EL PROGRAMA DE MATEMATICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA

Por ALBERTO AIZPUN LOPEZ
Catedrático de Matemáticas de la Normal Femenina de Madrid

PLANTEAMIENTO ACTUAL DE UN PROBLEMA

Para decidir un programa escolar hay que resolver primero un problema de fines y después un problema de procedimiento. Cuando el programa es el de Matemáticas en la Escuela Primaria, la cuestión se hace particularmente interesante ahora, porque está cambiando, ha cambiado ya, no solamente la importancia social de las Matemáticas, no sólo la didáctica especial de las mismas, sino también su contenido y hasta el espíritu con que los propios matemáticos las investigan y consideran.

Solamente como introducción de lo que sigue, y para que las afirmaciones que luego hayan de hacerse no parezcan absolutamente gratuitas, parece razonable exponer, primero, la situación actual del problema en lo que concierne a la enseñanza de las Matemáticas. Está en el pensamiento de todos, profesores, alumnos, padres, que es en las Matemáticas donde se registra un mayor porcentaje de fracasos estudiantiles, ya sea en un nivel o en otro, y la afirmación "es que carezco de base" la oímos a cada paso como una justificación. Sin pensamos que la base de la instrucción se recibe en la Escuela Primaria, parece que todo el problema arranca de que durante nuestro paso por la Escuela no se nos dio, en este terreno, una formación adecuada. En realidad, sucede que el fin que se ha perseguido con la enseñanza de las Matemáticas en la escuela es muy distinto del que hoy se necesita y es por eso que solamente hoy aparece el problema.

Tradicionalmente se han señalado dos fines en la enseñanza matemática primaria:

a) Un fin utilitario, por el que suele entenderse, en frase casi textual de los libros de didáctica, "proporcionar al alumno los conocimientos de cálculo y medida que son necesarios a la mayor parte de las personas en la vida", aunque esto no deje de ser bastante vago.

b) Introducir al alumno en los hábitos del pensar deductivo.

A éstos suele añadirse un tercer fin, que se coloca en los últimos cursos de la Enseñanza Media, y que se dirige a los que necesitan de las Matemáticas en su profesión ulterior.

En realidad, y limitándonos a la Enseñanza Primaria, yo creo que estos fines ya no son de hoy. El fin *b*, "introducir al alumno en los hábitos del pensar deductivo", parece señalar a las Matemáticas un papel secundario en la educación, papel secundario que efectivamente han tenido y que era el suyo, algo así como llenar una cierta curiosidad intelectual hacia los métodos puramente lógicos de la investigación, los que podían estudiarse en la Matemáticas mejor que en ninguna otra parte. Pero con este fin lo que se intenta buscar no es la Matemática como tal, sino el método que ésta emplea. Nuestros cuestionarios nacionales de 1953, hoy vigentes, en las normas didácticas, recogen este fin de utilizar el estudio de la Matemática "como modelo de razonamiento", con párrafos tomados de la introducción al libro de Young, *Fines, valor y métodos de la enseñanza matemática*, libro que fue publicado por primera vez en 1906. Pero de entonces aquí las perspectivas matemáticas de la vida social, la necesidad de su utilización, el modo mismo de su construcción, han cambiado profundamente y, por tanto, parece bien natural que este punto de vista exclusivo, aún de principio de siglo, no esté vigente hoy y menos lo estará mañana. La vida se nos ha colectivizado y ofrece como instrumento de dominio lo que llamamos "la técnica". Si en otro tiempo era el individuo, como unidad, el que tenía que buscarse su propia instrucción si le parecía útil, hoy son los Estados los que se aperciben de que para estar en línea y no quedar condenados al papel de provincia de otros más poderosos, necesitan poseer la instrucción de todos sus ciudadanos, porque el presente ya, y más el porvenir, está en manos de la técnica y ésta no se improvisa (1).

