vida escolar

La nueva sistemática de los cuestionarios de Matemáticas, divididos en ejercicios y adquisiciones, exige en primer lugar actividades de carácter operativo, ya que el aprendizaje de conceptos y relaciones matemáticas debe ser activo. A los conceptos se llegará únicamente mediante una serie de ejercicios cuya realización conduce al dominio de las nociones y garantiza el desarrollo de hábitos y destrezas pertinentes.

La enseñanza de la matemática debe ser funcional. Su aprendizaje se vinculará a la solución de los problemas que la vida ordinaria plantea permanentemente a los niños, y éstos de tal forma que ellos vean algún valor en tal aprendizaje. En suma, se trata de que dicha enseñanza se relacione con situaciones vitales, garantizando así el interés y la participación activa del escolar.

Esto implica, de una parte, la adquisición de conceptos significativos a través de operaciones como contar, medir y comparar objetos concretos, y de otra, la comprensión del sistema numeral de base 10. Las cuatro operaciones básicas no son otra cosa que formas que economizan esfuerzos al tratar con grupos para hallar «cuánto» o «cuántas cosas». En este sentido todas ellas están relacionadas con el contar y entre sí. Las fracciones son simplemente una extensión del sistema numeral a cantidades menores que la unidad expresadas en forma de quebrados o de decimales, etc.

Se introduce también una serie de conceptos funcionales que tienen por objeto familiarizar al alumno con procedimientos actuales en el estudio de las matemáticas. Fundamentalmente se trata de rudimentos de topología, tales como representación gráfica de conjuntos para pasar a las relaciones de «dentro» y «fuera» y progresar por este camino a la intuición de lo «común», base para la descomposición factorial, inteligencia de los esquemas de órdenes de unidades, y las propiedades uniformes, asociativa, conmutativa y distributiva en el cálculo operativo. Por esta vía se llega al concepto operativo factor común y, en fin, a otros capítulos de los números racionales en general.

(Del Prólogo de los Cuestionarios Nacionales correspondientes a las Matemáticas.)

aplicaciones de la teoría de conjuntos a la enseñanza de la aritmética elemental

Por JUAN A. VIEDMA CASTAÑO

Ex director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Antioquía, de Medellín (Colombia) y profesor actualmente del Centro de Estudios Superiores de la Compañía de Jesús en Alicante

El tema que más ha influido en el desarrollo de la Matemática durante el siglo XX es la Teoría de Conjuntos, creada por Georg Cantor (1845-1918) y su escuela, y aplicada con éxito sorprendente al estudio de la Lógica por George Boole (1815-1864).

Gracias a esta teoría se han unificado muchas ramas de la Matemática, aparentemente distintas, y se ha encontrado un fundamento sólido común para todas ellas.

En este pequeño artículo nos proponemos describir cómo pueden usarse los conceptos más elementales de la Teoría de Conjuntos para enseñar matemáticas en la Escuela Elemental; pero antes vamos a ocuparnos de explicar la necesidad de hacerlo así.

El signo característico de la educación actual es *la actividad*. Se trata de que el niño aprenda *haciendo*, de acuerdo con la frase de Anaximandro «El hombre aprende con las manos». Si bien esta máxima no es rigurosamente cierta cuando se aplica a los hombres adultos, es indudable que ella se aproxima bastante bien a la realidad del aprendizaje en los niños. Por esta razón hay que desterrar de la enseñanza en nuestras escuelas las definiciones abstractas, construidas con palabras que los niños no entienden, y que originan la tortura psicológica que se sufre al tratar de aprender un material sin sentido. Frente al sistema antiguo, de hacer aprender al niño claúsulas de memoria, sin sentido para él, los sistemas modernos preconizan el «Método Eurístico» (*).

(*) Las personas interesadas en obtener más detalles sobre este método, pueden consultar nuestro trabajo: «Ideas generales acerca de la didáctica de la matemática elemental», aparecido en la *Revista de Educación*, del Ministerio de Educación Nacional, en los números 23 y 24 (julio-agosto de 1954 y siguiente).

