Amplitud de la Matemática Moderna: Referencia especial a la geometría y vectores

Por CONSTANTINO MARCOS
Licenciado en Ciencias Físicas

I. EL CAMPO DE LA MATEMATICA MODERNA

El término *matemática moderna* tendrá diferente significado para personas distintas. Aquí usamos ese término para referirnos esencialmente a las ideas matemáticas desconocidas (o no ampliamente aceptadas) hasta hace unos cien años y que han adquirido gran desarrollo en los últimos cincuenta años.

Entre estas ideas son notables los fundamentos lógicos de las matemáticas, el álgebra abstracta, la lógica simbólica o álgebra de proposiciones, la teoría contemporánea de la probabilidad y deducción estadística.

Más especialmente, este nuevo enfoque se refiere al desarrollo histórico de los sistemas de numeración; a la evolución del concepto de número; al papel de los postu*lados y definiciones en las matemáticas*; a la generalización, abstracción y formalismo; a la naturaleza de la demostración matemática; a la intuitiva teoría de los conjuntos; a los símbolos, *relaciones* y *operaciones*; a la base lógica del sistema de números; a la medición; a las aproximaciones; a las variables y funciones; a los conceptos estadísticos.

Esta evolución rápida de la ciencia matemática, el desarrollo considerable de sus diversas ramas, tanto aquellas que interesan a las aplicaciones de las ciencias físicas, humanas y económicas, como a las partes más profundas de las investigaciones teóricas, han creado un peligroso hiato entre la ciencia viviente, es decir, entre la ciencia que se hace y la ciencia que se enseña en las clases.

Este desfase es ciertamente inevitable entre la formulación audaz de las nuevas ideas, que permiten progresar a la investigación, y la utilización pedagógica de algunas de estas ideas, que se consideran fecundas y asimilables a un nivel determinado de la formación de los alumnos. Aunque este desfase no signifique retraso o esclerosis de la enseñanza.

Para que los buenos efectos de las nuevas ideas se hagan sentir en las clases, evidentemente es necesario, en primer lugar, que los profesores estén exactamente in*formados sobre el progreso de las matemáticas*.

Además se necesita que una experimentación pedagógica permita extraer las grandes líneas de una concepción didáctica, que cada profesor adaptará entonces a las condiciones en que se encuentra para enseñar.

También es necesario que este trabajo nunca se considere acabado; la ciencia continúa su vida; otras ideas, más fecundas aún, exigirán nuevas revisiones de los conocimientos adquiridos y de los métodos usados.

Es igualmente indispensable:

1.° Que un público más amplio que el de los solos especialistas esté informado de esta evolución de las ideas y de la profunda reforma de la enseñanza de las matemáticas que aquélla motiva, para evitar que los padres se opongan a que sus hijos sigan esta nueva orientación en la adquisición de los conocimientos matemáticos.

2.° Enseñar las matemáticas sin separar artificialmente el aspecto "puro" y el aspecto "aplicado". Este es un *punto extremadamente importante. Hay que multiplicar* las motivaciones reales en el aprendizaje del pensamiento matemático y conseguir el mayor número posible de espíritus aptos para captar lo que puede ser matematizado en una situación real y observar la ayuda matemática que se puede aportar.

3.° Enseñar las matemáticas de manera dinámica, manteniendo constantemente en actividad la inteligencia de los alumnos para que aquélla se desarrolle y fortifique.

¿Qué causas han originado la matemática moderna? ¿Cuál es la base común a todas sus ramas? Responderemos brevemente a estas dos cuestiones.

La matemática moderna ha surgido como superación de la matemática clásica para atender y poder resolver *cuestiones originadas en los más diversos* campos de las matemáticas y que la matemática clásica no podía resolver. A la matemática moderna corresponde, en efecto, lograr una fundamentación y sistematización precisa para el estudio de los *conjuntos* en que se definen las operaciones y, sobre todo, las reglas de cálculo en aquéllos.

Porque en geometría y en análisis, en el cálculo diferencial e integral, se opera en realidad sobre conjuntos infinitos. Y cualquiera que desee conocer a fondo las diversas ramas de las matemáticas debe asimilar la teoría de los conjuntos, que es fundamento común.

