ALGORITMOS E MATEMÁTICAS

*Antón Labraña**
Universidade de Santiago
de Compostela

[...] o camiño volvíase cada vez máis intrincado e avanzar requiría grandes esforzos. Era necesario escrutar o terreo inmediato e recoñecer nel a solidez dun chan que nos garantira un paso seguro. Concentrados en resolver cada nova dificultade que de continuo se nos presentaba, sen decatármonos, fomos perdendo o senso da orientación e aprendemos a camiñar rutineiramente ollándonos os pés, esquecidos de todo horizonte.

Xesús Balteiro
No tempo das chuvias

INTRODUCCIÓN

O avance tecnolóxico das últimas décadas contribúe decisivamente nos diferentes ámbitos persoais e profesionais a facilita-la execución dos algoritmos, mediante o uso de calculadoras e ordenadores que multiplican a eficacia, rapidez e fiabilidade dos usuarios. Posibilítase así unha maior profusión de análises e estudios nos diversos campos das ciencias e das humanidades que requiren, por unha parte, dunha gran capacidade para procesar inxentes cantidades de información e, por outra, dunha dispoñibilidade de tempo para deseñar estratexias de investigación.

A educación debátese entre os intentos de modernización e a permanencia nos usos e costumes anteriores á revolución tecnolóxica. Nesta situación, asistimos ó afloramento dunha corrente crítica acerca do ensino-aprendizaxe das Matemáticas que reclama a inclusión das calculadoras e ordenadores nos niveis de ensino obrigatorio.

En moitos currículos oficiais tal demanda figura xa recollida, pero na práctica os cálculos de lapis e papel seguen a ser dominantes. Efectivamente, manexa-las rutinas de cálculo tradicionais coa necesaria fluidez e con garantías de eficacia, esixe unha dedicación en tempo e esforzo moi importante. O problema non reside en domi-

* Profesor Asociado de Didáctica das Matemáticas.

na-lo seu manexo senón en que, para conseguilo, se releguen o cálculo mental e estimativo e o uso intelixente de calculadoras e ordenadores porque, como xa foi sinalado por diferentes investigadores, se está sacrificando un enorme potencial formativo.

Aínda que se poden atopar referencias anteriores, podemos considera-lo *Informe Cockcroft* como un documento base no cal, entre outras moitas conclusións de enorme relevancia, se resaltaba a presencia de calculadoras e ordenadores en diferentes ámbitos profesionais, contrastando coa escasa preparación dos rapaces para o seu uso; a dependencia que a industria e o comercio teñen da capacidade de estimar, fronte á pouca atención que se lle presta na escola; o escaso sentido numérico que conseguen desenvolve-los educandos, que contrasta coa intensa dedicación á práctica dos cálculos...

Pouco despois, David S. Fielker, no traballo publicado orixinalmente pola Association of Teachers of Mathematics, sinalaba:

> A meirande parte dos "problemas" (na clase de Matemáticas) preséntanselles ós alumnos coa intención de facelos calcular (con lapis e papel), co cal perdémo-lo propósito orixinal dos cálculos, que foi o de permitirnos resolver aqueles problemas que pagaba a pena resolver.

Os estudios e informes sobre a cuestión fanse cada vez máis frecuentes.

Situándonos con proxección ó futuro, resaltámo-lo traballo de Jesús Mª Goñi, da Universidade do País Vasco, no que se indica que:

> Nunca se volverá facer un uso socialmente masivo do cálculo escrito. Iso contradise radicalmente co tempo que a educación escolar adica a desenvolver esta actividade, tempo que segue a ser, non soamente excesivo, senón maior có adicado a calquera outro tipo de contido.

Recentemente, Rheta Rubenstein, da Universidade de Michigan, publica os resultados das súas investigacións, nos que constata que:

> A discusión da estimación axuda os estudiantes a recoñecer e estende-las propiedades (dos números) a outras situacións, en particular, ás variables [...]. Ó se prodigaren na realización de cálculo mental nas clases, os estudiantes gañan confianza nas súas habilidades matemáticas, chegan a ter un pensamento máis flexible e son máis capaces de utilizar múltiples aproximacións a un problema que necesitan resolver.

E aínda máis próxima está a iniciativa dun nutrido e representativo grupo de profesores de Matemáticas que participaban nas 10ª JAEM (Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas), que a Federación Española de Profesores de Matemáticas organizou en Zaragoza (setembro de 2001). Encabezados polo Dr. Rafael Pérez (Universidade de Granada), elaboraron un documento base cara a un "Encuentro por la Educación", sobre a problemática que o anacronismo educativo está xerando:

> A escola, en xeral, tal e como hoxe a concibimos, é unha das consecuencias do paso que se deu da socieda-

Unha rapaciña aprendendo a calcular por medio das barras de cores.

de agrícola á industrial no século pasado [...]. A sociedade industrial deulle paso á da información, a escola debe sufrir unha necesaria adaptación porque a sociedade cambiou e ela non. Sen abandona-lo xa acadado, hai que avanzar para lle dar resposta á nova realidade: [...] hai que estar xunto ó noso alumnado, ofrecéndolle unha escola á altura dos tempos, tal e como eles intúen, onde desaparezan as destrezas de supervivencia escolar e sexan substituídas por destrezas realmente básicas, se constrúan os coñecementos que expliquen o mundo actual, estean incorporadas as tecnoloxías que son propias da nosa sociedade para ser adestrados no seu uso [...].

ALGORITMO

Co termo algoritmo (de Al-Khuwarizmi, matemático árabe do século IX) designamos en Matemáticas a aqueles procedementos que se executan mecanicamente.