Parece, pues, clara esta idea de que la ins-

---

(1) Este es el motivo de que en todos los países exista una amplia política de protección escolar. No es que, de *pronto*, cada Estado haya tenido un arranque de generosidad. Al Estado, como tal, no puede importarle que el individuo, como tal individuo, y en su único beneficio o perjuicio, sea un sabio o un analfabeto. Si le ayuda para lo primero es con la idea de que esta potencia intelectual revierta al Estado y lo haga más fuerte. Este es el fondo que tiene la idea, que tantos repiten, de la "rentabilidad de la enseñanza", pues, efectivamente, ¿qué país no daría hasta la última peseta de su presupuesto si supiera con seguridad que solamente él iba a conocer los secretos del átomo o solamente él iba a dominar las dificultades de la astronáutica? Y el mismo origen tiene la obligatoriedad de la enseñanza, decretada en todas partes y que cada vez abarcará mayor período escolar, no menos.

trucción, de individual y voluntaria, se ha convertido en colectiva y obligatoria y vista la causa de ello no es menos clara la necesidad de poseer miles de técnicos que obligatoriamente han de estudiar matemáticas y conocer con seguridad alguna rama de éstas y en un corto tiempo, pocos años, de tal modo que la enseñanza ha de ser, en sus grados primario y medio, más profunda de lo que es hasta hoy. Para poner al alumno en condiciones de realizar una labor efectiva hasta donde cada uno sea capaz, habrá que conseguir en el niño el entrenamiento más completo posible y el desarrollo total de lo que se llaman sus estructuras mentales.

Y aquí, que es el punto más importante, es donde, afortunadamente, aparece un hecho agradable: efectivamente, parece demostrado, aunque no sea universalmente admitido, que las estructuras mentales del niño se organizan y desarrollan de modo paralelo a como se organizan y desarrollan lo que se llaman estructuras matemáticas en el lenguaje de hoy. De ser cierta esta conclusión, defendida por la escuela de Piaget, tiene tal importancia que merece la pena volver a leer el párrafo anterior; la deducción inmediata es, inevitablemente, que las estructuras matemáticas serán el instrumento y el modelo más apropiados para desarrollar las mentales y que, con una especie de reciprocidad, la aspiración didáctica consistirá en saber apoyarse en las estructuras mentales para investigar y construir las estructuras matemáticas.

Naturalmente, esto exige que el maestro conozca la estructuración actual de las Matemáticas, los fundamentos de lo que se llaman Matemáticas Modernas, no porque vaya a tener que realizar complicadas demostraciones en su Escuela, sino para que sepa con certeza si está construyendo matemáticas con sus alumnos o, por el contrario, está realizando una labor entusiasta, quizá, pero nula. Efectivamente, el panorama actual de la Matemática no supone, para nosotros, en la Escuela Primaria, una ampliación de conocimientos, sino un cambio de espíritu, que debe quedar reflejado más que en la redacción del programa en el modo con que se desarrolle.

EL PROGRAMA EN LOS PRIMEROS CURSOS

Hay dos cosas que, durante mucho tiempo, se han tenido por dogmáticas: una, que el comienzo obligado de la enseñanza de la Aritmética es el contar y otra que el niño en la primera edad escolar es incapaz de abstracción. Estas dos ideas dominan los programas y por eso es que éstos comienzan, más o menos, siempre así: *Primer curso: Contar hasta diez.* Con palitos, piedrecitas, objetos, contar y descontar. *Reconocer y escribir los primeros números.* Esto suele ser fatal, porque así el alumno creerá en lo sucesivo, y a veces siempre, que el símbolo 3, por ejemplo, *es* el número tres; me parece que se debe a este obligado comienzo escolar el que casi todas las personas mezclen, al tratar con números, la idea, el nombre y el símbolo escrito. Es que la recitación uno, dos, tres, cuatro..., y la escritura posterior 1, 2, 3, 4..., no es cuestión matemática; si acaso lo será de lenguaje. En realidad, muchos maestros lo saben bien y si acaso defienden la práctica de la recitación lo hacen argumentando que la constante repetición consigue imprimir la sucesión: uno, dos, tres, cuatro..., en la mente del niño. Lo que le ocurre entonces a éste es que saca la conclusión de que *la palabra* cinco es la que sigue a la colección uno, dos, tres, cuatro. Pero esto no es manera de introducir el concepto de número, porque los conceptos matemáticos no se pueden hacer materiales y, por tanto, es inútil pretender "hacerlos ver" a fuerza de repetir las palabras mientras pasamos objetos; el creer que se ha conseguido alguna vez no pasa de ser una vana ilusión del adulto. Lo que sí podemos hacer es ayudar a crearlos, es decir, ayudar a que cada espíritu los invente en vista de unas experiencias o manipulaciones que realice con objetos materiales. A esto debe limitarse el manejo de cualquier material escolar, que en los primeros cursos de primaria suele constituir una obsesión para el maestro. Las veces que somos consultados sobre el modo de conducir una lección determinada en la Escuela, oímos inevitablemente la misma pregunta: ¿Qué material llevo? Este fetichismo del material ha sido provocado, sin duda, por esa idea, ya señalada, de que el niño es incapaz de abstracción, motivo por el cual debe mantenerse la enseñanza en un tono concreto. Con este error, se ha esforzado siempre el adulto en un empirismo a toda costa que, casi siempre, revela su ingenio y su interés, pero que, en último término, es perjudicial. Efectivamente, cuando el concepto que se pretende enseñar parece demasiado abstracto, todo el esfuerzo del maestro se carga en encontrar un modelo material, "concreto", que lo contenga; pero es inútil pretender sustituir un concepto por otro parecido. No sólo es inútil, sino didácticamente equivocado, porque entonces a la dificultad del concepto se añade el enmascaramiento que de éste se hace, y el error puede persistir para siempre. En este punto, ¿cuántas veces no leemos, incluso en lecciones que quieren ser modelo, malas definiciones de proporcionalidad, o de ángulo, o de muchas otras cosas? Claro que en este punto habría que hacer la observación de que las lecciones y orientaciones sobre matemáticas, pocas veces son encargadas a los matemáticos. En conclusión, el material no puede servir para que el maestro ilustre con un ejemplo concreto un proceso que, inevitablemente, es abstracto. El material NO ES un ejemplo. Los hechos que pretendemos mostrar NO ESTAN en el material. Pero sí, claro, es la experiencia realizada con el material lo que debe llevar *a través de una abstracción* a la meta que el maestro quiere conseguir.