Según el espíritu de este método, el conocimiento se engendra a través de la actividad del niño, hábilmente planeada y dirigida por el profesor.

Por esta razón, el punto de arranque para la enseñanza de cualquier tema de matemáticas debe consistir en una cadena de experiencias, reales o fácilmente imaginables por el niño, que pongan en movimiento su sentido de observación y su curiosidad innata y lo conduzcan a la comprensión del concepto matemático que se le trata de enseñar. Así es posible que el niño entienda el significado de las operaciones aritméticas y de sus propiedades, y no se limite únicamente a la ejecución mecánica de tales operaciones con números abstractos, que nada dicen a su imaginación y que por tanto carecen de interés para él.

Convencidos de esta necesidad de conducir la enseñanza de forma activa, necesitamos «una cantera» de la cual extraer los materiales para elaborar las experiencias que conduzcan al niño a la formación de los conceptos matemáticos; pues bien, esta «cantera» la hallamos precisamente en los Elementos de la Teoría de Conjuntos.

A continuación describimos, sucintamente, cómo pueden enseñarse a los niños las nociones elementales sobre conjuntos, y cómo pueden usarse estas nociones para desarrollar clases activas sobre las operaciones aritméticas y sus propiedades.

La Noción de Conjunto: En ningún momento debe intentarse dar una definición formal de la idea de *conjunto*; basta con que el niño adquiera conciencia del significado de la palabra *conjunto* como sinónima de una *colección* o *agrupación* de objetos de cualquier clase, y esto se consigue mediante la descripción de varios ejemplos de conjuntos de los que se encuentran en la vida corriente: Todos los alumnos de una clase forman *un conjunto*; cada alumno se dice que es *un elemento* del conjunto; todos los árboles de un bosque forman un conjunto; cada árbol es un elemento del conjunto, etc., etcetera. Debe continuarse la descripción de ejemplos de conjuntos, señalando en cada caso sus elementos, hasta que los niños usen con soltura estas palabras. Después se pedirá que ellos propongan ejemplos de conjuntos, señalando sus elementos, y el profesor anotará estos ejemplos propuestos por los alumnos, porque ellos reflejan muy bien el campo de sus intereses y deben ser usados para explicaciones posteriores.

Representaciones simbólicas: No es muy difícil convencer a los niños de la utilidad de representar los objetos de un conjunto mediante signos o símbolos sencillos.

Se puede comenzar así: ¿Cómo representaríais sobre un papel los aviones de un campo de aviación en el que hay dos trimotores (aviones de tres hélices), tres bimotores y cuatro avionetas de un solo motor? Los niños actúan y ofrecen sus soluciones, a veces desconcertantes por su originalidad y precisión. Después de proponer varios ejemplos de representaciones simbólicas de conjuntos, se advertirá a los niños la conveniencia de encerrar entre llaves los elementos del conjunto, separados mediante comas. El conjunto de aviones del ejemplo anterior se representaría así: {.˙., .˙., .—., .—., .—., .., .., .., ..} conviniendo en representar un trimotor por .˙., un bimotor por .—., y una avioneta por . .

Hay que insistir en la importancia que tienen las representaciones simbólicas en las ciencias, la técnica, y en todas las actividades de la vida, así como en la distinción entre los símbolos y los objetos representados por ellos.

Deben multiplicarse los ejemplos, dejando siempre libertad a los niños para que ellos ideen sus propios símbolos para representar a los elementos de cada conjunto.

Cuando no hay que detallar los elementos de un conjunto, se suele representar por una letra mayúscula; por ejemplo, podemos convenir en representar el conjunto de los alumnos de una clase por la letra A. También es frecuente representar los elementos por letras minúsculas.

Relación de pertenencia y relación de inclusión: Cuando un elemento, *a*, pertenece a un conjunto, A, se escribe así: $a \in A$; por el contrario, si el elemento *a* no pertenece al conjunto A se escribe $a \in A$.