Un algoritmo:

—*permite* obter resultados sen necesidade de xustifica-la validez dos pasos que se dan;

—*esixe* rigor, orde, concentración e, normalmente, certa dose de práctica;

—*pode ser popularizado*, xa que non é necesario comprender por qué funciona; abonda con controlar cómo funciona, o que é moito máis alcanzable. Como consecuencia diso, en pouco tempo pódese conseguir que unha gran parte da poboación saiba manexalos.

Os algoritmos máis coñecidos son:

—os de sumar e restar “levando”,

—os de multiplicar e o de dividir.

Clásicos na escola son tamén:

—os das operacións con fraccións,

—os do cálculo do mínimo común múltiplo e m. c. d.,

—o do cálculo de %.

Veñen pouco despois:

—os de resolución de ecuacións e de sistemas,

—os das operacións con polinomios,

—o da raíz cadrada,

—o do paso dun decimal periódico a fracción.

Nos primeiros cursos de Bacharelato:

—os de cálculo de límites,

—os de cálculo de derivadas e primitivas.

Os modernos algoritmos:

—a calculadora,

—o soporte lóxico informático.

Xunto con algúns outros, os algoritmos tradicionais para realiza-las catro operacións básicas (suma, resta, multiplicación e división) cumpriron un gran papel no desenvolvemento científico, industrial e comercial dos últimos séculos, cando se necesitaban cantidades importantes de persoas con capacidade para calcular. Sen embargo:

1) Podemos constatar como case a totalidade dos aprendices empregamos con corrección eses e outros algoritmos (como a fórmula da ecuación de 2º grao, por exemplo) durante moitos anos, sen que en realidade os comprendesemos.

2) A falta de comprensión non era debida a unha suposta falta de intelixencia pola nosa parte (quizais si ós oito anos, pero ós dezaseis xa nos debatiamos co cálculo infinitesimal), nin a unha incapacidade pedagóxica dos nosos mestres e profesores.

3) A razón estriba, sinxelamente, en que o sistema educativo non tiña a intención de que os comprendesemos; por iso nin nós nin os nosos mestres fomos convidados a reflexionar sobre os algoritmos máis alá do que se refire ó seu estricto funcionamento.

Nun principio, todo tipo de coñecemento é desexable, particularmente o algorítmico, xa que se constrúe para desempeñar unha función resolutiva eficaz:

1) Actualmente, as máis sinxelas calculadoras permítenlle a calquera profesional superar amplamente a súa capacidade de cálculo, respecto da que conseguía con lapis e papel; e programas de cálculo simbólico que caben nun disquete desbordan ós máis habilidosos especialistas en cálculos alxébricos e analíticos.

2) Se admitimos que un estudiante sabe resolver ecuacións de 2º grao porque manexa con corrección a famosa fórmula a pesar de que descoñece o seu fundamento (feito constatado entre centenares de estudiantes universitarios que cursaron Matemáticas de COU —opción de ciencias—), ¿por que nos negamos a admitir que un estudiante que manexa con corrección o, poñamos por caso, programa DERIVE, tamén sabe resolve-las ecuacións de 2º grao? ¿É que hai quen crea que o emprego do dito soporte lóxico non esixe rigor, orde, concentración e práctica?

3) Ningún dos algoritmos que enumeramos ó principio foi a resposta ó problema que contribúe a resolver, senón unha das respostas que se produciron. A súa elección preferente fronte a outros algoritmos debeuse á súa funcionalidade; ¿por que non permiti-

mos que continúe o proceso histórico de selección e tomamos partido polos máis eficaces?

4) Respecto da calculadora a situación legal é moi clara: non é que estea permitida, ¡é que hai que ensinar a usala!

O problema no ámbito educativo reside na propia limitación humana: non é razoable pretender dominar todo o coñecemento que nos rodea polo que, necesariamente, teremos que seleccionalo. Un criterio para seleccionar contidos pode se-lo da avaliación dos beneficios/custos de uso e de aprendizaxe. Comentamos isto unhas liñas máis adiante.

¿QUE SE NOS OCULTABA TRAS DOS ALGORITMOS?

A título indicativo, e mediante exemplos sinxelos, comentaremos brevemente os algoritmos máis populares: as catro regras, e o da raíz cadrada, que consisten en procedementos sintéticos que conxugan diversas propiedades numéricas en función das características do sistema de numeración utilizado.

SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

É o que empregamos na meirande parte das representacións numéricas actuais, aínda que coexiste con usos restrinxidos do sesaxesimal, romano, docenal, mixtos (horarios, moedas...).

a) É un sistema posicional: ademais do seu significado intrínseco, cada díxito ten asociado outro significado debido á posición que ocupa (unidades, decenas, centenas...).

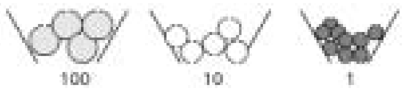
A Aritmética dictando os seus segredos a Pitágoras. Miniatura do século XIV.

b) Ten unha base fixa e única: cada dez unidades de calquera orde equivalen a unha unidade de orde superior.

DE COMPRAS

O anterior sistema monetario permitía construír un modelo do sistema de numeración, real e manipulable: moedas de 1 PTA, 10 PTA e 100 PTA. (Un pouco máis problemático é cos euros, dado o valor que terán 1, 10 e 100€).

