Valores y objetivos de la Matemática Moderna

Por ALBERTO AIZPUN
Catedrático de Matemáticas de la Escuela Normal Femenina de Madrid

1. INTRODUCCION

Para la Escuela Primaria la evolución de la Matemática en estos años es importante por los cambios de métodos didácticos que lleva consigo, desde luego mucho más que por los eventuales cambios de programas. Es muy posible, sin embargo, que esa renovación de métodos haya sido inducida porque los conceptos que en la Escuela Primaria resultan nuevos han probado que son de gran importancia para la educación, en general, y no solamente para la información matemática, en particular. Es por esto que tantas veces se reclama el apoyo del psicólogo en la programación de la Matemática; no sólo por el conocimiento de las etapas del desarrollo mental del niño, sino porque los conceptos fundamentales en la Matemática actual parecen serlo también en el pensamiento humano, cualesquiera que sean los contenidos sobre los que actúe.

En esta interpretación de los nuevos conceptos, que lo son únicamente, se repite, por cuanto no aparecían antes en la Escuela Primaria, es en donde encuentra la Matemática actual sus valores y sus objetivos. En cuanto se refiere a su aprendizaje, los métodos de enseñanza han de tener un doble apoyo:

— En los conceptos mismos.
— En la jerarquía que tales conceptos ocupan en el desarrollo mental del alumno.

El carácter del primero es estrictamente matemático y corresponde a los matemáticos profesionales aclarar cuáles son fundamentales para su ciencia y en qué grado; el segundo tiene carácter psicológico y sobre la cuestión se han realizado ya muchas investigaciones, algunas de las cuales, como las de Piaget y su escuela, han quedado como clásicas.

Así que todo profesor a quien agrade estar al día debe saber que ha de profundizar en tres direcciones:

a) La de los contenidos matemáticos, convenciéndose de que estará mejor preparado para su labor cuando posea un mayor dominio de conocimientos.

b) La de los resultados que se han obtenido y se van obteniendo en las investigaciones psicológicas sobre el aprendizaje de la Matemática.

c) La de los métodos de enseñanza deducibles.

Aquí no podemos comentar exhaustivamente ninguno de los tres puntos y nos limitaremos a exponer esquemáticamente algunas cuestiones sobre **a)** y **c)** señalando el valor educativo que encierran y el objetivo que se persigue con ellas.

2. ALGUNAS CARACTERISTICAS DE LA MATEMATICA ACTUAL

Tanto los especialistas como los aficionados han admitido siempre que la Matemática actúa con abstracciones y los profanos llegan a disociar el pensamiento matemático del pensamiento sobre la realidad. Sin embargo, muchas veces la Matemática ha tomado sus problemas de la experiencia, sobre todo de la Física, y ha sido después, al estudiar sus derivaciones formales, cuando han sido planteados sobre ellas otros problemas cuyos elementos ya no se tomaban del mundo sensible y de los que nadie recordaba su origen experimental. Por eso la naturaleza abstracta de la Matemática era entendida en el sentido de que la abstracción la realiza a partir de la vida real y de que los elementos con que trabaja son meras idealizaciones de los que componen el mundo sensible. Esta interpretación conducía de modo natural a un procedimiento de enseñanza consistente en comenzar por la observación de los objetos exteriores a fin de idealizar algunas de sus propiedades, que habían de tener siempre y forzosamente un carácter meramente numérico o geométrico; sobre estas idealizaciones, obtenidas de modo empírico e intuitivo, se construía una teoría matemática que posteriormente se aspiraba a comprobar actuando de nuevo sobre la experiencia externa.

Este modo de entender las cosas parece que da a la Matemática un carácter estático, de descubrimiento; una propiedad observada, un teorema demostrado, son puntos de llegada, verdades que se nos aparecen, cosas que siempre existieron, pero que sólo nos son conocidas a partir del momento en que las descubrimos, pequeñas o grandes Américas de la investigación.

Los profesionales actuales no comparten este punto de vista y para ellos uno de los valores de la Matemática es precisamente su carácter marcadamente dinámico; no se trata de descubrir y contemplar, sino de inventar y construir. Con esta concepción, la Matemática no será un sistema cerrado de conocimientos, susceptible de agotarse, sino un campo abierto a todas las iniciativas y, por tanto, en constante desarrollo.

Por otro lado, y sin que suponga ninguna contradicción con lo anterior, la Matemática realiza actualmente un esfuerzo de síntesis; avanzar en esta síntesis es precisamente su principal objetivo. Intenta buscar las conexiones existentes en dominios que hasta ahora se presentaban como independientes, y posiblemente tal aspiración a la unidad es un hecho que en el fondo del pensamiento humano ha aparecido más de una vez. Con este objetivo, intencionado o inconsciente, la meta está todavía muy lejos, y si llamamos moderna a la Matemática de ese estilo, no habrá hecho más que empezar. Profundizará y se extenderá mucho más, siendo ya un camino irreversible.

Una de las ideas que consigue en parte esta unidad entre teorías aparentemente no relacionadas entre sí es la de estructuras isomorfas, que por ser una de las claves del pensamiento matemático es también uno de los más fuertes instrumentos de la enseñanza. Según la escuela Bourbaki, «el objeto de la Matemática es el estudio de las estructuras matemáticas»; y dejando aparte esta opinión, sea o no la más acertada y precisa, revela por lo menos la importancia del concepto de estructura. Para hablar de estructura es necesario fijar un conjunto y establecer entre sus elementos una o varias relaciones. Por ejemplo: tomemos el conjunto $C = \{ a, b, c, d \}$ y establezcamos entre sus elementos la operación descrita por la tabla de la figura 1; se podrá hablar entonces de la estructura de C.

Fig. I

𝄞	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Si es $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ y la operación $*$ consiste en obtener de cada par de elementos el resto que da su suma al dividirla por 4 (así $2 * 3 = 1$), se obtiene la tabla de la figura 2 y se podrá hablar de la estructura de A.

Fig II

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tomemos ahora un cuadrado y llamemos:

m al giro de 360° respecto al centro, en cualquier sentido.

n al giro de 90° respecto al centro, en el sentido de las agujas del reloj.

p al giro de 180° respecto al centro, en cualquier sentido.

q al giro de 90° respecto al centro, en sentido opuesto al de las agujas del reloj.

Tendremos entonces el conjunto B = { **m, n, p, q** } en que la composición de movimientos, que designamos por o, proporciona la tabla de la figura 3, pudiéndose hablar entonces de la estructura del conjunto B.