Ciertas ideas en matemáticas, a causa de su esfera de acción y sencillez, constituyen manantiales de incalculable riqueza. La teoría de los conjuntos, que es una de tales ideas, fue desarrollada por Jorge Cantor (1845-1918), filósofo y matemático alemán, profesor de la Universidad de Halle desde 1878 al 6 de enero de 1918, en que murió.

Pocos conceptos en los últimos cien años han producido tan gran impacto sobre las matemáticas como la noción de conjunto. La teoría de los conjuntos ha contribuido a establecer una base, que aclara y unifica las matemáticas, ya desarrolladas. Suministra un lenguaje y un simbolismo que le permite utilizar lo clásico y lo nuevo, examinar conceptos ya conocidos y considerar nuevos e interesantes descubrimientos de la matemática superior.

Pues mediante la teoría de los conjuntos se generalizan las reglas de cálculo para los números finitos más allá de su dominio. Y se puede calcular con los conjuntos infinitos, aplicando los mismos métodos que para los conjuntos finitos.

Merced a algunas nociones bien definidas, tales como la correspondencia biunívoca, la potencia de un conjunto, su numerabilidad, etc., para la teoría de los conjuntos no existe barrera fundamental entre el finito y el infinito matemático y nos permite comprender los grados del infinito.

Como ejemplo de la utilidad de la teoría de los conjuntos y de cómo la matemática moderna resuelve cuestiones que parecen infantiles, pero que la matemática no da respuesta satisfactoria, hagamos estas preguntas:

¿Hay más números enteros que números pares?

¿Una recta ilimitada contiene más puntos que un segmento de recta?

¿Un plano contiene menos puntos que el espacio?

¿El conjunto de los números racionales es mayor o menor que el conjunto de los números irracionales?

¿Qué significan los símbolos: $\infty + 5$, $\infty \cdot 9$, $\infty 2$?

La teoría de los conjuntos permite dar a estas y a otras cuestiones respuestas claras y precisas matemáticamente. Pues la teoría de los conjuntos, que tienen por punto de partida cosas intuitivas y concretas, se eleva, sin embargo, a un alto nivel de abstracción.

El renovador de la enseñanza de la matemática en Europa, Papy, profesor en la Universidad de Bruselas, al terminar una conferencia que dio a un grupo de profesores en París hace muy pocos años, les dijo: "Vosotros, que durante muchos años habéis explicado matemáticas, ahora tenéis que volver a empezar a estudiar." Lo cual es cierto; primero, porque hay que abandonar, en cierta medida, procedimientos y métodos tradicionales a que nos hemos acostumbrado desde la infancia; segundo, porque hay que adquirir otros nuevos, pero que sin darnos cuenta de ello, al principio de nuestra renovación, los sustituimos por los antiguos en la resolución de las cuestiones y problemas.

Pero la renovación es necesaria.

II. BASES DE LA GEOMETRIA MODERNA

II.1. *Geometría abstracta*

Durante unos mil trescientos años siguientes a la era de los matemáticos griegos nada de gran importancia se llevó a cabo, hasta que a mediados del siglo XVII Descartes inventó la geometría analítica.

Tan importante fue esta invención, que condujo a los comienzos de la matemática moderna (cálculo y análisis), y fue eclipsada por un descubrimiento, aún más trascendental, hacia mediados del siglo XIX, el de la geometría no-euclídea, llevada a cabo, en rápida sucesión, por Ganss, Lobachevsky y Bolay.

Sin entrar en detalles, basta decir que este desarrollo es quizá uno de los mayores logros de la inteligencia humana; *liberada de las restricciones del postulado de la paralela permite, al finalizar el siglo, hacer de la geometría un sistema, basado en postulados abstractos, completamente formal y lógicamente riguroso.*

Este avance se debió al trabajo pionero, entre los años 1890 al 1900, de Pash, Peano, Hilbert, Veblen, Huntington y otros.

Al distinguir entre *geometría concreta o física*, por una parte, y *geometría abstracta o formal*, por otra, hemos de notar que cuando la mente generaliza experiencias, alguna abstracción puede también tener lugar. Aun nociones aparentemente sencillas, tales como la de una línea recta, pueden conducir a una interpretación ideal o de pura abstracción.

Así, una línea recta no tiene anchura, ni espesor, ni peso, ni extremos.

