentados en los libros de 1º de B.U.P.; este modo de hacer va en consonancia con los usos didácticos de la época, y del sistema de evaluación continua estipulado en la L.G.E.; asímismo, y en consonancia con esta misma ley, los autores presentan una lista de objetivos más o menos operativos al comienzo de cada unidad y/o lección.

El método predominante para alcanzar estos objetivos consiste en presentar muchos y variados ejercicios y cuestiones intercalados en el texto. Al final de cada capítulo aparecen numerosos ejercicios como revisión, recapitulación y ampliación. En algunos casos (Teide) se dirigen a "aquellos alumnos más exigentes consigo mismos o para aquellos que necesiten de repeticiones o mayor práctica". Por su parte Santillana presenta al final del libro una parte de complementos y ampliación "concebidos para atender a las diferencias individuales".

Se pretende que los alumnos conciban las matemáticas como un edificio cuyos cimientos son la Teoría de Conjuntos y sus herramientas las aplicaciones y las estructuras, y que desarrollan las siguientes capacidades: aprendizaje de las definiciones, no sólo desde el punto de vista verbal, sino desde el simbólico, manipulación de símbolos, reglas lógicas, conocimiento del método deductivo, adquisición de las herramientas necesarias para la resolución de ejercicios y comprensión de algunas propiedades fundamentales. Será en C.O.U. donde estas habilidades se consoliden.

Análisis fenomenológico.

No hay referencias a situaciones o fenómenos propios de otras ciencias distintas de las Matemáticas, si hacemos excepción de un sólo ejemplo, que aparece en Anaya que relaciona la temperatura T de un gas con la potencia P con la que trabaja una máquina, y que se presenta dentro del concepto de continuidad.

Dentro de la propia matemática se observa un deslizamiento hacia la manipulación de símbolos y aspectos puramente formales, donde se ha perdido el significado de los diferentes conceptos. Así por ejemplo, en el caso de la noción de función, desaparece la idea de relación entre variables, incluso algunos autores (Anaya) se lamentan del olvido en que ha quedado la Geometría Elemental, a la que concede un papel formativo importante, pero que definitivamente obvian en sus textos, o la presentan desde un tratamiento algebraico.

En definitiva, estamos ante unos textos típicos de la corriente de la matemática moderna a los que se pueden aplicar las consideraciones hechas en otro apartado de este trabajo.

Grupo Cero

Análisis conceptual.

En este libro no hay ningún capítulo especial dedicado a límite y continuidad, sólo hay un apéndice al final del mismo. Ambos conceptos están difuminados a lo largo de todo el libro. En el capítulo dedicado a gráficas aparece por vez primera la idea intuitiva de discontinuidad ligada a un fenómeno natural: la ocultación por IO, uno de los treces satélites de Júpiter conocido, de la estrella Beta Scorpii C, mostrando la gráfica del brillo de la estrella, antes, durante y después de la ocultación; posteriormente menciona de nuevo la idea de discontinuidad al estudiar una función en escalera.

La notación de límite aparece por primera vez al tratar la velocidad instantánea en el capítulo dedicado a las derivadas, pero se trata solamente de una notación, en ningún caso de una definición de límite; posteriormente en el mismo capítulo aparece la definición formal de derivada como un límite.

Más adelante, dentro del capítulo sobre el estudio sistemático de las gráficas trata sobre asíntotas verticales, utilizando términos y notación de "tender a infinito" y de "aproximación".

En un capítulo posterior, dedicado a sucesiones y límites, se enfatiza la idea de sucesión como una función de N en R, tratando los límites de sucesiones como un caso particular de límite funcional.

Finalmente, dedica el apéndice a la formalización de los conceptos de límite y continuidad, llegando a la definición topológica de límite a partir de la idea de aproximación. En cuanto a la continuidad, da la definición topológica y la clásica mediante el límite.

En cuanto al cálculo o problemas de límite y continuidad, sólo los referidos a límites de sucesiones.

Análisis cognitivo.