Fig. III

o	m	n	p	q
m	m	n	p	q
m	n	p	q	m
p	p	q	m	n
q	q	m	n	p

Como se ve, estas tres tablas son intercambiables así:

& $\leftrightarrow$ * $\leftrightarrow$ o
a $\leftrightarrow$ 0 $\leftrightarrow$ m
b $\leftrightarrow$ 1 $\leftrightarrow$ n
c $\leftrightarrow$ 2 $\leftrightarrow$ p
d $\leftrightarrow$ 3 $\leftrightarrow$ q

Por eso se dice que las estructuras adquiridas por A, B y C con las operaciones respectivas son estructuras isomorfas; basta estudiar una de ellas, por ejemplo la de C, cuyos elementos no han sido concretizados, para poder traducir los resultados en las otras dos, aparentemente tan inconexas como las dadas, al menos en lo que se refiere al tipo de elementos que manejan.

La estructura puesta en los tres ejemplos anteriores es del tipo de las llamadas estructuras algebraicas, donde el adjetivo significa que la relación establecida entre los elementos del conjunto tiene carácter operativo, es decir, que consiste en un procedimiento mediante el cual de cada par de elementos del conjunto se obtiene un elemento del mismo conjunto. Otras veces la relación establecida sirve para ordenar de algún modo el conjunto (como la relación «estar contenido» entre los subconjuntos de un conjunto), y entonces se habla de una estructura de orden. Finalmente, si la relación establecida hace referencia a los conceptos de entorno, continuidad, límite, etc., se dirá que tratamos con una estructura topológica. Cualquier estructura que se construya puede retrotraerse a una o varias de esos tipos.

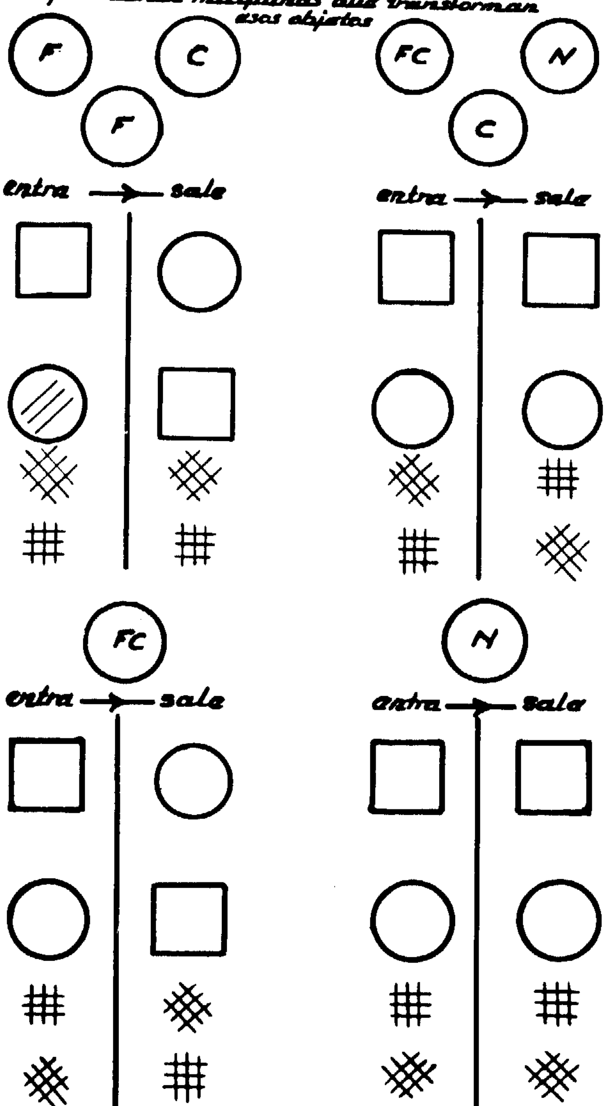
Pues bien, resulta conocida de hace tiempo la tesis de Piaget según la cual los mecanismos mentales del niño pueden describirse mediante ciertas estructuras (también mentales) que en algún modo son comparables a aquellas otras matemáticas, aunque sin la pretensión de establecer entre unas y otras un completo isomorfismo. Así, las estructuras matemáticas tendrían un carácter «natural», resultando en gran medida una prolongación formal de las estructuras de la inteligencia. En realidad la tesis de Piaget se encuentra subyacente en la mayor parte de los procedimientos didácticos que se ensayan en la actualidad, y se comprende que la confluencia de los tres hechos que hasta ahora hemos marcado (interpretación constructiva y por tanto eminentemente activa de la Matemática, tendencia a la unidad con el concepto de estructura, interpretación de los trabajos de Piaget) conducen necesariamente a una modificación total de los procedimientos didácticos seguidos hasta hoy, así como que este campo de la Pedagogia de la Matemática está por eso mismo prácticamente inexplorado.

Y aún hay otras cuestiones sobre la Matemática actual que repercuten en su enseñanza y que no hemos considerado. Por ejemplo, que ese objetivo de unidad que parece intentarse a través del concepto de estructura está apoyado en el método puramente axiomático, hasta el punto que puede citarse éste como otro de los valores de la Matemática actual. Es cierto que la palabra axioma referida a lo que se acepta de partida sin demostración y en lo que se basa el razonamiento deductivo para desarrollar una teoría es muy vieja, pero ahora no se trata de esto. Se trata de que las estructuras de que hablamos se crean y diferencian en virtud de los axiomas impuestos de partida. Si éstos son pocos la estructura creada será observable en campos de la Matemática muy distintos, y a medida que aumentemos el número de axiomas, es decir, a medida que compliquemos la estructura creada, aquellos campos se irán singularizando. De modo que si los elementos de un conjunto C satisfacen a **n** condiciones pre-