No hay líneas rectas. Formamos ideas acerca de estas imposibilidades no existentes y las trazamos en papel, pero no existen.

Análogamente sucede con el punto: éste no tiene extensión, ni existencia, ni definición.

Toda ciencia matemática o sistema axiomático comienza con un número relativamente pequeño de palabras que se dejan indefinidas, aunque podemos desear explicarlas o *interpretarlas* intuitivamente. Aunque no se dan definiciones formales de estas palabras, sin embargo están sujetas a las restricciones impuestas sobre ellas por los postulados dados después.

En este punto debe entenderse que la elección de términos indefinidos, como también la elección de los postulados, puede estar determinada por ciertas condiciones que quizá puedan hacer violencia al sentido matemático de adecuación, pero las cuales se conciben justificables por motivos pedagógicos. Así, el *matemático maduro* está decidido a reducir a un mínimo el número de términos indefinidos y de proposiciones no demostradas.

Pero bien puede ser que *el principiante no maduro* se beneficie absteniéndose de tal rigor matemático por el momento y adopte algunos postulados adicionales al principio, aunque estos postulados puedan derivarse de los otros.

Teniendo presentes estas consideraciones, sugerimos *la siguiente lista de términos indefinidos y postulados* para poner la geometría plana elemental sobre una base rigurosa razonable para el *principiante*.

Términos indefinidos

1.	Punto.	4.	Sobre.	7.	Igual.
2.	Recta.	5.	Entre.	8.	Congruente.
3.	Plano.	6.	Número	9.	Distancia.

Postulados

P.1. *Dos puntos distintos determinan una recta.*—Es decir, dados dos puntos distintos, A y B, existe una recta y sólo una que contiene ambos puntos.

P.2. *Dos rectas distintas tienen, a lo más, un punto común.*—Este postulado no dice que dos rectas distintas *deben tener un punto común.* Pueden no tener punto alguno común; pero si lo tienen, no será más que uno.

P.3. *Toda recta puede ser provista de escala graduada.*—Cada punto de una recta puede numerarse de modo que los valores absolutos de los números diferencien las distancias medidas.

P.4. *Toda recta tiene dos lados.*—Una recta *separa* o divide el plano en dos partes; del mismo modo, un punto sobre una recta divide a ésta en dos partes, llamadas *rayos o semirrectas.*

P.5. *Todo círculo puede ser provisto de una escala graduada.*—Todos los rayos que tienen el mismo extremo pueden numerarse de modo que los números diferencien los ángulos medidos.

P.6. *Un triángulo está determinado cuando se dan dos ángulos y el lado común* ("a, l, a").

P.7. *Un triángulo está determinado cuando se dan dos lados y el ángulo comprendido* ("l, a, l").

P.8. *Por un punto fuera de una recta existe una y solo una recta paralela a la dada.*—Es decir, dos rectas que se cortan no pueden ser ambas paralelas a la misma recta. Este es el famoso *Postulado de la paralela.*

II.2. *Los fundamentos de la geometría*

Una de las principales contribuciones al desarrollo de la geometría moderna fue la publicación de los *Fundamentos de la geometría*, por David Hilbert, en el año 1899. Su base de postulados de la geometría ha llegado a ser clásica. Es extraordinariamente rigurosa.

Hilbert emplea sólo cinco términos indefinidos: *punto, recta, sobre, entre* y *congruente.* Después enuncia quince postulados. Los dos primeros son esencialmente los mismos P.1 y P.2 anteriores.

Los cuatro inmediatos siguientes se refieren a las nociones de *orden* y estar *entre.* Aquí es donde se corrige la evidente endeblez lógica de Euclides. Estos cuatro postulados son como sigue:

1. *Si un punto C está entre los puntos A y B, entonces A, B y C están todos en la misma recta, y C está entre B y A, y B no está entre C y A, y A no está entre C y B.*
2. *Para dos puntos distintos cualesquiera A y B hay siempre un punto C, el cual está entre A y B, y un punto D, el cual es tal que B está entre A y D.*
3. *Si A, B y C son tres puntos distintos sobre la misma recta, entonces uno de los puntos está entre los otros dos.*
4. *Una recta que corta a un lado de un triángulo, pero que no pasa por cualquiera de los vértices del triángulo debe cortar a otro lado del triángulo.*

Estos cuatro postulados implican:

a) La extensión indefinida de una recta.
b) La existencia de un número infinito de puntos en una recta.
c) Que los puntos sobre una recta estarán en orden consecutivo y no en orden cíclico.