Cuando todos los elementos de un conjunto, A, pertenecen a otro conjunto, B, se dice que A *está incluido en B*, y también que A *es un subconjunto de B*, y se escribe $A \subset B$.

Cuando A no está incluido en B (algún elemento de A no pertenece a B) se escribe $A \subset B$.

En el caso de que $A \subset B$ y $B \subset A$, los conjuntos A y B tienen los mismos elementos (todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a A), y se dice que el conjunto A es igual al conjunto B y se escribe $A = B$.

Si $A \subset B$ y $B \subset A$, se escribe $A \subset B$ y se dice que A es un *subconjunto* propio de B.

Didáctica: Todas estas relaciones entre conjuntos y los símbolos que se usan para representarlas, deben explicarse a los niños mediante ejemplos familiares, presentados eurísticamente. Por ejemplo, A puede ser el conjunto de los cromos de Antonio para el álbum de «El Mundo de los Animales», y B el conjunto de cromos de Bernardo para el mismo álbum. La limitación de espacio de este artículo no nos permite detallar estos ejemplos, que el lector completará sin dificultad.

Intersecciones y uniones: Dados dos conjuntos, A y B, el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y pertenecen a B, se llama la interseción de A y B, y se indica así: $A \cap B$.

Cuando los conjuntos A y B no tienen elementos comunes, se dice que son *disjuntos*, y su intersección, que no tiene elementos, se dice que es el *conjunto* vacio, que se representa por la letra ϕ (léase «fi»).

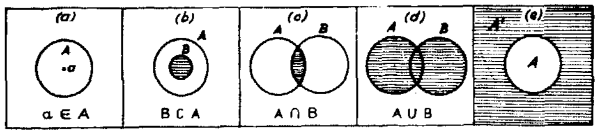
La Unión o reunión de dos conjuntos, A y B, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B, y se indica así: $A \cup B$. En el caso de que A y B tengan elementos comunes, estos se cuentan una sola vez en la unión.

Didáctica: Estas dos operaciones fundamentales del Algebra de los Conjuntos (Algebra de Boole) deben enseñarse también partiendo de múltiples ejemplos, análogos a los dos conjuntos de cromos, conjuntos deportivos, etc.

Universo y Complementos: En el ejemplo de las colecciones de cromos, el conjunto formado *por* todos los cromos que llenan el álbum se llama el *Universo, Conjunto Universal o Conjunto Referencial*, y se representa por U; cualquiera conjunto de cromos, relativo al mismo álbum, es un subconjunto del universo.

Dado un conjunto A, el conjunto cuyos elementos pertenecen al universo pero no al conjunto A, se llama el complemento de A y se representa por A'.

Diagramas de Euler-Venn: En las siguientes figuras están representadas, gráficamente, todas las relaciones y operaciones definidas entre conjuntos:



El Universo se representa por un rectángulo y cada conjunto por un recinto incluido en el rectángulo.

Didáctica: Los niños deben realizar muchos ejercicios de representación mediante estos diagramas. Por ejemplo, colorear las partes del universo correspondientes a $A \cap B$, $A' \cup B'$, $A \cup B'$, $A' \cap B'$, etc.

Particiones de un conjunto: Sea A un conjunto, y $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n$, subconjuntos propios de A tales que: 1) $A_i \cap A_j = \phi$, siendo $i \neq j$ (las partes son disjuntas); y 2) $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_i \ldots \cup A_i \ldots \cup A_n = A$ (la reunión de las partes es igual al conjunto A). En este caso se dice que se ha efectuado *una partición* del conjunto A. Cada subconjunto, A_i, es *una célula* de la partición.

Deben proponerse a los niños muchos ejercicios para que realicen particiones de un conjunto atendiendo a diversos caracteres de sus elementos; por ejemplo, particiones de los animales, del conjunto de todos los automóviles, de los habitantes del mundo, de los automóviles, de los barcos, etc.

Este concepto de partición es de gran utilidad en la enseñanza activa de la Aritmética, como veremos más adelante.