FICHA de INFORMACION Fig. IV

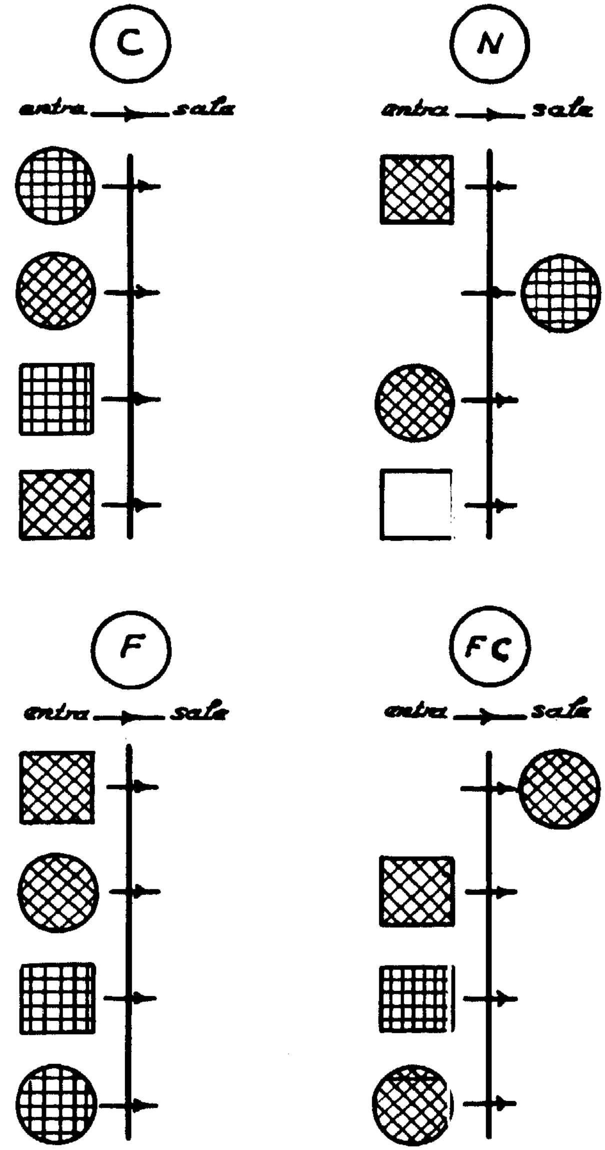
Aquí tienes objetos:

Aquí tienes máquinas que transforman esos objetos



FICHA DE ACTIVIDAD Y CONTROL DE LA COMPRENSION

Usa las máquinas antes para completar lo que falta:



vias, al añadir una nueva condición independiente de las anteriores es de esperar que ya no sea satisfecha por todos los elementos de C, sino sólo por los de una parte de éste. Así el método axiomático actúa como un mecanismo de disgregación, de individualización, de caracterización.

Por otro lado, el concepto de axioma ha pasado a ser, quizá desde diferente punto de vista, algo así como regla permitida, encontrándose aquí la fuerte relación entre Matemática y Lógica. Siempre se ha reconocido este parentesco y afirmado que la Matemática es eminentemente lógica porque es rigurosamente deductiva. Ahora son los propios métodos matemáticos los que actúan sobre alguna parte de la Lógica, y las obras existentes con el nombre de Lógica Matemática son muchas. Sólo por poner un ejemplo de este entronque puede citarse la aportación de la Matemática a la programación de las computadoras y los interesantes y atractivos problemas que plantean los cálculos asociativos. He aquí uno de los motivos por los que cada día se insiste más en hacer aparecer en la Escuela Primaria el cálculo lógico en conexión con la clase de matemáticas.

No es cuestión ahora de realizar una exposición de las principales cuestiones de contenido matemático; pero hay que convencerse de que teoría de conjuntos (no tan fundamental hoy como suele decirse, aunque importantísima en Matemática), relaciones, aplicaciones, leyes de composición, estructuras, axiomatización de una teoría, cálculo lógico, por citar cosas que aparecen como nuevas en la Escuela Primaria, es algo de conocimiento indispensable a todo profesor, cualesquiera que sean sus alumnos, bachilleres o párvulos, aunque no suficiente. Sin ello resulta **completamente imposible** realizar una enseñanza que sirva al alumno para algo. Y conste que no se trata de utilizar las palabras, sino el sentido que dan a la enseñanza todas esas ideas.

3. EL OBJETIVO DE LA MATEMATICA EN LA E. P. Y MODO DE ALCANZARLO

El objetivo que se propone la Matemática en la Escuela Primaria no es que el alumno adquiera mecánicamente el conocimiento de una colección de hechos y de relaciones matemáticos. En realidad son pocas las ideas a tratar, y se aspira más bien a que el niño adquiera el **hábito de pensar** sobre ellas; el gran valor de la Matemática en la Escuela consiste precisamente en que es un modo de pensar y, consecuentemente, un modo de actuar. Pero aprender a pensar exige tener oportunidad de construir el propio pensamiento. Al principio éste tendrá muchas lagunas, será reiterativo y al mismo tiempo impreciso, como ocurre en todo aprendizaje; no sabrá conducirse con soltura y rigor, etc. Pero la reiteración en el entrenamiento, el contraste que los alumnos hagan de sus mutuos modos de pensar, la búsqueda de contraejemplos, etc., lo irán perfilando. Este es un modo de trabajar que requiere por parte del maestro paciencia para esperar, habilidad para sugerir, imaginación para proponer situaciones aprovechables...

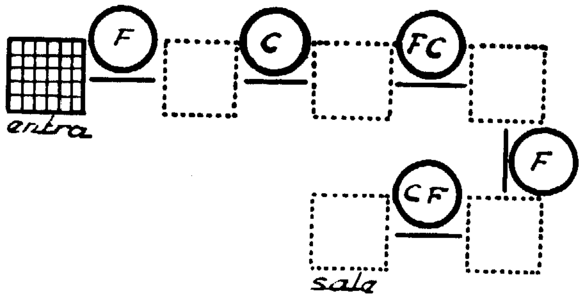
En la actualidad nuestros estudiantes no saben, en general, pensar a partir de una información escrita previa; ni en Primaria, ni en Media, ni siquiera en los primeros cursos de Universidad, salvo excepciones y refiriéndonos únicamente a informaciones de tipo matemático. Muchos métodos de enseñanza actuales tienden fuertemente, sin embargo, a que el alumno trabaje, sea individualmente, sea en grupos, a partir de informaciones que recibe por escrito. No han sido experimentados con la suficiente extensión como para preferirlos a otros, pero de entrada tienen la ventaja de habituar al alumno a esa necesaria facilidad de interpretar y explotar tales informaciones, así como saber aplicarlas a cuestiones que se le presenten. A modo de ejemplo se dan adjuntas algunas fichas individuales que intentan realizar este trabajo (1).

Las fichas de este estilo se continúan para descubrir la conmutatividad y asociatividad de la composición, la observación de *N* como neutra y la de que cada máquina tiene su inversa, que en este ejemplo es ella misma. En realidad ha sido una motivación aprovechable para dar ese sentido operacional al cálculo numérico, que se realiza partiendo de fichas parecidas en las que las máquinas son $+a$, $\times b$, $-c$, $:d$ (donde a, b, c, d, son números naturales), permitiendo así que los alumnos descubran, cada uno a su ritmo, las propiedades de las operaciones (asociativa, conmutativa, existencia de neutro...) y sus mutuas rela-

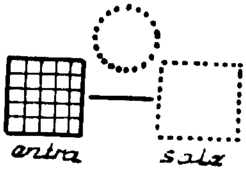
(1) Estas fichas son debidas a Nicole Picard, del Instituto Pedagógico Nacional de Francia. Algunos centros y manuales españoles las aprovechan en parte, lo que es cómodo; pero no citan su origen, lo que es feo.