El cuarto postulado evita las dificultades lógicas que se presentarían en la demostración de muchos teoremas de no tener este postulado explícito.

Los seis postulados inmediatos se refieren al concepto de *congruencia.* Son bastante técnicos y refinados y no los estudiamos aquí. Baste decir que estos seis postulados vencen las dificultades lógicas, originadas por las ideas de *movimiento rígido* y *superposición*, tan ampliamente usadas en los desarrollos menos rigurosos de geometría.

El postulado trece es el postulado de la paralela.

Los dos postulados últimos se refieren al concepto de continuidad de una recta. Técnicamente establecidos, estos dos postulados podrían reemplazarse por un solo postulado, propuesto por otro matemático alemán, Richard Dedekind, y que puede enunciarse como sigue: *Si todos los puntos de una recta caen en dos conjuntos, tales que todo punto del primer conjunto está a la izquierda de todo punto del segundo conjunto, entonces existe uno y sólo un punto que crea esta división en dos conjuntos, esto es, corta a la recta en dos partes.*

Este concepto de continuidad hace posible la idea de medida. También nos permite establecer una correspondencia, uno a uno, entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de una recta, haciendo así posible la geometría analítica.

III. INICIACION AL ESTUDIO DE LOS VECTORES

III.1. *Vectores-fila y vectores-columna*

Un vector es un solo objeto que necesita varios números para describirlo; por consiguiente, viene dado por una lista de números, llamados sus *componentes*. Estos pueden escribirse en fila o en columna, por ejemplo:

$$(3\ 5\ 0) \text{ o bien: } \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al primero se le llama *vector-fila*, y al segundo, *vector-columna;* algunas veces es conveniente usar las dos clases. El *orden* de los componentes es importante: (3 5 0) no es el mismo vector que (3 0 5). Para un geómetra o un matemático técnico o un físico, los números ordinariamente serán distancias o coordenadas, de modo que un vector es una especie de indicación de caminar cierta distancia en una dirección definida: (3 —1 0) significaría *caminar 3 unidades en el sentido positivo del eje* x; *1 unidad en el sentido negativo del eje* y; *y 0 unidades en la dirección del eje* z. Para un algebrista un vector puede significar eso mismo, pero puede también ser cualquier lista de números. (3 5 0) puede significar: *3 empanadas, 5 peras y 0 plátanos ó 3 hombres, 5 niños y 0 mujeres* o también *3 libros, 5 bolígrafos y 0 lápices* o cualquier otra cosa que a un matemático le parezca conveniente o necesario.

Un vector es así una clase particular de *matriz;* un vector-fila con n componentes es una matriz $1 \times n$; un vector-columna con n componentes es una matriz $n \times 1$.

III.2. *Sumas*

Supón que vas a una tienda y compras 3 manzanas, 4 naranjas y 5 plátanos. Tu compra puede describirse como (3 4 5). Si también va tu hermano y compra 4 manzanas, 2 naranjas y 1 plátano, su compra es: (4 2 1). La compra total es 7 manzanas, 6 naranjas y 6 plátanos, esto es: (7 6 6). Por consiguiente, podemos escribir:

$$(3\ 4\ 5) + (4\ 2\ 1) = (7\ 6\ 6)$$

Los elementos individuales se llaman componentes del vector, y se dice que *la suma de dos vectores es el vector cuyos componentes son las sumas de sus respectivos componentes.*

Un vector es una especie de inventario.
Se tratan los vectores-columna de la misma manera.
Se define:

$$(u_1\, u_2\, u_3) + (v_1\, v_2\, v_3) = (u_1\, v_1\, u_2\, v_2\, u_3\, v_3);$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

III.3. *Multiplicación por un solo número*

Si dos personas van a la tienda y cada una efectúa el mismo vector-compra de 3 manzanas, 4 naranjas y 5 plátanos, entonces es evidente que su compra total es:

$$2 \times (3\ 4\ 5) = (6\ 8\ 10)$$

En palabras: *un vector se multiplica por un número cuando cada componente está multiplicado por ese número:*

$$k\times (v_1\, v_2\, v_3) = \ldots?$$

$$k\times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \ldots?$$

Esta propiedad y la de la suma son las propiedades esenciales que pueden tener los vectores.