Cada grupo de nenos ten un banco e realízanse todo tipo de actividades comerciais comprensibles para eles:

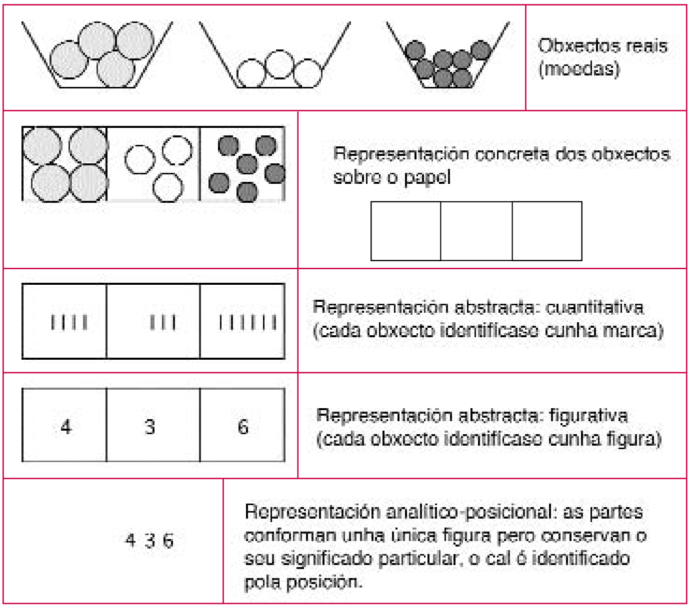


Mesmo con recortes de folletos publicitarios podemos simula-la compra dos artigos que desexen, alternando os roles: vendedor-comprador.

Comprar dous artigos supón sumar.

Da-la volta supón restar.

Do estadio manipulativo pasamos ó de representación figurativa. Resumimos nun exemplo os diferentes estadios polos que conduciriámo-los alumnos[1]:



1 Non necesariamente tódolos alumnos pasarán por estas fases, alomenos non dunha maneira perceptible para nós; con frecuencia algún neno que domina un estadio salta por si mesmo a outro construíndo representacións persoais, se non coincidentes, si equivalentes ás que tiñamos previsto para máis adiante.

Repetiriámo-las actividades, pouco a pouco, tendo aínda presentes fisicamente as moedas, que servirían para comprobar ou corrixi-las operacións.

A suma e resta de números dunha soa cifra acábase memorizando como unha necesidade práctica: contar polos dedos pode sernos de grande axuda.

Sumar ou restar sen levar non é máis ca un exercicio repetido cifra a cifra. Require, en calquera caso, certa dose de práctica.

Sumar levando:

$\begin{array}{rr} & {\scriptstyle 1} \\ 4 & 7 \\ +\,2 & 8 \\ \hline 7 & 5 \end{array}$	A explicación adoitamos contala así: "7 e 8, 15, levo 1; 4 e 2, 6 e 1 que levo, 7"

No sistema de numeración decimal:

$$\begin{array}{l} 47 = 40 + 7 \\ 28 = 20 + 8 \\ \hline \qquad 60 + 15 = 60 + 10 + 5 = 70 + 5 = 75 \end{array}$$

Restar levando:

Atópanse con frecuencia dous tipos de algoritmo, que se ilustran no seguinte exemplo:

$\begin{array}{rrr} & \mathbf{8} & 3 \\ - & 5 & 4 \\ \hline & & \end{array}$	a) $\begin{array}{rrr} & 8\ {\scriptstyle -1} \rightarrow & {\scriptstyle 1}3 \\ - & 5 & 4 \\ \hline & 2 & 9 \end{array}$	b) $\begin{array}{rrr} & 8 & {\scriptstyle 1}3 \\ - & 5{\scriptstyle +1} & 4 \\ \hline & 2 & 9 \end{array}$

A narración pode resultar moi próxima en ámbolos dous casos:

a) "Do 4 ó 13, 9; quito unha. Do 5 ó 8, 3; menos unha que quitei, 2"

b) "Do 4 ó 13, 9; levo unha. 5 máis unha que levo, 6; ó 8, 2"

A xustificación (consistencia lóxica do que se fai) móstrano-lo segredo que cada resta oculta:

a) No sistema de numeración decimal:

$$\begin{array}{l} 83 = 80 + 3 = 70 + 13 \\ 54 = \qquad\quad = 50 + \ 4 \\ \hline \qquad\qquad 20 + 9 \\ \qquad\qquad\ \ 29 \end{array}$$

b) 83 – 54 = (83 + 10) – (54 + 10)

No sistema de numeración decimal:

$$83 + 10 = 80 + 3 + 10 = 80 + 13$$

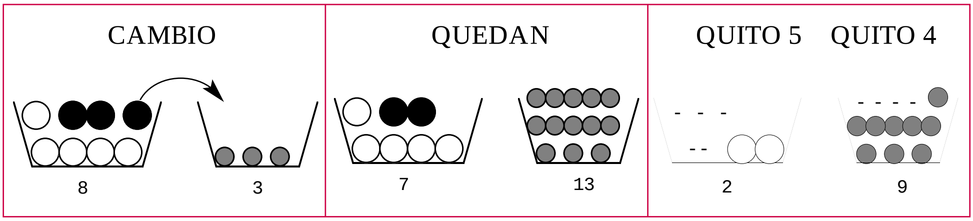
$$54 + 10 = 50 + 4 + 10 = 60 + 4$$

$$20 + 9$$

$$29$$

A opción a) reflicte exactamente o que teoricamente fariamos, e o que os propios nenos fan realmente nas actividades de compras:

Do noso banco no que temos 8 billetes de 10 € e 3 moedas de 1 €, para pagar 54, collemos 1 das decenas e trocámola por 10 unidades:



A opción b) baséase nunha idea importante: ó sumar unha mesma cantidade ó minuendo e ó subtraendo[2] a resta non varía.