Ficha de actividad y descubrimiento

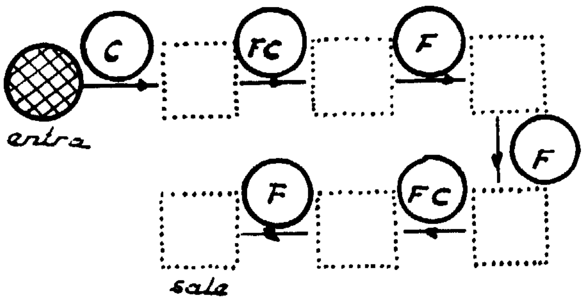
Aquí hay una cadena de 5 máquinas.



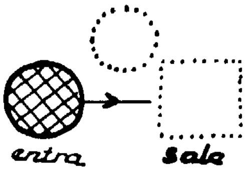
¿Se puede hacer el mismo trabajo con una sola máquina?



Aquí hay otra cadena: ésta tiene 6 máquinas.



¿Puede hacerse el mismo trabajo con una máquina sola?



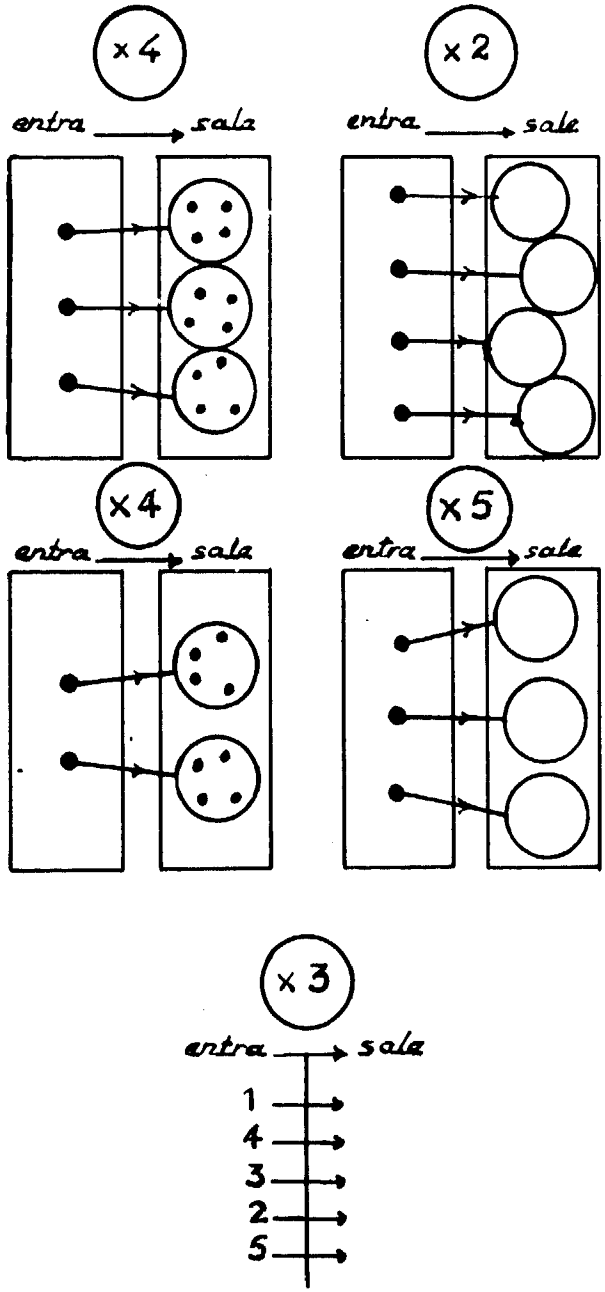
Inventa otras cadenas de máquinas y mira si cada vez puedes sustituirla por una sola.

FIG. VI

ciones (distributividad, pares de inversas). En la figura 7 aparece, por ejemplo, una primera ficha informativa sobre la multiplicación.

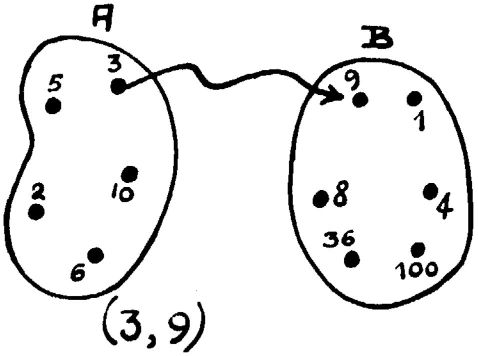
Este sistema de fichas no tiene edad dentro de la Enseñanza General Básica. Aunque las mostradas pertenecen al momento en que se investigan las propiedades de las operaciones, pueden emplearse en cualquier otro momento. En la figura 8 se presenta otra (del autor) que utilizamos a los once-doce años y que corresponde al juego de ellas en que se pretende fijar el concepto de función. Queda por decir

MAQUINAS DE MULTIPLICAR



que estas fichas, aisladamente utilizadas, tienen poco valor; hace falta una colección de ellas para acceder al concepto que se busca y otra colección para evaluar los resultados obtenidos. Muy probablemente, la técnica de la enseñanza programada será aprovechable en su confección, aunque el método tiene orientaciones distintas.

I. Aquí tienes el conjunto A y el conjunto B. Se ha trazado una flecha de 3 a 9, porque el cuadrado de 3 es 9. Más abajo se ha escrito la pareja (3, 9).



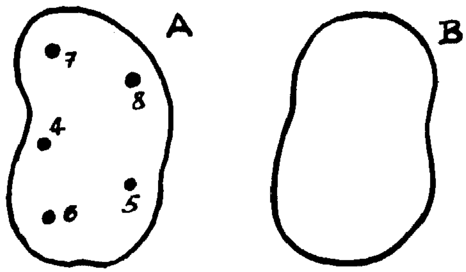
II. Traza las flechas posibles y escribe las parejas que resulten.

Di si puedes hablar de función.

Escribe los números que pertenecen al conjunto de definición.

Escribe los números que pertenecen al conjunto final.

III. Escribe en B los números que hagan falta para que puedas trazar una flecha de cada uno de los números de A. Escribe las nuevas parejas.



IV. Completa las parejas: (2, 4), (3, 9), (4,), (5,), (10,), (n,).

Tacha en rojo los pares que no pueden escribirse: (1, 1), (4, 8), (6, 35), (7, 49), (8, 64), (9, 80).