En los planteamientos del Grupo Cero, el aprendizaje debe predominar sobre la enseñanza. Se trata de que sea el alumno el que investigue, conjeture y rectifique, si es preciso, para alcanzar el conocimiento, siendo labor del profesor la de gestor del aprendizaje. Por esto, el libro no busca señalar un programa, sino aportar materiales para el trabajo de los alumnos. En palabras de los autores: "en una clase activa de matemáticas, la tarea primordial es hacer matemáticas, es decir, matematizar", y entienden hacer matemáticas como: la actividad intensa del alumno estudiando diversos fenómenos, con los conceptos matemáticos que sirven para organizarlos e interpretarlos. Entonces, se rompe la secuencia ejemplo - definición - propiedades - ejercicios, convirtiéndola en presentación de diversos fenómenos - análisis de estos fenómenos - introducción del concepto organizador - nuevos fenómenos - ejercicios.

A través de estos planteamientos se pretende desarrollar en los alumnos capacidades inéditas hasta ese momento en los libros de texto, como: inducir, conjeturar, experimentar, analizar, rectificar los propios errores, sintetizar, bajo la tutela del profesor.

Análisis fenomenológico.

El texto se desarrolla de acuerdo con la aproximación fenomenológica de Freudenthal, incluso en el prólogo del libro se hace la siguiente cita de este autor: "la mentalidad matemática se expresa en la tendencia a matematizar las matemáticas. Por supuesto que los estudiantes deben aprender a matematizar situaciones reales. Matematizar situaciones matemáticas, puede ser el final, pero no el comienzo. Para muchos, el objetivo de la enseñanza de las matemáticas, es introducir a los muchachos en un sistema de matemáticas, sistema que, innegablemente irradia encanto estético, el cuál, sin embargo no puede ser captado por personas que no tengan un profundo conocimiento de las matemáticas". Hay por consiguiente, a nuestro juicio, una diferencia profunda con el resto de los autores, todos hablan de hacer matemáticas, pero esta idea difiere esencialmente desde la perspectiva en que la considera el Grupo Cero y la perspectiva en que la consideran los demás. Mientras que los autores anteriormente analizados se "encierran" en la misma matemática como ciencia y para ellos eso es hacer matemáticas, el Grupo Cero, siguiendo las ideas de Freudenthal, parten de una serie de fenómenos, de la física, economía, etc..., que matematizan. En palabras de los mismos autores: "no tratan de desarrollar un cuerpo de ideas matemáticas y sólo después introducir varias aplicaciones sino que, las aplicaciones deben surgir de un modo natural, alejando la posibilidad de toda separación ficticia entre teoría y práctica".

2.5.- 1990-1995: Hacia una nueva orientación en la enseñanza de las matemáticas.

Introducción.

Este periodo comprende desde la promulgación de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (L.O.G.S.E.) en 1990 hasta nuestros días. Como ya se ha dicho esta ley estableció un nuevo Bachillerato de dos años de duración. La implantación progresiva de esta ley ha traído como consecuencia la coexistencia de la antigua organización académica con la nueva. Dado que el nuevo Bachillerato no se imparte de modo generalizado y los libros de texto son escasos y aun no suficientemente experimentados, hemos optado por analizar libros de 2º de B.U.P. y C.O.U. en los que no obstante se observa una cierta asunción de las nuevas tendencias preconizadas en la L.O.G.S.E.

Dentro de estos libros hemos considerado dos bloques:

Bloque A:

- Edelvives
  MATEMÁTICAS 2º B.U.P.
  Ignacio Lazcano y Paolo Barolo.
  Luis Edelvives. Madrid. 1993.

- Vicens-Vives.
  MATEMÁTICAS. FACTOR 2.
  Fernando Álvarez Herrero; Carmen García Jiménez; Luis Mario Garrido Fernández; Antonio Vila Mitjá.
  Vicens-Vives. Barcelona. 1992.