a) Si a es el vector $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ y b es el vector $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$, entonces $a + b$ es el vector:

$$(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3,\ \ldots)$$

b) Si k es un número, entonces ka es el vector:

$$(ka_1,\ ka_2,\ ka_3,\ \ldots)$$

Puede haber cualquier número de componentes, pero evidentemente siempre será el mismo número en cualquier conjunto de vectores de que se hable. También podemos escribir los vectores como filas o como columnas, pero *es necesario* escribir todos los vectores de la misma clase de igual manera.

Cuando se usa una sola letra para nombrar un vector, es conveniente escribirle *a*, y en imprenta se le escribe con negrita, **a**.

EJERCICIOS

1. Un sintonizador de radio contiene 3 lámparas, 12 resistencias, 10 condensadores y 4 bobinas. Expresa esto como un vector y di cómo obtienes los elementos necesarios para 50 sintonizadores.

2. Suma, donde sea posible, los siguientes vectores.

Si esto no es posible, di por qué:

a) $(2, 1, -1) + (0, 4, 3)$ *b)* $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + (3, -1)$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (5, -2, 4)$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

e) $(6, 4) + (0, 0)$ *f)* $(6, 4) + (-6, -4)$

g) $(3, -2, 5) + (-3, 3, -1)$

h) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $3\,(4, 0, -1)$ *b)* $2\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ *d)* $2\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $a\,(1, 0, 0) + b\,(0, 1, 0) + c\,(0, 0, 1)$

g) $p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} S + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

III.4. *Vectores y traslaciones*

La aplicación más común de la idea de vector es a *la traslación.* Si aplicamos a un plano una traslación que mueva todo punto tres unidades paralelamente al eje x, entonces el punto (a, b) llega a ser $(a + 3, b)$ y éste puede obtenerse de añadir $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ al vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. (Escribimos el vector como columna para distinguirlo del par de coordenadas.)

De la misma manera, podemos aplicar una traslación que implique un desplazamiento de 3 unidades paralelamente al eje ox combinado con un desplazamiento de -2 unidades paralelamente a oy, esto es, un desplazamiento *hacia abajo* de dos unidades paralelo al eje y. Tal traslación (fig. 1) lleva el punto (a, b) al punto $(a + 3, b - 2)$; esto suma $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ al vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Evidentemente también lleva el origen $(0, 0)$ al punto $(3, -2)$ y ésta es la manera más fácil de identificar una traslación.

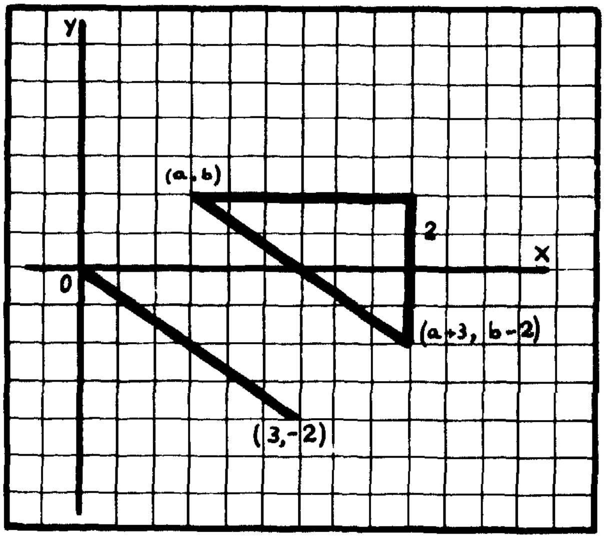

Fig. 1

Se ve que: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ahora hay que introducir algunos términos técnicos para hacer el asunto más preciso y evitar largas explicaciones.

III.5. *Vectores de posición*

El vector-desplazamiento de una traslación es un vector-columna, *cuyos componentes* son los componentes-distancia de la traslación en las direcciones de ox y oy. Por ejemplo:

La traslación de la figura 1, que lleva (a, b) a $(a + 3, b - 2)$, tiene los *componentes-distancia* $+3$ y -2 y su *vector-desplazamiento* es $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Este desplazamiento lleva el origen a $(3, -2)$ y el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ se llama *vector de posición* de este punto.