Multiplicar por números con varias cifras:

$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 12 \\ \hline 46 \\ 230 \\ \hline 276 \end{array}$	Validez lóxica: 23·12 = 23·(2 + 10) = (20 + 3)·2 + (20 + 3)·10 = = 40 + 6 + 200 + 30 = 46 (primeira fila) + 230 (segunda fila) Na segunda fila hai un cero “oculto”.

Dividir con números de varias cifras:

2 Minuendo: o que diminúe; subtraendo: o que se subtrae.

División enteira

$$\begin{array}{r|l} 375 & 25 \\ \hline -25 & 15 \\ \hline 125 & \\ -125 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Primeiro mirámo-lo “tamaño” do número que nos vai resultar: indagamos cántas cifras vai ter.

Na perspectiva inicial de que dividir é repartir, o que facemos é repartir por etapas. Vémolo mellor con notación de fraccións:

$$\frac{375}{25}=\frac{250+125}{25}=\frac{250}{25}+\frac{125}{25}=10+5=15$$

Tamén nesta ocasión hai ceros ocultos, tanto cando escribimos –25 (é – 250), como cando poñémo-lo 1 do cociente (é 10 + ...).

División decimal

$$\begin{array}{r|l} 378 & 25 \\ \hline -25 & 15{\acute{}}\,1 \\ \hline 128 & \\ -125 & \\ \hline 30 & \\ 25 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

Respecto da anterior, quedaríannos aínda 3 unidades sen repartir:

$$\frac{378}{25}=\frac{250+125+3}{25}=\frac{250}{25}+\frac{125}{25}+\frac{3}{25}=10+5+\frac{30}{25}=15{\acute{}}$$

Como non é posible repartir 3 entre 25, convertémo-las 3 en 30 unidades de orde inferior (décimas, inicialmente). Agora si repartimos, pero debemos advertir que xa non se trata de entidades semellantes: iso é o que nos indica a coma decimal, como estamos habituados a pensar.

Raíz cadrada

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{20\ \ 25} & 45 \\ \hline -16 & 85\cdot 5 = 425 \\ \hline 425 & \\ -425 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Recordando que o que buscamos é un número que por si mesmo dea 2025:

Empezando pola dereita, separámo-las cifras de dúas en dúas: así sabémo-lo tamaño dese número.

Se o resultado vai ter máis dunha cifra intentamos convertelo no cadrado dunha suma:

Tomámo-lo 20 (en realidade 2000) e aproximámonos sen pasarnos: $4^2=16$, $5^2=25$, xa se pasa; agora sabemos que é corenta e pico, e poñemos 4.

Tamén aquí estamos traballando con ceros ocultos: $40^2=1600$, restamos e queda 425.

$$(40 + x)^2 =1600 + 2\cdot 40 \cdot x + x^2 =1600 + (80 + x)\cdot x$$

Tomámo-lo dobre de 4 (en realidade o dobre de 40) e buscamos ese “x” que nos falta para completa-los 425 da forma máis aproximada posible.

CÁLCULO MENTAL COMPRENSIVO: COUSA DE ESTRATEXIA

Non se trata de reproducir mentalmente as técnicas habituais de operacións, tal como as facemos no papel. Inténtase afondar nas propiedades das operacións e descompoñer un cálculo noutros máis simples, de xeito que estes últimos resulten moi fáciles, como por exemplo (respostas de alumnos de 2º da ESO):

428 - 203

(400 - 200) + (28 - 3) = 200 + 25 = 225

34·5

(30 + 4)·5 = 30·5 + 4·5 = 150 + 20 = 170

6·42

6·(40 + 2) = 6·40 + 6·2 = 240 + 12 = 252

7·49

7·(50 - 1) = 7·50 - 7·1 = 350 - 7 = 343

108:4

(100 + 8):4 = 100: 4 + 8: 4 = 25 + 2 = 27

Para o seguinte exercicio, 25·18, atopamos diferentes estratexias válidas que comentamos:

a)

25·(10 + 8) = 25·10 + 25·8 = 250 + 25·(4 + 4) =
= 250 + 25·4 + 25·4 = 250 + 100 + 100 = 450

Aplícase dúas veces a propiedade distributiva (tanto ten multiplicar nunha soa tacada que distribuí-la multiplicación en partes).

b)

25·(10 + 8) = 25·10 + 25·8 = 250 + 25·(4·2) =
= 250 + (25·4)·2 = 250 + 100·2 = 250 + 200 =
= 450

Aplícase unha vez a propiedade distributiva e outra a asociativa (cando temos 25·(4·2), ó ser tres números que se multiplican podemos asociar dous deles calquera, e facemos (25·4)·2.

c)

25·(20 – 2) = 25·20 – 25·2 = 500 – 50 = 450

Aplícase unha vez a propiedade distributiva.

d)

(2·25)·(18:2) = 50·9 = 450

Multiplicar e dividir por/entre o mesmo número non altera o resultado.

Traballase, inicialmente alomenos, con números naturais. A axilidade neste tipo de cálculo require unha dose máis ou menos continuada de práctica e, así mesmo, coñece-la táboa e saber operar con cifras seguidas de ceros.