Bloque B:

- Bruño.
  SIGNO II. MATEMÁTICAS 2º BACHILLERATO.
  Fernando Hernández Aina; Francisco Lorenzo Miranda; Ángel Martínez Losada; José Valdés Suárez.
  Bruño. Madrid. 1989.

- Anaya. (94) 2º B.U.P.
  BACHILLERATO. MATEMÁTICAS 2.

J. Cólera Jiménez; Miguel de Guzmán Ozaniz.
Anaya. Madrid.1994.

- Anaya (89). C.O.U.
  MATEMÁTICAS I. C.O.U.
  Miguel de Guzmán; José Cólera Jiménez.
  Anaya. Madrid. 1989.

La razón de considerar estos dos bloques, se basa en el distinto tratamiento que hacen los autores de los conceptos de límite y continuidad, tanto en secuenciación de contenidos como en metodología.

Análisis conceptual.

A.- Secuenciación de contenidos.

Los dos libros del bloque A comienzan con límites laterales, poniendo ejemplos pero sin dar una definición, y continúan con la definición de límite. En Edelvives se da la definición topológica, y en Bruño las definiciones topológica y métrica. A continuación tratan límites infinitos y límites en el infinito. Destacamos la importancia concedida a este tipo de límites en estos autores, así como en el resto de los libros analizados; si en la época anterior se insistía en los límites laterales, en esta época el acento está puesto en los límites infinitos y en el infinito. Siguen con las propiedades de límites de funciones, y operaciones con los límites de las funciones elementales y casos de indeterminación. Sólo el libro de Edelvives incluye un apartado dedicado a los infinitésimos, que utiliza para poder dar la definición métrica de límite. A continuación dan la definición de continuidad en un punto y en un intervalo, y las operaciones con funciones continuas. Los tipos de discontinuidad sólo aparecen en el libro de Edelvives.

La tendencia observada en los libros del bloque A de tratar con profundidad límites en el infinito, se acentúa en los libros del bloque B, en los cuales, ya desde el comienzo, se presentan los diferentes casos de límites infinitos y límites en el infinito, con la idea de generalizar el concepto de límite de una sucesión tratada anteriormente. Después de trabajar con este tipo de límites se da la definición para el caso finito. Al igual que en los libros del bloque A, tratan el álgebra de límite y los tópicos dedicados a la continuidad.

B.- Definiciones.

Aunque dan otras definiciones, fundamentalmente se trabaja con la definición métrica de límite, que se utilizará en ejemplos, ejercicios y propiedades. Es importante señalar la referencia que hacen los libros del bloque B a fenómenos sacados de la vida cotidiana o de la naturaleza.

Es común a todos los libros la definición clásica de continuidad utilizando el límite, aunque en algunos libros presentan también la métrica y la topológica.

C.- Ejemplos y ejercicios.

En los libros del bloque A hay numerosos ejemplos que se sitúan previamente a las definiciones y para ejemplificar las propiedades. El libro de Bruño propone ejercicios intercalados en el texto con la solución, y los dos libros estudiados tienen ejercicios al final. Las funciones son prácticamente las mismas que en el periodo anterior, habiéndose notado un mayor número de funciones definidas a trozos.

En los libros del bloque B hay una gran variedad en cuanto a la colocación de los ejemplos en el texto. El libro de Anaya (2º B.U.P.) presenta numerosos ejemplos tomados de situaciones cotidianas y fenómenos materiales previos al desarrollo del tema. El libro de Vicens-Vives (2º B.U.P.) da un ejemplo antes de cada definición. Por último el libro de Anaya (C.O.U.) tiene los ejemplos después de las definiciones y propiedades, como ejemplificación de ellas.

Todos los libros tienen ejercicios resueltos y propuestos a lo largo del texto. Al final de cada tema hay colecciones de ejercicios, que varían desde los que son de simple aplicación de los conocimientos adquiridos, otros de ampliación, de recapitulación, otros de profundización y reflexión sobre la teoría, de autoevaluación, y ejercicios propuestos en selectividad. Estos ejercicios están clasificados según el objetivo que pretendan, y tenemos que destacar el aumento considerable sobre los periodos anteriores; lo que es coherente con la declaración de intenciones que suelen hacer los autores acerca de lograr una mayor actividad de los alumnos.