Es decir, el *vector de posición de un punto es el vector-desplazamiento de la traslación que lleva el origen a ese punto.* Así, el vector de (a, b) es $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, porque para moverse desde $(0, 0)$ a (a, b) sumamos *a a la coordenada x y b a la coordenada y*; damos un paso de longitud a paralelamente a ox y de longitud b paralelamente a oy.

Se puede mirar esto de otra manera. Una traslación mueve todos los puntos del *plano la misma distancia* en la misma dirección (fig. 2). Aquélla lleva A a B, O a P, C a D, E a F, G a H. Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{OP}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, son todos iguales y paralelos. Cualquiera de ellos se llama frecuentemente un *desplazamiento;* por ejemplo: A sufre el desplazamiento de $\overline{AB}$.

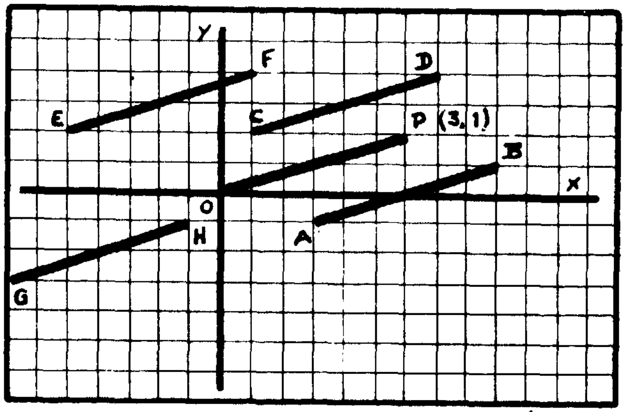

Fig. 2 El vector $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Entre estos desplazamientos uno es de particular interés: el que parte del origen O. Si éste es $\overline{OP}$, las coordenadas de P, es decir (a, b), determinan completamente la traslación $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ es el *vector-desplazamiento* de la traslación y el *vector de posición de P*.

Se escribe $\mathbf{OP} = \mathbf{r} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ como nombres de este vector. Hay que tener presente que el vector describe la traslación de todo el plano, no sólo la de O. Cualquiera de los desplazamientos iguales $\overline{AB}$, $\overline{OP}$, $\overline{CD}$, ..., puede usarse para describir aquélla. En efecto:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{OP} = \mathbf{CD} = \dots = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Estos son nombres del mismo vector.

La traslación con el vector-desplazamiento $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ lleva el punto (4, 5) al punto (4 + 3, 5 — 2), o sea (7, 3); es decir, se suma el vector-desplazamiento $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ de la traslación al vector de posición $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ del punto, ya que

$$\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$$

el nuevo vector de posición es $\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$ y el nuevo punto es (7, 3).

En la figura 3 se adopta un convenio útil; la suma de los dos vectores con una sola flecha es el vector con doble flecha.

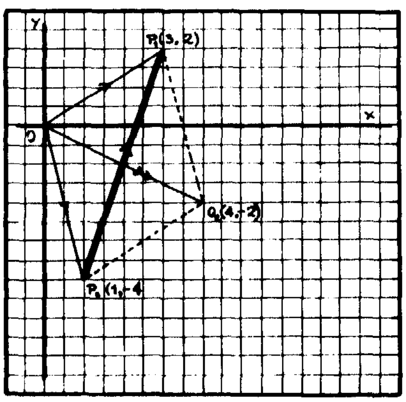

Fig. 4

Se puede escribir:

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PP'} = \mathbf{OP'}$$

con tal que esté claro lo que esto significa (la cuadrícula lo aclara).

EJERCICIOS

Escribir las imágenes de los siguientes puntos después de aplicarles la traslación dada por el vector $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

1. (2, 3).
2. (— 3, 4).
3. (0, 0).
4. (10, 10).
5. (— 5, 2).
6. (x, y).
7. La traslación $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ ¿a qué punto lleva el origen?
8. Si una traslación lleva (0, 0) a $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, ¿cuál es su vector?
9. ¿Qué traslación lleva (4, — 3) a (— 2, 5)?
10. ¿Qué traslación única tiene el mismo efecto que $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ seguida de $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$?
11. Sea O (0, 0), B (— 2, 3) y C (4, 5). Escribir los vectores de las traslaciones que llevan O a A (**OA**), A a B (**AB**) y O a B (**OB**). Comprobar que **OA** + + **AB** = **OB**.