V. La pareja (4, 16) puede escribirse, porque $16 = 4^2$. La pareja (7, 49) puede escribirse, porque $49 = 7^2$. Sé que la pareja (x, y) puede escribirse; llena entonces lo que falta: $y =$

FIG. VIII

Este procedimiento de trabajo mediante fichas individuales tiene otras ventajas aparte de esa, a nuestro juicio grandísima, de habituar al alumno a interpretar con exactitud y precisión lo que un escrito le dice, falta de hábito que es, seguramente, una de las causas de que el libro de texto no sirva a casi ningún alumno para otra cosa que aprendérselo de memoria, y son:

— que permite a cada alumno adelantar a su ritmo propio;
— que evita la rémora que para la marcha de la clase como grupo suelen representar los alumnos más atrasados, por cuanto permite poner a éstos al mismo nivel que la mayoría en tiempo breve;
— que todos realizan algún trabajo con acierto;

- que permite un control auténtico de los avances de cada uno;
- que suministra una información clarísima sobre el modo de proceder de cada alumno;
- que las fichas son susceptibles de confección por el propio Maestro, conocedor de las necesidades de sus alumnos.

Por otro lado, exige del Maestro:

- una preparación concienzuda de cada ficha, sin perder de vista el objetivo final;
- disponer de fichas suplementarias para los alumnos más lentos de comprensión y de otras para aquellos más rápidos;
- tener una máquina multicopista que le reproduzca las copias.

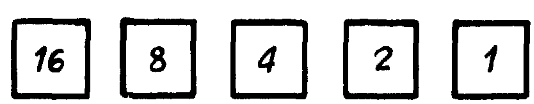
Si nos hemos detenido un tanto, aunque sea esquemáticamente, en esta exposición del trabajo por fichas individuales, es porque permite al Maestro actuar con independencia de lo que los textos le marcan y queda libre para mejor dirigir a sus propios alumnos, a quienes, sin duda, conoce mejor que nadie. Pero como antes se ha dicho, no es todavía un procedimiento contrastado como mejor que otros; quizá, en el fondo, sea un método socrático disfrazado y la tal inventiva del alumno no exista. Efectivamente, ¿es que en las fichas que se ponen como ejemplo puede actual el alumno de algún modo que no sea el correcto? ¿Existe realmente la posibilidad de dirigir la acción y el pensamiento por caminos diferentes? He aquí un punto de investigación que cada uno puede hacer en su escuela... si tiene una multicopista.

1. PROCEDIMIENTOS UTILIZABLES EN NUESTRAS ESCUELAS

La mayor parte de los métodos que hoy se exponen como deseables presentan ciertos condicionamientos (de medios, de material, de mobiliario incluso) a los que el maestro casi nunca puede atender en su realidad escolar, pero esto no es obstáculo importante para poder realizar una labor plena de sentido y de eficacia. En efecto, aquellos medios pueden aparecer como deseables, pero resulta dudoso que sean necesarios e indiscutible que no son suficientes; en cambio, la auténtica preparación del Maestro y el interés por su propia labor resultan decisivos.

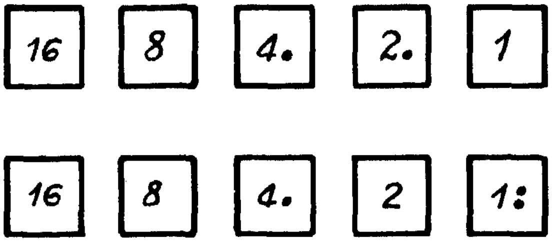
En la actualidad se da una circunstancia afortunada, y es que hoy más que nunca se ofrece al alumno la actividad matemática en forma de juego, es decir, que se le motiva la construcción matemática proponiéndole juegos. No es necesario recurrir a las bellas exposiciones de Claparède para justificarlo, principalmente porque el objetivo que se persigue con ello no está plenamente entre las reflexiones de aquél. Se le ofrece un juego porque éste exige un material sobre el que actuar, ya sea sensorial o mental, de igual modo que las teorías matemáticas actúan con ciertos elementos (puntos, números, movimientos, funciones, conjuntos, etc.); exige además unas reglas previamente aceptadas, como la Matemática impone de partida sus axiomas; finalmente, la aplicación de aquellas reglas a las manipulaciones del material sensorial o a las consrucciones mentales permite encontrar resultados, como la deducción lógica a partir de los axiomas permite formar la teoría matemática. Esto no quiere decir, claro está, que la matemática se entienda construible como un juego ni que sólo sean juegos lo que se proponga a los alumnos; quiere decir que tales juegos, si están apropiados a la edad, resultan una buena fuente de motivaciones y un recurso eficaz.

He aquí un juego apropiado a cualquier niño de nuestras escuelas, que cualquier lector puede experimentar en su clase y que lleva a manejar de modo natural la numeración de base 2: el maestro debe disponer de cuatro o cinco chapas de hojalata visibles para toda la clase cuando se cuelguen de la pizarra; tendrá además fichas de plástico o de madera en las que habrá pegado pequeños torozos de imán para que se adhieran a las chapas. Si no puede disponer de ese material usará cuadrados de cartón, en cada uno de los cuales habrá un orificio donde pueda encajar un corcho. Las chapas se presentan a toda la clase al objeto de dar simultáneamente las reglas del juego a todos los alumnos; aparecerán así (fig. 9):

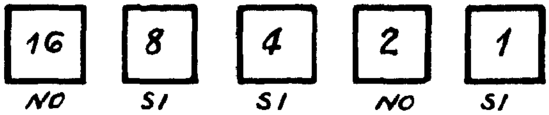


Esto es un juego de feria; compro fichas y con ellas tiro sobre los cuadros. Me apunto la suma de los tantos que marque. Así, si pongo una ficha en el 8, otra en el 2 y otra en el 1, me apunto 8 + 2 + 1 tantos. **No se dan más reglas,** aunque sí los ejemplos necesarios. Todo lo demás irá siendo propuesto por los niños, bien espontáneamente o bien como consecuencia de sugerencias del Maestro. Como cada vez que se desarrolla esta actividad con niños distintos son también distintas las incidencias que surgen, sólo podemos dar a continuación alguno de los posibles matices.

Después de conocida por todos la regla inicial se propone que los niños, en equipos de cinco a seis, jueguen a este juego, disponiendo cada uno sobre la mesa de los cartones, que ahora pueden ser papeles, y de las necesarias fichas, monedas o piedras. Uno de los niños del equipo hace de juez y está encargado de escribir en un papel, sin que nadie lo vea, un número; cuando ya lo tiene escrito, cada uno de los demás hace su jugada, y aquel cuyo número formado coincida con el escrito es quien gana. El maestro observa por las mesas, y muy pronto verá el caso de dos niños del mismo equipo que han formado el mismo número, pero de distinto modo. Uno presenta, por ejemplo, la primera jugada de la figura 10 y otro presenta la segunda jugada de la misma figura.