D.- Teoremas.

Los libros del grupo A se caracterizan por la ausencia de demostraciones, sólo en el de Bruño aparece la demostración de que el límite de la suma de funciones es la suma de los límites. En el caso de Edelvives, al tratar las diferentes propiedades, se hacen continuas referencias al caso de las sucesiones, pero sin dar demostraciones. Los autores explicitan la ausencia de demostraciones, por ejemplo, el libro de Bruño dice: “no se justifican las propiedades por entender que las demostraciones rebasan el marco elemental de la presente obra”.

En los libros del grupo B, también se nota una ausencia de demostraciones en los correspondientes a 2º B.U.P. Por lo que se refiere al libro de Anaya de C.O.U., se presentan las demostraciones del Teorema de Bolzano, el de los valores intermedios y el Teorema de Weierstrass con sus demostraciones correspondientes, aunque éstas se desarrollan en un apartado titulado: “para ampliar”. En realidad los autores piensan que estas propiedades son intuitivas y que en este nivel no necesitan demostración, según se desprende de la introducción al tema.

E.- Representaciones gráficas y simbólicas.

a) Representaciones gráficas. Son muy abundantes en el bloque A. Aparecen tablas con los valores de la función próximos al punto en el que se calcula el límite, incluso en el libro de Bruño se hace la diferencia entre los valores de la función y el candidato al límite. Mediante gráficas cartesianas se representan todo tipo de funciones: continuas, discontinuas, con diferentes tipos de discontinuidad, incluso algunas que no tienen una clara expresión algebraica. En el libro de Edelvives muchas de estas gráficas aparecen dentro de una cuadrícula.

Hay escasas tablas de valores de las funciones en los libros del bloque B, por el contrario hay numerosas gráficas cartesianas, algunas de ellas también realizadas en cuadrícula. En el libro de C.O.U. de Anaya se utilizan gráficas cartesianas para explicar los distintos casos del concepto de límite. El énfasis que los autores ponen en los límites infinitos se traduce en una proliferación de representaciones gráficas de asíntotas, por medio de líneas punteadas.

En algunos libros, tanto del bloque A como del bloque B, aparecen cuadros resumen, a modo de síntesis de los conceptos que se han desarrollado en el texto.

b) Representaciones simbólicas. Lo primero que tenemos que señalar, en relación con la etapa anterior, es que los autores tienen la tendencia a la simplificación en el simbolismo. En cuanto al límite todos escriben $\lim_{x\delta a} f(x) = b$, y en el caso de la definición métrica aparecen módulos, y en el caso de la definición topológica, los entornos aparecen representados en la forma (p,q) o (a,s). Desaparece el de los libros del bloque A, utilizándose la expresión 10^{-p} . En ningún libro aparecen los símbolos de los cuantificadores. En cambio hay un aumento en el uso de expresiones del tipo: “muy próximo a”, “por grande que sea”, “mayor que cualquier número real por grande que sea”, “valores muy cercanos a”.

En cuanto a continuidad en todos los libros aparece la notación clásica de $\lim_{x\delta a} f(x) = f(a)$.

F.- Aspectos materiales.

En los libros del bloque A se continúa la tendencia del periodo anterior en el uso de dos tintas para enmarcar títulos, hacer recuadros, representar los grafos de las funciones en la segunda tinta. Se siguen utilizando distintos tipos de letra. El libro de Bruño presenta el texto en dos columnas.

Los libros del bloque B se distinguen por la profusión del color, presentando numerosas ilustraciones, algunas en las que no está ajeno el sentido del humor que hasta ahora sólo había aparecido en el libro del Grupo Cero de Valencia. Aparecen distintos tipos de letras: normales, cursivas, negritas, ... y muchos recuadros.

<u>Análisis cognitivo</u>.