Entonces cabe preguntarse: ¿Cuál es el programa para los primeros cursos y cómo debe conducirse? Nuestra respuesta es que el programa, como conjunto de temas, como contenido, poco puede variar, puesto que ya se ha señalado que no se trata ahora de un cambio de materia, sino en un cambio de espíritu; efectivamente, parece que todos estamos de acuerdo en que uno de los objetivos de la Escuela, principalmente uno de los objetivos en sus primeros grados, es que el niño se familiarice con la idea de número y con el manejo de ésta. Pero para familiarizarse con algo es necesario conocerlo antes y al número no se le puede conocer como se conoce a una persona: por mera presentación; aunque suponga repetición de algo ya dicho, es inútil que pretendamos "presentar", "enseñar", el número. Este es un concepto y lo único que podemos hacer, mejor dicho, lo que debemos hacer, es ayudar a que cada uno se forme en su espíritu el concepto de número, y la idea de las relaciones de unos con otros. Cierto que a los seis-siete años esto solamente puede conseguirse mediante experiencias materiales, pero estas experiencias deben realizarse, si se quiere obtener algún éxito, con un material que pueda presentarse de tal modo que con él se realicen las mismas experiencias que se realizan en la mente adulta con los números. Puesto que en esta edad se trata sólo de números racionales, y aún más, con números enteros, sólo podrá tener eficacia un material que sea de esa misma forma, o, como en Matemáticas se dice, que sea isomorfo al conjunto de los números enteros. Con esta idea el material de números en color tiene gran valor si se utiliza con el pensamiento que aquí queremos dar; pero antes, repetimos, es el mismo maestro quien debe imbuirse de ese pensamiento, pues en otro caso se recae siempre en el mismo defecto tradicional. Se quiera o no se quiera, la persona del maestro no puede sustituirse por ningún material. Por nuestra parte, creemos que el programa de los dos primeros cursos debiera quedar redactado así: *Experiencias que conducen a una primera idea de equivalencia* (sumas equivalentes, diferencias equivalentes, productos equivalentes, fracciones equivalentes). *Propiedades asociativa y conmutativa de la suma y multiplicación. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma. Potencias. Construcción de la numeración en distintas bases. Técnicas que abrevian los cálculos.*