Certamente (e afortunadamente) pensamos máis rápido do que escribimos, e tamén tomamos atallos no noso pensar. Pero o exercicio de escribir non é burocrático cando se trata de expresalo que cada quen está pensando, ou, se alguén atallou, de xustifica-lo atallado: isto redunda notoriamente na competencia lingüística, aínda que o código empregado sexa o aritmético.

Podemos, ademais, pasalo ben, pois esta actividade admite facilmente o formato de xogo matemático. Vexamos unha primeira versión simplificada desta, en termos de erros absolutos:

ERRO E AUTOCORRECCIÓN: "CALCULATOR MODERATO"

Normas:

O xogador que ten a quenda proponlle a outro que calcule mentalmente, por exemplo 77·8, e, nun tempo máximo de *n* segundos, debe darlle a resposta.

Coa calculadora compróbase o resultado e áchase o erro, rexístrase como puntuación negativa e vaise acumulando nos sucesivos intentos.

Agora cambia a quenda.

Gaña quen, despois de realizados tódolos intentos acordados, teña menos negativos. (É doado imaxinar que podemos situa-la dificultade onde consideremos conveniente).

XOGADOR: Anxo RIVAL: Montse

operación	resposta	calculadora	erro	penalización acumulada
4·98	408	392	16	16
77·8	606	616	10	26
...	...	...	...	...

O xogador que fai o cálculo escribe o que fixo detallándoo segundo se indicou nos exemplos e sinala, se é o caso, onde se equivocou.

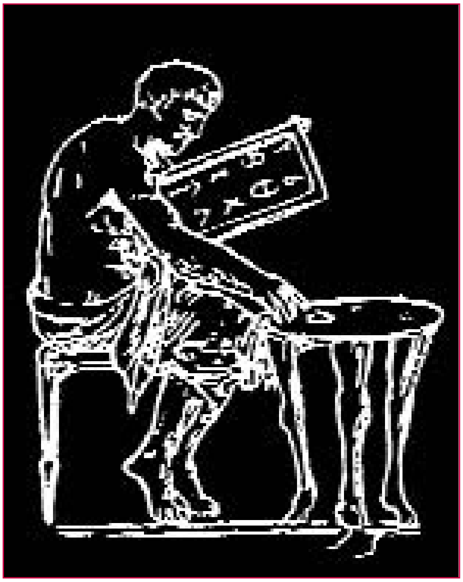
Ex: $4 \cdot 98 = 4 \cdot (100 - 2) = 4 \cdot 100 + \underset{\uparrow\ \text{erro, era } -}{4 \cdot 2} = 400 + 8 = 408$

ESTIMACIÓN, REDONDEO E CONTROL DO ERRO

Cando a dificultade para obte-lo resultado exacto é grande, conformámonos cunha boa aproximación:

1) Ás veces, a nivel práctico, é imposible coñece-lo resultado exacto, ben porque non se teñan tódolos datos (caso dunha sondaxe), ben porque interveñen números irracionais (π, $\sqrt{2}$,...).

2) Outras veces, sinxelamente, unha resposta aproximada contén a información que consideramos relevante para a cuestión da que estamos a falar:



Calculador etrusco.

Dun coche de 9.688 €, podemos dicir simplemente que custa 10.000 €.

OPERACIÓNS CON CANTIDADES ESTIMADAS: UNHA VERDADEIRA XIMNASIA MENTAL

O obxectivo fundamental é a substitución dos números que figuran como datos por outros próximos a eles que nos faciliten as operacións (en xeral buscaremos números que acaben en ceros, pero ás veces podemos atopar mellores camiños). Isto constitúe un riquísimo exercicio intelectual, que ademais nos leva a unha comprensión profunda das relacións lóxicas subxacentes á aritmética básica (o nivel de comprensión pretendido debe ser gradual).

Pasamos a comentar uns exemplos:

SUMA: Para 97 + 35 temos:

100 + 40 = 140

100 + 35 = 135

100 + 30 = 130

100 + 32 = 132

Verdadeiro resultado: 132. ¿Podemos explicar por que unhas estimacións se aproximan máis cás outras, ou será simplemente casual?

100 + 40 = 140; a peor: acumulamos exceso nos dous números.

100 + 35 = 135; regular: excedémonos nun dos números soamente.

100 + 30 = 130; bastante boa: compensámo-lo exceso do primeiro co defecto do segundo número.

100 + 32 = 132; exacta: segue a estratexia da compensación, controlando ademais o erro (excédese 3 ó poñer 100, polo que llos quita a 35).

RESTA: Para 97 - 35 temos:

100 - 40 = 60

100 - 30 = 70

97 – 37 = 60

97 – 37 + 2 = 60 + 2 = 62

Verdadeiro resultado: 62. ¿Podemos explicar por que unhas estimacións se aproximan máis cás outras, ou será simplemente casual?

100 - 40 = 60; bastante ben: exceso nos dous números, pero non o acumulamos, xa que se van restar un do outro.

100 - 30 = 70; a peor: ó restar, o exceso do primeiro non se compensa co defecto do segundo número, senón que se acumula.

97 - 37 = 60; sae bastante ben: excedémonos nun dos números soamente.

97 – 37 + 2 = 60 + 2 = 62; suma e resta 2, forzando a coincidencia dalgunhas cifras, o que simplificará o cálculo.

MULTIPLICACIÓN: Desde a perspectiva de que unha multiplicación é unha suma reiterada, agardariamos unha conducta semellante á observada para a suma, aínda que agora será máis difícil de explicar (a clave estará en que a modificación que fagamos sobre un dos factores repercute no outro; a percepción deste feito implica unha comprensión da multiplicación máis fonda do habitual, segundo puidemos comprobar):

Para 97·35 temos:

100·40 = 4000

100·30 = 3000

100·35 = 3500

100·32 = 3200

100·34 = 3400

Verdadeiro resultado: 3395. ¿Podemos explicar por que unhas estimacións se aproximan máis cás outras, ou será simplemente casual?