Aunque estos libros siguen desarrollando el plan de estudios de 1975, sin embargo, a nuestro juicio, hay en ellos un enfoque distinto del que aparece en los libros del periodo anterior. Este nuevo enfoque se va iniciando en los libros del bloque A, y se consolida en el bloque B. Así en los libros de este último bloque observamos las siguientes características:

i) Importancia concedida a la motivación ya que: “los conceptos matemáticos surgen de modo natural del deseo de explorar cuantitativamente la realidad” (Anaya, C.O.U., prólogo).

ii) El apoyo en la historia de las matemáticas y en sus aplicaciones.

iii) La presentación intuitiva de los conceptos antes de su desarrollo formal.

iv) La actividad intensa de los alumnos a través de la realización de numerosos ejercicios y problemas, siendo éstos de diferentes tipos.

v) La conexión con la realidad y con otras ciencias, que se manifiesta en la presentación de diversos fenómenos que se pueden organizar desarrollando los conceptos matemáticos.

vi) El énfasis puesto en los procedimientos de resolución de problemas.

vii) La incorporación de apoyos didácticos como resúmenes, utilización de la calculadora, orientación en el uso de herramientas matemáticas y ejercicios de autoevaluación.

viii) La presentación de anécdotas, hechos curiosos y llamativos para resaltar el aspecto social, lúdico y cultural de las matemáticas.

Todo esto configura una nueva generación de libros de texto, donde se notan las influencias de ciertas corrientes de la Didáctica de las Matemáticas, como la fenomenología didáctica, el aprendizaje por descubrimiento y la resolución de problemas.

Análisis fenomenológico.

En los libros del bloque A las situaciones que se plantean son estrictamente matemáticas, excepto en el caso de Edelvives donde aparecen dos situaciones para ilustrar la continuidad y discontinuidad. La primera se refiere a la energía consumida por una lámpara en relación al tiempo que permanece encendida, y la segunda al gasto de teléfono respecto de los pasos.

Sin embargo en el bloque B son continuas las referencias tanto a situaciones de la vida diaria como a diversos fenómenos de la naturaleza, especialmente en el libro de 2º de B.U.P. de Anaya. Las situaciones planteadas son las siguientes, referidas a la relación entre:

- El volumen de una caja y su lado.
- El área de un cuadrado y su lado.
- El peso de un depósito y los litros de agua que contiene.
- La altura de rectángulos inscritos en un ángulo y su base.
- El porcentaje de audiencia de la televisión y la hora del día.
- La altura del agua de un depósito y el tiempo que tarda en llenarse.
- El aumento que proporciona una lupa y la distancia de ésta al objeto.
- La temperatura del agua que en el inicio está en ebullición y el tiempo a partir de ella.
- El volumen de una esfera y su radio.
- La intensidad del sonido y la distancia al foco.

En el libro de Vicens-Vives aparecen dos situaciones, una es la ya citada de la lupa, y otra es la del choque de un vehículo para ilustrar una discontinuidad de tipo salto. Por su parte en el libro de C.O.U. de Anaya, al final del capítulo aparece una sección dedicada a estrategias de pensamiento, donde se pide al alumno que ante ciertos fenómenos de las matemáticas y otras ciencias, experimente, observe, busque pautas, regularidades, haga conjeturas y trate de demostrar estas conjeturas. También aparece un punto dedicado a la aplicabilidad de la matemática, donde se presentan las relaciones entre matemáticas y ciencias naturales, y argumenta sobre la aplicación de las matemáticas a las mismas.

Conclusión.

En este capítulo, hemos estudiado, los diferentes planes de estudio desde la Segunda República hasta nuestros días, particularizando para el caso del límite y la continuidad. Por otro lado, la concreción de esos planes de estudio en diferentes libros de texto.

En general, y hasta la última reforma derivada de la L.O.G.S.E., el curriculo oficial se caracteriza por ser cerrado, con indicaciones precisas acerca del contenido, dispersas sobre la metodología y prácticamente nulas sobre la evaluación. Además, han existido periodos caracterizados por el carácter experimental de los programas oficiales, como ha sido el caso de la matemática moderna o de las ideas constructivas preconizadas en la última reforma. Se puede afirmar entonces que hay como “puntos de transición” en el cambio de estos programas oficiales.