Naturalmente las frases están redactadas para el maestro y quiero con ellas indicar hasta dónde se puede llegar en los dos primeros cursos, es decir, hasta los ocho años de edad. Estoy seguro que la mayor parte de los que me lean creerán que cuanto digo no pasa de ser una pura especulación teórica o si acaso una extravagancia. Sin embargo, también tengo la esperanza de que algunos no se limiten a negar sin un conocimiento previo y, al tratar de saber lo que hay de verdad en cuanto digo, descubran el horizonte casi infinito de posibilidades que existe en este terreno. Verán antes de nada que muchas cosas que tenían por matemáticas no forman parte de ellas y, por tanto, comprenderán que pierden mucho tiempo pretendiendo enseñar como matemáticas algo que no lo es. Por ejemplo, como antes ya he señalado, el aprender la sucesión uno, dos, tres, cuatro cinco..., NO ES aritmética. En cambio, el que el niño descubra que cuando trata de restar, el par 14-8 puede ser sustituido por cualquiera de los 13-7, 12-6, 11-5, ..., 15-9, 16-10, ..., SI es matemática. En el primer ejemplo está haciendo solamente ejercicios de lenguaje, mientras que en el segundo está manejando una clase de equivalencia de cierto conjunto cociente. Claro que ninguna de estas últimas palabras las conocerá, ni les serán dadas a conocer, pero su espíritu se está formando realmente en la matemática y está manejando las ideas fundamentales. Cuando el niño se esfuerza en dar el resultado de largas sumas que le han sido impuestas como deberes, procurando acertar cada vez con la cifra que debe poner debajo de la raya, NO hace aritmética; cuando decide que 1/2, 2/4, 3/6, 4/8, ..., a/2a, ..., representan el mismo número, SI hace matemática; ahora está manejando otra clase de equivalencia y se ve cómo el ejemplo anterior y éste le llevarán, cuando lo necesite, a comprender con entera naturalidad el concepto de número entero y de número racional.

Se comprende que, después de la enseñanza tradicional, que comienza invariablemente por el nombre y el dibujo de las cifras, y suele seguir por la escritura de números de dos cifras y la suma, deteniéndose en ésta el tiempo suficiente para que se consiga cierta seguridad en enunciar al resultado de las que se propongan, parezca extraño que haya señalado como primer punto sumas equivalentes, diferencias equivalentes, productos equivalentes y fracciones equivalentes; es decir, que haya señalado operaciones antes que la numeración, y, en particular, que haya señalado fracciones de modo tan general. El cuestionario vigente señala en el primer curso numerosos ejercicios de contar hasta cien, pero solamente inicia la idea de doble y de mitad. Puede, pues, parecer imposible lo señalado más arriba. Este aparente imposible nace del dogma señalado anteriormente: la creencia de que es necesario empezar por contar y seguir por esribir, así como otra idea muy extendida, que es la de creer que se necesita el dominio previo de una operación para pasar a la siguiente. Sin embargo, cualquiera puede comprobar que no es necesario empezar por dominar el procedimiento de recuento ni tener rapidez de cálculo para ir analizando y descubriendo relaciones. En cierto modo, hasta puede creerse que ocurre precisamente al revés y que aquel dominio de cálculo es facilitado a medida que el alumno va descubriendo relaciones y propiedades que luego aplica cuando los necesita. Por otra parte, no lleva a ninguna parte aprovechable la insistencia en repetir y proponer operaciones, unas tras otras, hasta que el alumno recuerda con rapidez que nos parece suficiente el resultado que se asocia a dos números en cierta frase (cuatro y nueve..., ¡trece!). En realidad, esta repetición es perjudicial, porque así parece que los datos que damos para la repetición de las operaciones son algo inerte y que lo que interesa es el resultado; quiero decir que ante el ejercicio anterior el alumno cree que no ha hecho nada de lo que debe hasta que da con el número trece, mientras que lo verdaderamente útil y eficaz es que comprenda que la relación $4 + 9 = 13$, es una de las maneras de escribir cualquiera otra de las $13 - 9 = 4$; $9 + 4 = 13$; $4 = 13 - 9$; ... o $13 > 4$, etc., y que, en realidad, cualquiera de éstas y otras muchas que puede poner son distintos modos de expresar *una misma* relación.

Todo este tiempo perdido en insistir sobre cuestiones que en realidad no le proporcionan formación matemática de ningún tipo, bien aprovechando en que el niño examine situaciones que son realmente matemáticas producen los diferentes resultados que he señalado y que han sido comprobados muchas veces. Yo, personalmente, lo he podido comprobar con profundidad suficiente para hablar de ello con conocimiento práctico de experiencias bastantes, aunque no con la extensión que requiere una implantación general en todos los cursos escolares. No obstante el resultado de las experiencias con niños de seis-diez años autoriza a creer que en edades posteriores el mismo criterio puede servir.