III.6. *Sumas de vectores de posición*

Ya sabemos que el vector de posición de P (a, b) es el vector-desplazamiento que lleva el origen a P; sus componentes son las coordenadas de P. Escribimos este vector $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ o **OP** y frecuentemente conviene designarle por una sola letra, **p**.

Si

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{OP}_1 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{OP}_2 = \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$$

será:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$$

que es el vector de posición de un punto Q (4, — 2) (figura 4).

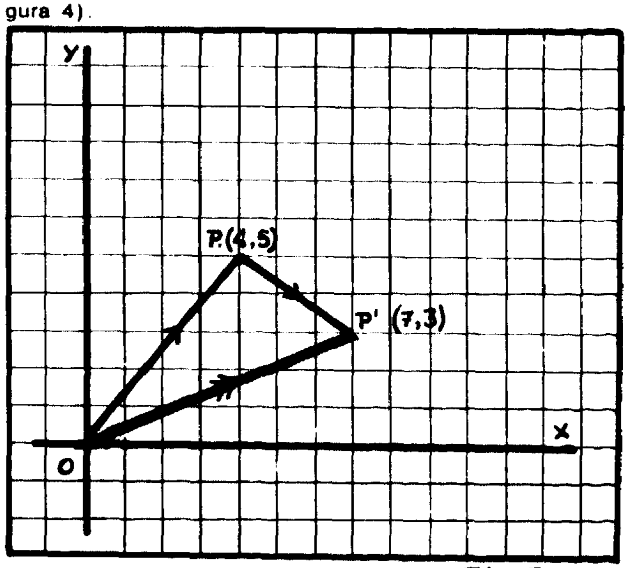

Fig. 3

Como la traslación que aplica O en P_2 aplica P_1 en Q, la figura OP_1QP_2 es un paralelogramo.

La misma figura 4 nos dice que:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1$$

Enuncie el lector una regla para hallar:

$$\mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2$$

III.7. *Diferencias*

Definida la suma de $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, veamos cómo se define la diferencia $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$. Recordemos lo que significa, por ejemplo, -5; -5 es el número que sumado con 5 produce 0. Y el 0 es el elemento neutro de la adición, el número que sumado con otro le deja a éste invariable; $0 + n = n$, cualquiera que sea n.

También existe un *vector cero*, una traslación nula; ésta aplica 0 en (0, 0); éste es el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Y así se tiene:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a \\ b-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si hacemos $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{p} = \mathbf{p}_1$, entonces será $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = -\mathbf{p} = \mathbf{p}_2$ y $(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$. Es decir, la diferencia de dos vectores $(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ es un vector que sumado con el vector sustraendo nos da el vector minuendo.

Geométricamente, si $\mathbf{p}_1$ es el vector de posición P_1 y $\mathbf{p}_2$ es el vector de posición P_2, $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ es el vector de la traslación que lleva P_2 a P_1 y $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ es el desplazamiento que lo representa (fig. 4).

III.8. *Multiplicación por un número*

Si

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{OP}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$2\,\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad 3\,\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

y así sucesivamente.

Estos son los vectores de posición de puntos que están en la recta OP_1, pero distan, respectivamente, doble y triple del origen que el punto P_1 (fig. 5)

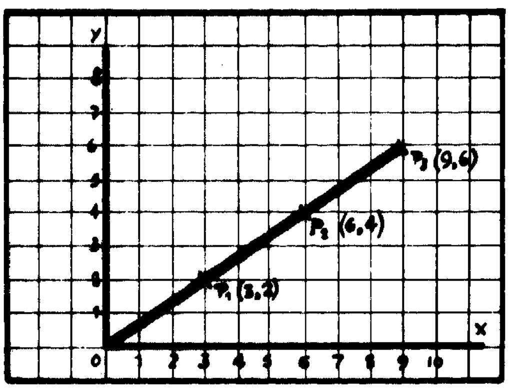

Fig. 5

Traza el triángulo OPQ, donde P es (3, 2) y Q es (1, 4), y multiplica los vectores de posición de cada punto por 3, obteniéndose así un triángulo OP'Q'. ¿Qué relación hay entre estos triángulos?