Sin embargo, a pesar del carácter cerrado de los programas, se observa que el curriculo no ha sido uniforme en cada una de las épocas; al analizar los libros de texto, hemos demostrado las diferencias notables existentes entre ellos, a pesar de que en cada época deberían ajustarse a las disposiciones oficiales.

También se observa, tanto en los programas oficiales como en los libros de texto, la influencia de las corrientes internacionales. Después de un primer periodo, donde la atención estaba puesta en el rigor de las definiciones, se continuó con el de la matemática moderna, con el acento puesto en la formalización. Superado este periodo, se observa que los autores de los libros de texto tratan de presentar los conceptos conectados con situaciones, apelando a la intuición, con la intención de dotarlos de un sentido.

En los puntos de transición a los que hemos hecho referencia anteriormente, aparecen libros de texto que marcan diferencias con el periodo anterior, en particular, nos referimos a los textos piloto elaborados por la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media y los libros del Grupo Cero de Valencia.

También se constata el paso progresivo de los “libros de autor”, como los de Rodríguez San Juan, Sixto Ríos y Marcos de Lanuza, a los “libros de editoriales”, como Magisterio Español, SM, Anaya y Santillana, por citar las cuatro más importantes del mercado español, durante los últimos 25 años.

Particularizando al límite y la continuidad, tanto en los programas oficiales como en los libros de texto, se observa una evolución desde la consideración de ambos conceptos ligados al de función, pasando por un largo periodo en el que tienen entidad propia, hasta las últimas reformas en las que se enfatiza el carácter instrumental de los mismos.

En cuanto al límite hay un periodo inicial (hasta los años 50) en el que se dan definiciones “oscuras” mezclándose el concepto de variable y el concepto de continuidad seguido de un periodo en el que aunque se clarifica el concepto de límite, este concepto se define mediante sucesiones. En el periodo de la matemática moderna se pone el énfasis en la presentación topológica del concepto, aunque hay una traducción inmediata a la definición métrica, sin embargo, esta tendencia no es general a todos los autores. Con la implantación del B.U.P. derivado de la Ley General de Educación (L.G.E.), se consolida la tendencia de la matemática moderna, considerando el concepto de límite en sí mismo, definiéndose límites laterales, y presentando todos los casos finitos e infinitos del límite y de la variable. Los últimos libros, antes de la implantación de los nuevos bachilleratos derivados de la LOGSE, tienen una tendencia a presentar el concepto de límite en el marco de fenómenos de la naturaleza o situaciones de la vida diaria.

El concepto de continuidad, hasta la ordenación del B.U.P. en 1975, se define en general a partir del límite, aunque casi todos los autores presentan previamente una idea intuitiva de este concepto. En el periodo 1975-1990 se rompe la tendencia anterior, algunos autores comienzan con la continuidad y siguen con el límite, y otros mezclan ambos conceptos. La mayoría de los autores utilizan el concepto de continuidad por la derecha y por la izquierda ligado a límites laterales. En los años inmediatamente posteriores a la promulgación de la LOGSE, aunque se mantienen los programas de 1975, hay una tendencia a presentar el concepto de continuidad de modo más intuitivo, relacionándolo igual que el límite, con situaciones de la vida diaria y fenómenos naturales.

Referencias

Rico, L. y Sierra, M. (1994): Educación matemática en la España del siglo XX. En, J. Kilpatrick, L. Rico, M. Sierra: *Educación Matemática e investigación*. Madrid: Síntesis, 99-207.

Rico, L. y Sierra, M. (1997): Antecedentes del curriculo de matemáticas. En, L. Rico (ed.): *Bases teóricas del curriculo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis, 17-76.

Schubring, G. (1987): On the methodology of analysis of historical textbook: Lacroix as textbook author. *For the learning of the mathematics*, vol.7-3, 41-51.