Actividades: Cuando los niños han entendido bién todas as relaciones estudiadas, mediante el desarrollo personal de muchos ejemplos, estarán en condiciones de completar los segundos miembros de las siguientes igualdades: $A \cup A = ?$; $A \cap A = ?$; $A \cup A' = ?$; $A \cap A' = ?$; $A \cap U = ?$; $A' \cup U = ?$; $A \cup \phi = ?$ $A \quad A' = ?$; $A \quad A' = ?$; $A \quad U = ?$; $A \quad U = ?$; $A \quad U = ?$ $A \quad \phi = ?$; $A \quad \phi = ?$; $(A \cup B)' = ?$; $(A')' = ?$; $A' \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (?)$; etc.

Los resultados de todas estas operaciones deben comprobarse con los diagramas de Euler-Venn, y cuando el niño es capaz de resolver con facilidad todos los ejemplos relativos a estas operaciones, podemos estar seguros de que hemos aumentado extraordinariamente su poder de observación y de razonamiento, pues las leyes de la lógica coinciden con estas leyes del Algebra de los Conjuntos, o Algebra de Boole, en honor del matemático y lógico inglés.

Coordinación de Conjuntos: Otra cuestión esencial relativa a los conjuntos que hay que enseñar es la que se refiere a las correspondencias entre los elementos de dos conjuntos. Cuando a cada elemento del conjunto A corresponde un elemento del conjuto B y a cada elemento del conjunto B corresponde uno del A, se dice que entre los conjuntos A y B existe una correspondencia biunívoca, o que los conjuntos A y B son *coordinables*. En seguida se les hace observar que la coordinación de conjuntos tiene las propiedades *reflexiva* (todo conjunto es coordinable consigo mismo), *simétrica* (si A es coordinable con B, entonces B es coordinable con A) y *transitiva* (si A es coordinable con B, y B lo es con C, entonces A es coordinable con C).

Didáctica: Como de costumbre, la enseñanza se desarrollará por medio de ejemplos dirigidos eurísticamente, y se procurará elegir conjuntos que estén realmente relacionados en la vida corriente, para que las correspondencias les parezcan naturales. Por ejemplo, se pondrán en correspondencia conjuntos de platos y de vasos, de hombres y de sombreros, etc.

Cuando dos conjuntos no son coordinables, uno de ellos es coordinable con una parte del otro, lo cual debe mostrarse mediante ejemplos.

Todos los conjuntos que son coordinables son equivalentes aritméticamente (forman una clase de equivalencia), y esta clase de equivalencia define un número natural. Los niños pueden entender el concepto de número natural observando muchos conjuntos coordinables y preguntándoles qué es lo que tienen de común.

Finalmente, de la observación de conjuntos no coordinables se inducirá el concepto de mayor y de menor de una forma natural.

Producto Cartesiano: Otra operación fundamental entre conjuntos, por sus múltiples aplicaciones en toda la matemática, y que nos servirá para estudiar activamente la multiplicación de números naturales, es el *Producto Cartesiano* de dos conjuntos.

El producto cartesiano de dos conjuntos, A y B, se representa por $A \times B$ y se define como el conjunto formado por los pares de elementos cuyo primer componente pertenece a A y su segundo a B. Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$, y $B = \{m, n\}$; $A \times B = \{(a, m), (a, n), (b, m), (b, n), (c, m), (c, n)\}$.

Insistimos en que los elementos del producto cartesiano de A por B *son parejas de elementos*, el primero perteneciente a A y el segundo perteneciente a B. Por ejemplo, el par (m, c) no pertenece al producto cartesiano de A por B, siendo A y B los conjuntos dados anteriormente, pues el elemento m (primer componente del par (m, e)) no pertenece a A, sino a B; el elemento (m, e) pertenece al producto $B \times A$.

En un próximo artículo expondremos cómo se aplican estas nociones de la Teoría de Conjuntos al desarrollo de las operaciones aritméticas fundamentales de forma activa, y cómo es posible que los alumnos investiguen personalmente las propiedades fundamentales de estas operaciones (leyes formales), que luego son la base del cálculo algebraico.