100·40 = 4000; a peor: acumulamos exceso nos dous números.

100·30 = 3000; regular: compensámo-lo exceso do primeiro co defecto do segundo número.

(Agora é como se sumasemos moitas veces, por iso xa non funciona tan ben a simple compensación pois o erro reproduciríase en cada vez).

100·35 = 3500; regular: soamente nos excedemos nun número (pásano-lo mesmo que na anterior).

100·32 = 3200; bastante boa: trata de controla-la repercusión dos erros quitándolle a 35 o exceso ocasionado ó emprega-lo 100.

100·34 = 3400; moi boa: trata de controla-la repercusión dos erros; valora que cada unidade que se lle saque a 35 son 100 que se lle saca ó total:

a) Se puxesemos 100·35 sería (97 + 3)·35, o que significa que aumentamos 3 veces 35.

Pero agora, se poñemos 100·32 serían 100·(35 – 3), o que significa que sacariamos 3 veces 100 (¡moito máis do que engadimos por poñer 100!).

b) Podemos controlar: se puxesemos 100·35 sería (97 + 3)·35, o que significa que aumentamos 3 veces 35, en total uns 100, ¡logo debemos sacar unha soa vez 100!

DIVISIÓN: desde a perspectiva de que unha división é unha resta reiterada, esperariamos unha conducta semellante á observada para a resta, aínda que agora chega a ser bastante difícil de explicar[3]:

Para 97:35 temos:

100:40 = 2´5

100:30 = 3´333...

(70 + 27):35 = 70: 35 + 27:35
2 + 0´7 = 2´7

Verdadeiro resultado: 2´771... ¿Podemos explicar por que unhas estimacións se aproximan máis cás outras, ou será simplemente casual?

100:40 = 2´5; bastante boa: exceso nos dous que a división se encarga de compensar (hai que ter en conta que a división é difícil en si mesma, polo que temos que ser máis permisivos co redondeo).

100:30 = 3´333...; errada: se aumento o numerador agrando a división, e se diminúo o denominador tamén (acumulo os erros).

(70 + 27):35 = 70:35 + 27:35
2 + 0´7 = 2´7; máis elaborada: a última parte faise a ollo, vendo que 27 é máis da metade de 35.

En moitas ocasións expresaremos con precisión ata onde chega a nosa conformidade coa aproximación, e dirémo-lo % de erro que aceptamos. Téñase en conta que esta aceptación nos dá unha marxe para acertar, pero aínda así poderiamos saír fóra: esta situación de dobre incerteza conforma o substrato psicolóxico do pensamento estatístico. Volvemos sobre isto ó final.

SOBRE O USO CORRECTO DA CALCULADORA

O uso correcto da calculadora esixe (e ó practicar educa) estructurar rigorosamente os problemas.

O seu funcionamento é de tipo algorítmico, e para dominalo é necesaria certa dose de práctica con actividades especificamente deseñadas para isto.

Para poder educar no seu uso necesitamos coñecer cómo opera o

3 Se consideramos outras respostas como 90:30=3, e tratamos de comparala con 100:40=2´5, repararemos en que hai dous tipos de modificación: a do numerador, que habería que repartir entre o denominador, e restar ou sumar, segundo o caso; e a do denominador: se diminúe habería que redistribuí-la parte proporcional e se aumenta habería que reservar para o dito aumento a parte proporcional. A discusión é realmente complexa:

$$\frac{90}{30}=\frac{97-7}{35-5}=\frac{97-5\cdot\frac{97}{35}+5\cdot\frac{97}{35}-7}{35-5}=\frac{97-5\cdot\frac{97}{35}}{35-5}+\frac{5\cdot\frac{97}{35}-7}{35-5}=\frac{97}{35}+\frac{5\cdot\frac{97}{35}-7}{30}$$

$$\frac{100}{40}=\frac{97+3}{35+5}=\frac{97+5\cdot\frac{97}{35}-5\cdot\frac{97}{35}+3}{35+5}=\frac{97+5\cdot\frac{97}{35}}{35+5}+\frac{5\cdot\frac{97}{35}-7}{35+5}=\frac{97}{35}+\frac{3-5\cdot\frac{97}{35}}{40}$$

é, en cada caso, o último sumando o erro cometido.

alumno, necesitamos un... divertido código máquina[4]:

— Os números escribímolos co seu símbolo.

— As demais teclas poñémolas nun recadro.

— Cunha frecha indicámo-lo que nos aparece na pantalla.

Na pantalla vémo-lo resultado.

Non precisamos premer “=”.

— Cos números que están na pantalla podemos seguir operando.

Exemplo: “Raquel compra tres libros de 7,55 € e sete cadernos de 2,40 € cada un. Fanlle un desconto do 12%. ¿Canto tivo que pagar?”.

a) Calculemos primeiro o que custaban as cousas:

$3\ \boxed{x}\ 7{,}55\ \boxed{M+} \rightarrow 22{,}65$

$7\ \boxed{x}\ 2{,}40\ \boxed{M+} \rightarrow 16{,}8$

$\boxed{MR} \rightarrow 39{,}45$

b) Apliquémoslle agora o desconto:

$\boxed{x}\ 12\ \boxed{\%}\ 4{,}734\ \boxed{-} \rightarrow 34{,}716$

(redondeo a 37,72 €).