Tavignot, P. (1993): Analyse du processus de transposition didactique. Application à la symètrie orthogonale en sixieme lors de la rèforme de 1985. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, vol. 13-3, 257-294.

CONCLUSIONES FINALES

1.- El desarrollo histórico de los conceptos de límite y continuidad nos muestra que ambos conceptos no se han desarrollado de modo lineal, sino con avances, retrocesos, indecisiones e incluso errores. Esto ha dado lugar a diversas concepciones de las que se ha dado cuenta detallada en el primer capítulo de esta memoria. Entre las referidas a continuidad destacamos la intuitivo-geométrica relacionada con los trabajos de Descartes, Newton o Leibniz, la concepción de Euler, la de Cauchy y la Weierstrass. En cuanto al límite hay que resaltar las de Euler-Lagrange, la D'Alembert-Cauchy y Weierstrass.

2.- Durante el aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad, los alumnos desarrollan una serie de concepciones que están relacionadas con las que han surgido en el desarrollo histórico, y además aparecen otras inducidas por la propia enseñanza.

3.- A partir de las respuestas dadas por los sujetos a un cuestionario donde se planteaban situaciones problemáticas referidas a ambos conceptos, se han establecido categorías que agrupaban justificaciones en las que subyacía una misma idea. El número de categorías son 11 para el límite y 13 para la continuidad.

4.- En cuanto al límite, el criterio de justificación más utilizado es la aplicación de límites por la derecha y por la izquierda, clasificado como conocimiento escolar. El siguiente es la idea de aproximarse que corresponde a las concepciones de D'Alembert y Cauchy. El tercer criterio de justificación más usado es el de sustituir el valor de la función en el punto que correspondería a la concepción de Euler-Lagrange.

5.- Para la continuidad, el criterio más usado es el de que una función es continua si se puede dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel próximo a la concepción intuitivo.-geométrica. El segundo criterio es el que asegura que una función es continua si está definida en todo punto (criterio erróneo). El tercero más usado es el de que existe f (x_0) y lim $_{x\delta x0}$ $f(x) = f(x_0)$ que es próximo a la concepción de Cauchy, aunque también es utilizado como simple algoritmo. Sin embargo el criterio que corresponde a la definición formal, no fue utilizado por ningún alumno.

6.- Además, se ha manifestado la dificultad de comprensión de ambos conceptos por parte de los alumnos a través de las respuestas erróneas e, incluso, la ausencia de respuesta.

7.- El análisis de los planes de estudio de bachillerato y COU desde la Segunda República hasta nuestros días muestra que el curriculo no ha sido uniforme en cada una de las épocas, a pesar de aparecer detallados en las disposiciones oficiales correspondientes.

8.- En cada una de las épocas han aparecido libros de texto tratando de concretar los programas oficiales. Algunos de estos libros reflejan las tendencias internacionales imperantes en la enseñanza de las matemáticas. Se observa que hay unos puntos de transición marcados por la publicación de ciertos libros como los textos piloto del MEC o los del grupo CERO.

9.- El análisis de los libros de texto muestra las diferencias notables existentes entre ellos. Después de un primer periodo donde la atención estaba puesta en el rigor en las definiciones, se continuó con el de la matemática moderna con el acento puesto en la formalización. Superado este periodo, se observa que los autores de los libros de texto tratan de presentar los conceptos conectados con situaciones y apelando la intuición. Para el límite y la continuidad, hay una evolución desde la consideración de ambos conceptos ligados al de función, pasando por un largo periodo en que tienen entidad propia, hasta las últimas reformas en que se enfatiza el carácter instrumental de los mismos.

10.- La transposición didáctica desde el saber matemático al saber contenido en los libros de texto ha tenido como consecuencia que en los manuales aparezcan conceptos como límites laterales, asíntotas, continuidad por la derecha y por la izquierda, continuidad en un intervalo, etc. Estos nuevos conceptos son fuente de algunas de las concepciones detectadas en el saber escolar, a través del análisis de las respuestas al cuestionario.