Si, efectivamente, el número premiado es el 6, ¿cuál de los dos jugadores habrá ganado más? Las fichas se compran y, por tanto, valen dinero. ¿Quién ha gastado menos? ¿Quién ha ganado más? Hay que jugar con el mínimo de gasto, y esta observación hace decidir que, en adelante, no darán más de un golpe en cada casilla. El juego en equipos continúa hasta que el maestro ve que todos conocen ya la mecánica del mismo, y entonces propone lo siguiente: yo también quiero jugar en esa feria, pero como no puedo ir daré a uno la jugada que quiero hacer o, mejor, se la escribiré en un papel. Quiero reunir 13 puntos; ¿daré en el 16? ¿Y en el 8? ¿Y en el 4? ¿Y en el 21? ¿Y en el 1? Conforme se dan las respuestas el Maestro escribe bajo cada cartón las palabras SI o NO, de modo que en el ejemplo anterior aparecerá la figura 11.



Aparentando rectificar añade que escribirá siempre empezando en el primer SI, de modo que su escritura en el papel que dará va a ser SI, SI, NO, SI. ¿Qué quiere decir? Entendido esto prosiguen los niños de cada equipo escribiendo en esta clave, haciendo las jugadas correspondientes y autocorrigiéndose las posibles faltas. Finalmente, y para que la clase de escritura sea conocida sólo por nosotros, se propone que en lugar de cada palabra escribiremos una sola de sus letras, la más sencilla de ellas; así aparecerá la escritura I I O I para el ejemplo anterior, de la que muy fácilmente se pasa, debido al parecido tipográfico, a 1 1 0 1.

Obsérvese que respecto a esta escritura 1101 caben tres cuestionarios que conviene distinguir:

a) ¿Qué pone? (uno, uno, cero, uno).

b) ¿Qué significa? (SI en el 8, SI en el 4, NO en el 2, SI en el 1).

c) ¿Cuántos puntos ganará? (trece) (2).

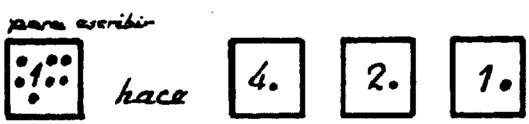
A partir de aquí los niños escriben la sucesión de los números naturales en base dos con toda facilidad: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000..., entendiendo su auténtico significado de SI para el 1 y NO para el 0; como es bien sabido, toda clasificación dicotómica puede expresarse numéricamente recurriendo a la base 2.

Queremos subrayar que todo lo anterior es tanto mejor construido y con más rapidez dominado cuanto menos automatismos de cálculo hayan sido dados al niño por pura memorización. Por ejemplo, si la actividad se desarrolla con niños de diez años (y los cuestiona-

(2) En realidad, la respuesta es: ganará uno, uno, cero, uno, ya que *trece* es el nombre del número que se escribe 13, precisamente en base diez.

rios vigentes es de nueve a diez años cuando hablan de «idea general de numeración»), al proponer la suma 1101 + 101 el alumno convierte cada sumando en base 10, de modo que suma 13 + 5 = 18, y luego retrocede escribiendo 18 en forma 10010; en cambio, el de seis a siete años descubre la jugada más barata 10010 sin ningún cálculo, y muchos niños aun antes de saber lo que significa 16.

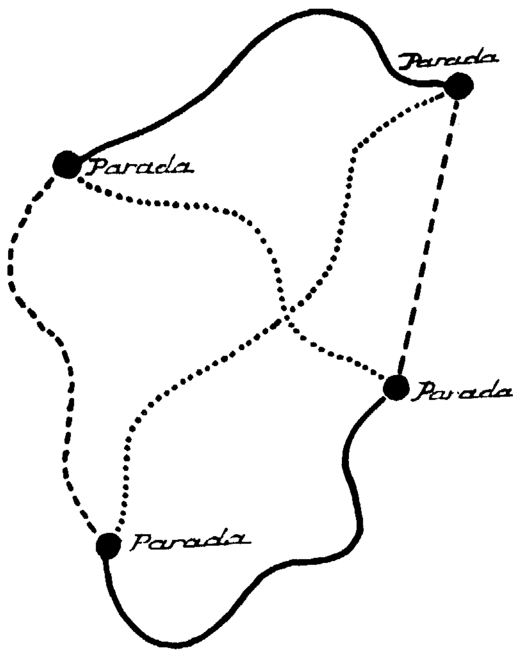
Aunque la actividad descrita tal y como se ha hecho es más adecuada para niños de cuarto curso, es más fácil y beneficiosa con los de primero, que es donde debiera estar incluido el tema, porque no hace falta que el alumno sepa sumar, sino que basta hacerle decidirse por «la jugada más barata», lo que se traduce por el cambio de dos fichas de una casilla por otra en la casilla inmediata de su izquierda, de modo que ocurre lo que se describe en la figura 12.



Procediendo así, esta actividad hace simultanear la comprensión de la escritura y la adición. Queda por advertir que la cuestión ha de tener obligadamente mayor extensión, hasta provocar con juegos análogos el conocimiento de qué es la numeración y cómo hay tantos sistemas cuantos se quieran, así como el modo de formarlos; pero ha sido puesta ahora solamente como ejemplo del tipo de juegos a proponer, muy lejos de lo que puede entenderse por «motivaciones a partir de experiencias de la vida real» y perfectamente posibles en cualquiera de nuestras escuelas.

A continuación se expone un segundo ejemplo de situación en forma de juego y que es susceptible de amplias derivaciones. Es desarrollable con alumnos de doce-catorce años que pueden ya razonar sobre hipótesis verbales, sobre todo si están representadas por imágenes concretas.

La situación es ésta: por mi barrio (o mi pueblo o mi calle) pasan tres líneas de autobuses: la línea roja, la línea azul y la línea verde, que llevan los carteles R, A, V, respectivamente, y cuyos trayectos son los del dibujo (figura 13).



...... Azul.
—- Rojo.
- - - - Verde.

Cuando llega un autobús, el viajero que está en la parada tiene dos opciones, que son dejarlo pasar o subirse a él. Este descubrimiento suele ir precedido de una corta discusión, pues hay quien dice que toma siempre el autobús aunque vaya lleno, mientras que otro le argumenta que puede ocurrir que el autobús que llega no sea el que espera. Entonces los niños realizan cuantos viajes deseen en el dibujo, y una vez familiarizados con la situación se pasa a simbolizar las combinaciones posibles, comenzando por la de solo dos viajes. Para ello, R quiere decir no ya el autobús de la línea roja, sino el hecho de viajar en él, así como A y V significarán el viajar en una u otra de las restantes líneas y N el no subir. Para expresar que viajar en el autobús rojo y luego en el azul equivale a un solo viaje en el verde, escribir AoR = V, interpretando el símbolo **o** como «después de». Realizadas las 16 operaciones posibles se escribe en una tabla de doble entrada, encontrando

o	N	R	A	V
N	N	R	A	V
R	R	N	V	A
A	A	V	N	R
V	V	A	R	N

Como se ve, estamos haciendo que el niño trate con una estructura de grupo conmutativo, en especial con el llamado grupo de Klein, que es el modo como se organizan las operaciones entre proposiciones en la Lógica y cuya forma quiere ver Piaget también en el modo como se relacionan las transformaciones mentales que el niño puede realizar a partir de los once-doce años.