III.9. *Leyes conmutativa, asociativa y distributiva*

Hasta ahora hemos definido dos operaciones sobre los vectores: *a)* adición, *b)* multiplicación por un número. Estas operaciones sobre vectores satisfacen las mismas leyes que los números ordinarios.

Estas leyes son:

1.ª $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1$.
2.ª $\mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_3$.
3.ª $k\,(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = k\mathbf{p}_1 + k\mathbf{p}_2$.
4.ª $(k + 1)\,\mathbf{p} = k\mathbf{p} + 1\,\mathbf{p}$.

Es fácil comprobar la verdad de estas leyes mediante las definiciones de adición y multiplicación de vectores. Lo que significan geométricamente está sugerido por algunos de los ejercicios siguientes:

EJERCICIOS

1. Si $\mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2 = \mathbf{OQ}$, hallar las coordenadas de Q en cada uno de los siguientes casos y establecer las posiciones de P_1, P_2 y Q en un diagrama:

a) P_1 es (1, 4), P_2 es (—2, 3).
b) P_1 es (2, —1), P_2 es (—3, 1).
c) P_1 es (0, 3), P_2 es (0, —3).
d) P_1 es (—4, 0), P_2 es (—1, 0).
e) P_1 es (4, 5), P_2 es (—3, —2).

2. En cada parte del ejercicio 1 da las coordenadas de R y S si $\mathbf{OR} = 2\,\mathbf{OP}_1$, $\mathbf{OS} = 2\,\mathbf{OP}_2$. Comprueba que $\mathbf{OR} + \mathbf{OS} = 2\,\mathbf{OQ}$.

3. Supongamos que P_1 es (1, 2), P_2 es (—2, 1) y P_3 es (—3, —4).

a) Hallar Q si $\mathbf{OQ} = \mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2$ y construye su diagrama.

b) Hallar R si $\mathbf{OQ} + \mathbf{OP}_3 = \mathbf{OR}$ y construye R en el mismo diagrama.

c) Hallar S si $\mathbf{OP}_2 + \mathbf{OP}_3 = \mathbf{OS}$ y construye S en el mismo diagrama.

d) Si $\mathbf{OP}_1 + \mathbf{OS} = \mathbf{OT}$, ¿dónde está T?

4. Escribir las coordenadas de R en cada parte del ejercicio 1 si $\mathbf{OP}_1 - \mathbf{OP}_2 = \mathbf{OR}$ y situar la posición de R en un diagrama.

5. Supongamos que A es (4, 0), B es (2, 6) y $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} = 2\,\mathbf{OC}$. Hallar las coordenadas de C y sitúa C en un diagrama. ¿Dónde está C respecto a A y B?

6. ¿Qué son $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $2\,\mathbf{p}$, $2\,\mathbf{p} - 3\,\mathbf{q}$, cuando

$$p = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad q = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

7. ¿Cuál es el cuarto vértice del paralelogramo O A B C si A es (2, —1) y C es (1, 3)?

8. Supongamos que O P Q R es un paralelogramo (en ese orden), P es (—1, 4) y Q es (2, 1). ¿Dónde está R?

9. Un paralelogramo tiene un vértice en el origen, otro vértice en (—1, 3) y sus diagonales se cortan en (1, 2). Hallar las coordenadas de sus otros dos vértices.

10. P Q R S es un paralelogramo; P es (—3, —2), Q es (1, —1), S es (—1, 5); ¿dónde está R?

III.10. *Vectores base*

Anteriormente definimos una traslación diciendo que ésta implicaba un desplazamiento de 3 unidades al eje O*x*, combinado con un desplazamiento de —2 unidades paralelo a O*y*.

Estos desplazamientos son también traslaciones. En efecto:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Puede darse un paso más:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son desplazamientos de longitud unidad a lo largo de los ejes y cualquier vector puede expresarse en función de ellos:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cualesquiera que sean *a* y *b*. Por esta razón se les llama vectores base y se les da nombre:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{i} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{j}$$

Luego cualquier vector:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

El vector de posición del punto P con ordenadas (a, b) puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \text{OP} \quad \text{o} \quad a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$