Uns pequenos comentarios:

As teclas de memoria[5] pensáronse para gardar aqueles resultados parciais que se van volver necesitar. Indicamos M+ ou M-, se a nosa intención é sumalos ou restalos, respectivamente. Unha vez feitas as contas parciais, pedímoslle o resultado con MR.

Para calcular unha porcentaxe multiplicamos por ela e prememos %; a calculadora móstrano-la correspondente porcentaxe. Se a queremos descontar, a continuación premeremos “-”, e se a quixesemos engadir a continuación premeriamos “+”.

Resulta evidente que o uso da calculadora é un rigoroso algoritmo que precisa de ser exercitado para o seu correcto emprego. A rapidez e fiabilidade dos cálculos permite:

4 Este pequenísimo artificio, lonxe de se converter nunha dificultade, resultou ser (tanto en nivel ESO como 6º de Primaria) un elemento que daba a seguridade de que as cousas se estaban facendo ben; proporcionaba, incluso, satisfacción nos nenos.

Neste sentido convén lembrar que xa no século XVII Leibniz lle propoñía á comunidade científica da época a tarefa de construcción dun Cálculo simbólico que proporcionase seguridade nos procesos de resolución; claro que el se refería ó que chamariamos despois “análise infinitesimal”, que na súa época era aínda un tanto escurantista (Leibniz foi un dos máis destacados creadores neste campo da Matemática).

5 A secuencia anterior refírese a modelos casio HS-8G, HL-820LU, HL-812E... ou compatibles.

1) Recrear situacións reais e variadas do contorno social, común e actual, polo que o alumnado pode sentirse plenamente identificado.

2) Continuar coa execución de rutinas mecánicas, beneficiándonos do que estas prácticas nos poden proporcionar (orde, rigor e concentración), pero investindo moito menos tempo nisto.

3) Dedicar máis tempo e esforzos a actividades intelectualmente moi superiores, por exemplo, a estructurar problemas.

A calculadora actúa aquí como un mero instrumento, como un cable telefónico que nos permite establece-la comunicación entre nós e o mundo real, proporcionándonos respostas a cálculos mecánicos que agora non tiñamos interese en practicar e que, de ter que facelos á man, ocuparían case todo o tempo dispoñible.

Cadro comparativo: avaliación beneficios / custos

CÁLCULO:	Tradicional	Calculadora
Beneficios:		
— Formativos:		
Orde, rigor, concentración, seguridade.	Altos	Altos
Comprensión.	Nula	Nula
— Utilitarios.	Baixos	Moi altos
Custos:		
Tempo de aprendizaxe.	Alto	Baixo
Tempo de execución.	Medio	Baixo
Frecuencia de erros.	Media	Baixa

Neste cadro resúmense apreciacións certamente subxectivas, pero que responden á nosa propia experiencia como profesores de alumnos instruídos nos algoritmos tradicionais e de alumnos instruídos nos modernos algoritmos (calculadora).

Podemos aínda considera-la posibilidade de contemplar conxuntamente os tres tipos de cálculo alternativos: mental, estimativo e calculadora.

CALCULATOR: CÁLCULO MENTAL, ESTIMATIVO E CALCULADORA

Normas:

O xogador que ten a quenda proponlle a outro que calcule mentalmente, por exemplo, 77·96 e, nun tempo máximo de *n* segundos, debe darlle a resposta.

Coa calculadora compróbase o resultado e áchase o % estipulado, sumándoo ou restándoo segundo se excedese ou quedase curto na resposta. Isto dinos ata onde chega a marxe tolerada (por exceso ou por defecto, segundo os casos), co cal sabemos se acerta ou non dentro dela e, así, terá 1 punto ou non o terá.

Agora cambia a quenda.

Gaña quen, despois de realizados tódolos intentos acordados, teña máis puntos.

XOGADORA: Isa RIVAL: Ismael Erro permitido 5 %

operación	resposta	- 5%	calculadora	+ 5%	puntos
75·96	7500		7200	7560	1
46·34	1450	1485´8	1564		0
…	…	…	…	…	…

EPÍLOGO

Quen actualmente se dedique profesionalmente (ou estea en período de formación, tanto no eido investigador como no docente) ó mundo da Matemática terá, probablemente, un grato recordo dos algoritmos, pois neles se baseaba unha parte importante do programa de instrucción matemática co que nos formamos e co cal tivemos un notable éxito académico, con frecuencia recoñecido.

Pero iso non significa que non fose posible formarnos con programas de instrucción nos que se primasen outros aspectos da Matemática, nin que os ditos programas alternativos nos afastasen duns niveis de éxito académico semellantes.

Quizais poidamos sentir incerteza diante da hipótese dunha instrucción diferente, porque o ámbito do que se converteu en familiar sempre nos proporciona seguridade, pero teño total confianza en que a nosa capacidade non se vería resentida.

Creo, tamén, que sen os algoritmos se crearía moi pouca Matemática, pois cada vez que afrontasemos un problema, real ou teórico, veriámonos obrigados a percorrer tediosos camiños. Pero a esencia da Matemática non radica neles, senón nas ideas que os motivaron e nas relacións lóxicas que os sustentan.

Se a énfase se segue poñendo nos aspectos algorítmicos, a meirande parte dos estudiantes esgotará os seus recursos (tempos de aula e de estudio incluídos) en domina-los mecanismos, e estarémoslles convertendo nunha mera colección de trucos o que debese ser unha ciencia rebordante de ideas fascinantes dotadas dunha coherencia lóxica case perfecta.