También incluyo el conocimiento de la potencia antes de la numeración y, en realidad, ¿cómo puede ser de otro modo? La numeración está fundada en el conocimiento previo de la adición, la multiplicación y la potencia, y, en realidad, mientras no se trate de estas cuestiones, es inútil pretender que nadie comprenda el sentido de la numeración. En nuestro modo tradicional de hacer, nos esforzamos en que el niño escriba, por ejemplo, 4576, y lea cuatro mil quinientos setenta y seis. Con mucha paciencia lo conseguimos, pero lo que es imposible conseguir es que el alumno sepa de qué habla, a no ser que primero llegue a decidir que 4576 es una manera abreviada, aunque arbitraria y cómoda para él, de escribir $4.10^3 + 5.10^2 + 7.10 + + 6$. Para muchos adultos este mismo hecho es desconocido e incluso en alumnos de estudios posteriores a la Primaria se encuentran grandes dificultades para la introducción de una base de numeración distinta de diez. Toda su vida han creído que 4576 es algo estático, fijo, inamovible y que era imposible expresarlo de otra manera, y este error procede, sin duda, de que se les ha enseñado la numeración, en su infancia, memorísticamente y cuando no estaban en condiciones de comprenderla ni de necesitarla.

Simultáneamente a cuanto antecede, es claro que deberá introducirse la notación matemática y éste es también un capítulo de la enseñanza que, generalmente, es descuidado, limitándose el maestro a informar de tal o cual signo con frases más o menos como ésta: "El signo de la suma es una cruz (+), que se lee más". Desde este momento el signo + se convierte en la suma misma y cuando aparece, por ejemplo $5 + 4$, se cree que la expresión es una especie de orden por la que hay que esforzarse en sustituirla por 9. Otra vez la obsesión del resultado, es decir, la memorización de una tabla, cuando en realidad lo que interesa es el estudio y comprensión de las operaciones y de sus propiedades.

EL PROGRAMA EN CURSOS POSTERIORES

En posesión de los conocimientos anteriores, no resulta ya sorprendente cómo el alumno es capaz de seguir adelante e incorporarse conceptos que incluso para el adulto que se haya iniciado en las Matemáticas por el método tradicional pueden parecer complicados: así los números decimales, la divisibilidad, el máximo común divisor, mínimo común múltiplo, cuadrado de polinomios.

A partir de los diez años es posible, y para los niños sumamente entretenido, una introducción al álgebra, así como el estudio de los comienzos del análisis combinatorio. Las ecuaciones de primer grado se consiguen a los once años, y también una justificación de muchas de segundo grado, de igual modo que el estudio razonado de las progresiones como primer ejemplo de sucesiones.

Naturalmente, una mera enumeración de cuestiones de un programa dice poco y menos aún si no va acompañada de los procedimientos adecuados, pero se comprende que en un corto artículo no es posible tratar simultáneamente dos cuestiones de esta envergadura. Lo importante, por ahora, es que cada uno examine serenamente si no es posible enseñar más y mejor de lo que hasta hoy lo ha hecho. Si se decide a este examen se verá en la obligación de informarse previamente de cuál es el espíritu de la matemática de hoy para ver cómo es posible que él prepare adecuadamente a sus alumnos; con ello se habrá conseguido mucho, porque el primer paso para la renovación de la didáctica de las matemáticas es la propia renovación del maestro y en ésta todos nos hallamos interesados.

Quizá no se propaga bastante que en nuestro país se realizan ya hace bastante tiempo interesantes experiencias y trabajos: en nuestra Universidad se ha creado una sección de Metodología de las Matemáticas y en la Enseñanza Media se llevan a cabo cursos experimentales de enseñanza de la matemática con sentido moderno. Sin embargo, como siempre, la frase "carezco de base", la seguiremos oyendo mientras la Escuela Primaria no proporcione a los estudios posteriores alumnos con la preparación adecuada. Los niños que este curso comienzan con seis años, tendrán diez solamente dentro de cuatro y en ese tiempo se pueden hacer muchas cosas. Es el tiempo en que se prepara una olimpíada y durante él 80.000 maestros con ganas de renovarse, lo que nunca ha faltado, ni ahora tampoco, pueden hacer, más o menos, todo.