La actividad puede derivar a observar la asociatividad, la existencia de elemento neutro y de un simétrico para cada uno, así como la conmutatividad por tratarse de un grupo con cuatro elementos. Puede también derivarse hacia la investigación de otros grupos isomorfos mediante situaciones parecidas, lo que llevará a poder extraer las condiciones que ha de reunir una tabla para llamarla de grupo.

Podemos también derivarla hacia la iniciación con los cálculos asociatitvos, lo que resulta en la práctica a los niños sumamente entretenido. Para ello comenzamos por hacer que sobre el dibujo se abrevien lo más posible viajes muy largos en los que intervengan muchos autobuses. Por ejemplo, se comprueba que el viaje ARRRVAVAVVRRVA se reduce al A solamente, y que el RAVVAVRAVRARAR se reduce al V; se buscan después reglas que nos permitan saber si dos largos viajes son equivalentes, para lo que se necesita observar las sustituciones posibles. Para ello elegimos dos líneas, por ejemplo A y V, encontrando que:

a) en toda palabra (que es el lenguaje del cálculo lógico, en éste casi fácilmente aceptado por los niños) se puede alterar el orden de letras a voluntad;

b) dos letras consecuetivas pueden sustituirse por una N;

c) dos N consecutivas pueden borrarse;

d) R puede sustituirse por AV.

Como se ve, conservamos el apoyo experimental, porque siempre puede recurrirse a traducir las letras por sus significados, pero la mayor parte de los niños convierten esto en un cálculo simbólico; además, son muchos los capaces de encontrar razonadamente la paridad que han de tener las letras en sus apariciones para que una larga palabra equivalga a otra preestablecida.

Quizá algún lector se pregunte que a qué viene hablar de grupos, de isomorfismos, de cálculos asociativos en la Escuela Primaria. Aunque se trata de auténticos valores de la Matemática, también los especialistas, es decir, lo que la gente llama matemáticos puros, suelen poner reparos iniciales cuando se habla de tratar en la Escuela Primaria cuestiones que consideran inaccesibles en todo su rigor al alumno de esa edad. Es muy cierto que en tales condiciones de rigor hay conceptos inalcanzables antes de los catorce años; pero cuanto más abstracta sea una idea más necesaria será una previa experimentación concreta sobre los elementos que la forman. Los estudios de psicopedagogia lo han probado muchas veces y las abundantes experiencias que existen por el mundo lo confirman. Los trabajos de Piaget, varias veces citados aquí, así como los de Fletcher, Dienes, Cuisenaire, Gategno, Picard, etc., reiteran una y otra vez lo mismo: el camino de acceso a la abstracción empieza mucho antes que el alumno llegue a la edad mental adecuada para alcanzarlo y exige pasar por etapas previas de concretizaciones que le familiaricen con los componentes de aquel concepto. De otro modo, la enseñanza pasa de un empirismo a rajatabla a una completa abstracción, en oposición completa al desarrollo de las estructuras y mecanismos mentales del alumno. Y luego buscamos frases vacías pretendiendo encerrar en ellas una dificultad intrínseca del alumno para no reconocer que ha sido el profesor y el sistema de estudio, desde la escuela maternal a la Universidad, quien la ha provocado. «Bloqueo afectivo», «shock mental», «pasividad intelectual», son tres ejemplos de lo que decimos.

5. LA ACTUACION DEL PROFESOR

Los razonamientos anteriores llevan a reconsiderar los modos de actuación del Maestro ante la clase que hasta ahora seguimos. El profesor viene siendo la persona de autoridad indiscutida que decide y da normas. Ha procurado reflejarse en el alumno y conseguir que éste razone según las directrices que le marca. El prototipo de este modo de actuar es el método heurístico (en el sentido de socrático) en el que el niño recorre un camino previamente acotado. En él se encadenan las observaciones y conclusiones según una estrategia mental deductiva que es precisamente la del profesor, y ésta no tiene por qué coincidir con la de todos los alumnos. En esta afirmación está implícito el reconocimiento de que, efectivamente, no existe un camino único para cada meta; sobre este punto otra vez los estudios de muchos psicólogos parecen concluyentes. Por este mismo motivo es dudoso que la enseñanza programada resulte eficaz en Matemáticas al salirse de la mera información, aunque en esa técnica queda todavía mucho por descubrir y perfeccionar.

Si se persigue que el alumno construya matemáticamente, lo habrá de hacer según su propia estrategia, y entonces la función del profesor será distinta de la tradicionalmente admitida. Deberá crear situaciones de trabajo personal o en pequeños grupos para que la construcción mental se realice por el camino que resulte óptimo para el alumno. Esto no es nada de fácil y exige una fuerte preparación tanto en Matemáticas como en los procedimientos didácticos. Una preparación fuerte en Matemáticas porque los caminos seguidos por el alumno le pueden ser inéditos y ha de poder comprender con rapidez todas sus consecuencias y derivaciones, ha de saber si ese ángulo de ataque que efectúa el alumno es inadecuado o, por el contrario, susceptible de explotarse para llegar aún más allá del objetivo inicial (3).

Por otra parte, como cada alumno trabaja a su propio ritmo, no todos llegan al mismo punto en el mismo tiempo, y resulta casi indispensable un cambio de impresiones en la clase, lo que plantea al Maestro dificultades para encontrar el junto punto de equilibrio entre lo que entendemos por disciplina y la libre exposición de ideas, entre el diálogo eficazmente espontáneo y el barullo ininteligible.

De todos modos, el maestro ha de abandonar en Matemáticas el método exclusivamente expositivo y dogmático apoyado fundamentalmente en el verbalismo. Los motivos que obligan a este abandono se han expuesto muchas veces y no es cuestión de repetirlos aquí, pero el nuevo modo de actuar no es de fácil acomodación, y para quedar en el punto justo es necesario estar convencido de que la exposición únicamente verbal no resulta eficaz.