BIBLIOGRAFÍA

Alesandrov, A., e outros, *La matemática: su contenido, métodos y significado*, Madrid, Alianza Universidad, 1979.

Bachelard, G., *La formation de l'esprit scientifique*, París, De Vrin, 1975. Versión en castelán, *La formación del espíritu científico*, México, Siglo XXI, 1985.

Balacheff, N., "Towards a 'problématique' for reseach on mathematics teaching", *Journal for Reseach in Mathematics Education*, 21 (4), 1990, pp. 259-272.

Boyer, C., *Historia de la Matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 1986.

Brousseau, G., "Les obstacles epistemologiques et les problémes en Mathématiques", *Recherches en didactique des mathématiques*, 4 (2), 1983, pp. 165-198.

Bruner, J., *El proceso mental en el aprendizaje*, Madrid, Narcea, 1978.

Cockcroft, *Las Matemáticas sí cuentan*, MEC, Madrid, 1985

Courant, R., e H. Robbins, *¿Qué es la Matemática?*, Madrid, Aguilar, 1979.

D'Halluin, C., e D. Poisson, *Une stratégie d'enseignement des mathématiques: la mathématisation de situations intégrant l'informatique comme outil et mode de pensée*, These de Doctorat, Université de Lille, 1988.

Entwistle, N., *La comprensión del aprendizaje en el aula*, Barcelona, Paidós / MEC, 1988.

Fielker, D., *Usando las calculadoras con niños de diez años*, Generalitat Valenciana, Consellería de Cultura, Educació i Ciencia, Valencia, 1986.

Fielker, D., *Rompiendo las cadenas de Euclides*, Madrid, MEC, 1987.

Freudenthal, H., *Mathematics as educational task*, Dordrecht-Holland, D. Reidel Publishing Company, 1973.

___*Didactical phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht-Holland, D. Reidel Publishing Company, 1983.

Goñi, J. M., *El curriculum de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (varios autores), Graó, Barcelona, 2000.

Kline, M., *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (2 vol.), Madrid, Alianza Universidad, 1992.

Lakatos, I., *Pruebas y refutaciones*, Madrid, Alianza Universidad, 1976.

___*Matemáticas: ciencia y epistemología*, Madrid, Alianza Universidad, 1981.

Mayer, R. E., *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*, Barcelona, Paidós, 1986.

Nickerson, R., D. Perkins e E. Smith, *Enseñar a pensar*, Barcelona, Paidós / MEC, 1990.

Piaget, J., *Introducción a la epistemología genética*, México, Paidós, 1987.

Pólya, G., *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas, 1986.

___"Métodos matemáticos en la Ciencia", *La tortuga de Aquiles*, 3, Madrid, Euler, 1994.

Resnick, B., e W. Ford, *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, Barcelona, Paidós-MEC, 1991.

Rheta Rubenstein, *Mental mathematics beyond the Middle School: Why? What? How?,* Mathematics Teacher (National council of teachers of Mathematics), vol. 94, núm. 6, setembro 2001, pp. 442-446.

Schoenfeld, A. H., "Teaching problem-solving skills", *American Mathematical Monthly*, 87 (10), 1980, pp. 794–805.

___*Mathematical problem-solving,* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1985.

Shayer, M., e R. Adey, *La Ciencia de enseñar Ciencia*, Madrid, Narcea Ediciones, 1986.

♦ ♦ ♦

LABRAÑA, Antón: "Algoritmos e Matemáticas", *Revista Galega do Ensino*, Xunta de Galicia, núm. 34, febreiro, 2002, pp. 147-166.

Resumo: Comezamos por constatar que existe unha estendida insatisfacción, entre a comunidade de educadores matemáticos, diante do peso curricular que manteñen os cálculos tradicionais, o que entra en contradicción cos avances tecnolóxicos das últimas décadas, que revolucionaron o cálculo profesionalizado. Revisámo-los significados asociados ós algoritmos escolares e analizámo-las causas das dificultades para o cambio. Propoñemos, a partir de experiencias prácticas de aula, unha aritmética baseada nunha combinación do cálculo mental comprensivo, do cálculo estimativo e da calculadora, adaptada ás diferentes situacións que poden presentársenos.

Palabras chave: Educación matemática. Cálculo aritmético.

Resumen: Comenzamos por constatar que existe una extendida insatisfacción, entre la comunidad de educadores matemáticos, ante el peso curricular que mantienen los cálculos tradicionales, lo cual entra en contradicción con los avances tecnológicos de las últimas décadas, que revolucionaron el cálculo profesionalizado. Revisamos los significados asociados a los algoritmos escolares y analizamos las causas de las dificultades para el cambio. Proponemos, a partir de experiencias prácticas de aula, una aritmética basada en una combinación del cálculo mental comprensivo, el cálculo estimativo y la calculadora, adaptada a las diferentes situaciones que se nos pueden presentar.

Palabras clave: Educación matemática. Cálculo aritmético.

Summary: I begin by verifying that there is a wide dissatisfaction among mathematics teachers because of the curricular weight of traditional calculus in opposition to the technological advances of the last decades which have revolutionized professionalized calculus. All significances associated to school algorithms are revised and the reasons for the difficulties to change are analysed. I propose, from classroom practical experiments, an arithmetic based on a combination of understanding mental calculus, approximate calculus and the calculator, adapted to any situation we may have to face.

Key-words: Mathematics education. Arithmetical calculus.

— Data de recepción da versión definitiva deste artigo: 29-10-2001.