6. NECESIDAD DE UNA PEDAGOGIA ESPAÑOLA DE LA MATEMATICA

Los métodos a que se ha hecho alusión pretenden que el niño, en la mayor medida en que pueda hacerlo aisladamente, sea quien investigue, quien construya y quien descubra. Queda mucho por aclarar y mucho por ensayar en este campo de la Didáctica matemática. Efectivamente, cada vez se ve más claro que la Pedagogía de la Matemática se va convirtiendo en una parcela independiente de la Didáctica General, o por lo menos en una parcela autónoma y en la que hay mucho por hacer.

A nuestro juicio, esta situación es una oportunidad que se ofrece para comenzar a crear una Pedagogia Matemática auténticamente española. En la actualidad y por lo que se refiere a la enseñanza hasta los catorce años, no la tenemos, y no ciertamente por falta de voluntad de los Profesores de Normal, todos los cuales, mediante un trabajo personal no siempre fácil, poseen completa información de los métodos actuales. Pero no basta con tener información completa de lo que se hace por el mundo porque la idiosincrasia de nuestros alumnos, las peculiaridades de nuestras escuelas, la orientación educativa general y hasta la organización administrativa de nuestro país nos son propias, como ocurre por otra parte en los demás.

Aquella información es necesaria, entre otras cosas, para no descubrir lo que ya sabe todo el mundo; pero con ello no se hace gran cosa, como no sea autoimponerse una dependencia intelectual inevitable. No se puede confundir la información con el descubrimiento, y para conseguir éste resulta imprescindible una previa experimentación con los niños, pues así como en Matemática pura no hay más prueba que la demostración, en Didáctica no hay más demostración que la prueba con los alumnos. Sin embargo, esta experimentación sistemática no puede hacerla el profesor de Normal porque la organización actual no se lo prohíbe, pero se lo impide.

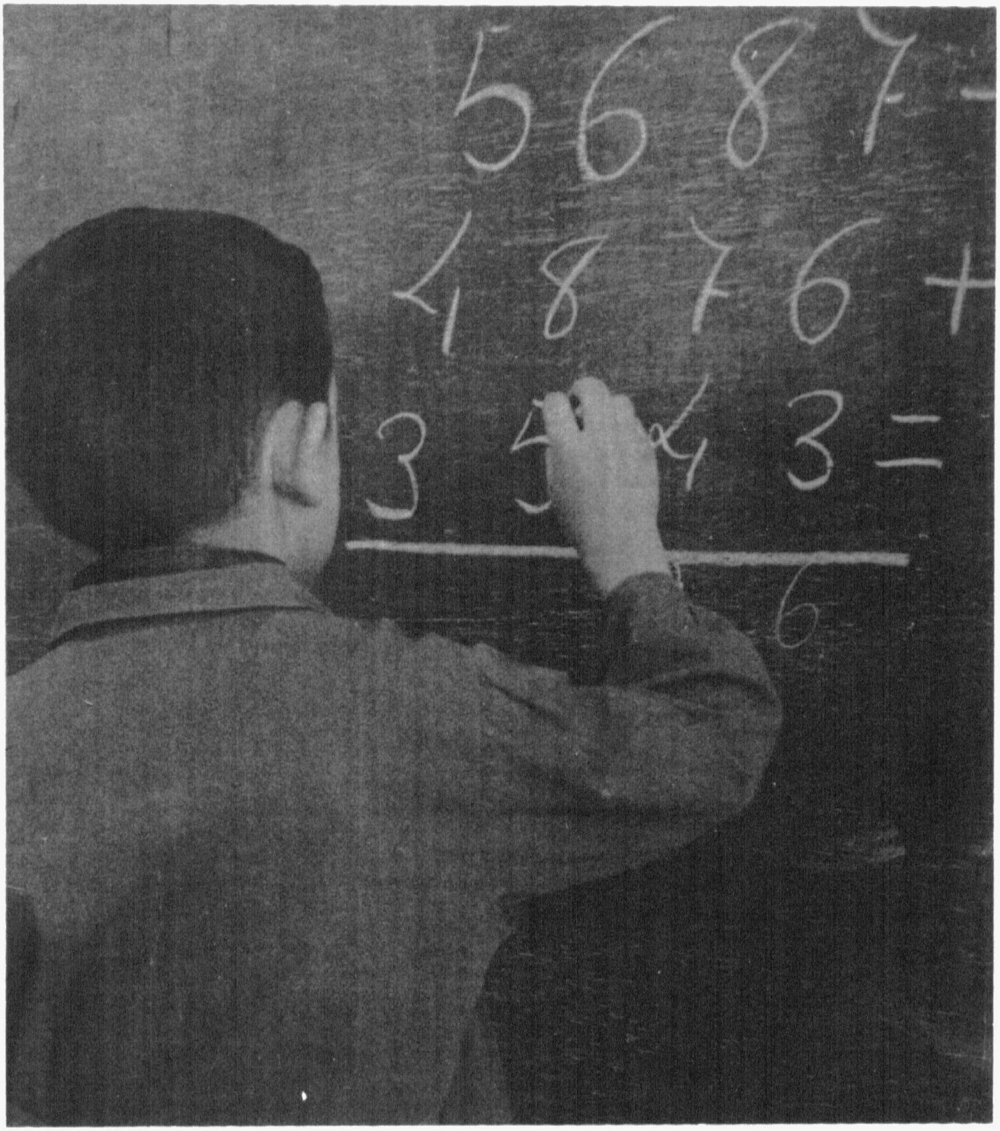
Por otro lado, una pedagogia nacional podrá

(3) Frente a esto, dos opiniones escritas en documentos que aún podemos leer: una, en la que se propone que los alumnos mayores se ocupen de los más pequeños para resolver el problema escolar, y otra, en la que se dice, sin más argumento, que un curso y medio de clase alterna es demasiado tiempo para dedicarlo a la didáctica de las Matemáticas.

caracterizarse por los modos de actuación de las escuelas genéricas, y si éstos han de cambiar tenemos una espléndida ocasión para que siquiera por una vez la orientación y las normas las den los especialistas, no los que tienen a gala desconocer las Matemáticas o los que tienen de ellas la referencia de un corto cursillo en algún lugar del extranjero, o la de unos breves apuntes de su Didáctica dictados por un profesor que no es de Matemáticas.

En realidad, lo necesario es crear condiciones de trabajo. Condiciones óptimas para la información del Magisterio (de todo el Magisterio), para la investigación de los especialistas (de todos los especialistas), para la formación de equipos de experimentadores (de todos cuantos deseen experimentar).

Cómo podría organizarse todo ello, cómo podría aspirarse a una Pedagogía Matemática netamente española, cómo podría conseguirse de nuestras escuelas un mayor rendimiento cae fuera de las intenciones de este trabajo.



Escuela unitaria de niños de Cueva de la Mora. ALMONASTER LA REAL (Huelva).