UNHA INTERFACE GRÁFICA PARA O DESCUBRIMENTO AUTOMÁTICO DE TEOREMAS EN XEOMETRÍA ELEMENTAL

*Francisco Botana Ferreiro**
Universidade de Vigo
*José Luis Valcarce Gómez***
Instituto Pontepedriña
Santiago de Compostela

Descríbese aquí un módulo engadido a un programa de xeometría dinámica capaz xa non de demostrar teoremas en Xeometría, senón de descubrilos. Este descubrimento faise dun xeito gráfico, o usuario ten que explorar unha situación xeométrica e observar que, nalgunha das posibles instanciacións do modelo, unha propiedade se fai verdadeira. Pregúntase entón qué e necesario para que tal propiedade sexa sempre verdade e o programa, en moitos casos, atopa as condicións necesarias para que isto ocorra.

1. INTRODUCCIÓN

A idea de despraza-los elementos dunha figura co gallo de ilustrar fenómenos xeométricos e comproba-la validez de conxecturas sobre ela, xa formulada por Clairault no século XVIII, foi a semente de distintos micromundos informáticos difundidos desde finais da década dos oitenta, entre os que cabe citar Cabri-Géomètre (Baulac, Bellemain e Laborde, 1994), The Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1995), Cinderella (Richter-Gebert e Kortenkamp, 1999), Calques (Bernat, 1996) ou REX (Valcarce e Botana, 1999a). En Botana (1998) pode verse unha descrición pormenorizada destes e outros programas englobados baixo o cualificativo de "xeometría dinámica".

Nas aulas de hoxe, en Secundaria, Bacharelato e Universidade, as táboas de logaritmos e a regra de cálculo desapareceron a favor da calculadora, dun xeito universal. Non se pode dici-lo mesmo da regra e compás: quizais estas ferramentas non se usen moito (polo menos, tanto como sería desexable), pero tampouco hai substitutos que acaden consenso. Os programas de xeometría dinámica serán, pensamos, ese substituto cando unha maior inversión ou a tecnoloxía os faga máis accesibles.

* Profesor Titular de Matemática Aplicada.

** Catedrático de Matemáticas.

Neste artigo centrámonos nun aspecto que conxuga o uso da xeometría dinámica, como un subproducto da xeometría computacional, cunha aplicación do cálculo simbólico á proba e descubrimento automáticos de teoremas. Na sección 2 revísase a capacidade de proba dalgúns programas de xeometría dinámica. Na sección 3 cítanse aproximacións deductivas e de xeometría alxébrica ó proceso de descubrimento automático de teoremas en xeometría elemental plana e ilústrase cun sinxelo exemplo a interface gráfica para o descubrimento. A sección 4 levanta a cortina e describe brevemente qué hai detrás da escena: un contorno integrado de xeometría dinámica e de cálculo simbólico capaz de descubrir novos teoremas cunha interface sinxela, que pode ser utilizada por calquera alumno desde o nivel superior de Educación Primaria.

2. DEMOSTRACIÓN AUTOMÁTICA DE TEOREMAS

A versión 2 de Cabri-Géomètre, difundida a partir de 1995 para Mac, Windows e na calculadora TI-92, realmente non ten implantado un demostrador automático de teoremas, senón unha opción de "comprobación de propiedades". Estas propiedades son a colinearidade, o paralelismo, a perpendicularidade, a equidistancia e a pertenza. Aínda que os autores non dan información sobre a teoría na que se basea o seu comprobador, cremos que utiliza os resultados de Davis (1977). Cabri comproba a posición actual dos obxectos, no canto de establece-la propiedade como un feito intrínseco da construcción. Así, se se constrúen dúas liñas horizontais e se lle pregunta ó comprobador se son paralelas, este responde afirmativamente.

CHYPRE (Bernat e Morinet-Lambert, 1996) é un módulo de proba semiautomática baseado en regras que pode traballar xunto con Calques. A súa base de feitos está formada por dez propiedades e dispón dunha base de feitos equivalentes e implicacións. Cando o usuario establece as hipóteses e a conxectura, o sistema crea, guiado por aquel, un grafo entre elas.

Cinderella usa unha técnica chamada "comprobación aleatoria de teoremas" (Kortemkamp, 1999). Dada unha construcción, o sistema xera unha conxectura sobre ela (Cinderella move entón a construcción a moitas posicións distintas) e a conxectura é comprobada en cada unha delas. Se é verdadeira para cada unha desas posicións e estas son bastantes, a conxectura declárase un teorema.

Durante a década dos oitenta desenvolvéronse dous métodos alxébricos para a proba automática: o método de Wu (Wu, 1994; Chou, 1987) e o método da base de Groebner (Buchberger, 1985). Ámbolos dous están baseados en coordenadas. O primeiro traduce as condicións xeométricas a ecuacións polinómicas, que trata polo método do conxunto característico (Ritt, 1950), mentres que o segundo substitúe este ultimo polas bases de

Groebner. Un programa de xeometría dinámica que utiliza o método de Wu é REX (Valcarce e Botana, 1999a, b). GEX (Chou *et al.*, 1996), aínda que non encaixa completamente no paradigma da xeometría dinámica, é unha interesante interface gráfica para a proba automática que implanta os métodos de Wu e de Groebner, ademais doutros como o da área e o do punto fixo.

3. DESCUBRIMENTO AUTOMÁTICO DE TEOREMAS

O método do punto fixo de GEX é unha aproximación desde a intelixencia artificial á demostración automática de teoremas. O programa razoa desde as hipóteses ata a conclusión para atopa-las propiedades dunha construcción que poden ser deducidas a partir dun conxunto de regras e axiomas. Ós feitos iniciais aplícanselle-las regras e os axiomas, e obtense un novo conxunto de feitos que se une ás hipóteses. Este proceso repetirase ata que un novo conxunto de feitos sexa baleiro. En tal caso, chégase a un punto fixo e tódolos feitos derivados son deduccións da construcción. Ademais, para cada un deles tense unha proba sintética. Posto que a condición de parada do proceso é a obtención dun punto fixo ou, noutros termos, o obxectivo da busca non está precisado de antemán, este método permite non só probar teoremas senón tamén descubrilos.

Unha aproximación semellante á proba automática xa foi descrita en Nevins (1975), onde a condición de parada era a comprobación por parte do usuario da coincidencia entre o feito deducido polo programa e o obxectivo prefixado, desbotando así a posibilidade de descubrimento.

O problema de seguir adiante con este razoamento en bases de feitos deductivas é a xeración dun gran número de feitos irrelevantes ou inútiles, se se pensa nunha utilización didáctica do programa. ¿Cantos alumnos considerarían significativa a afirmación da concorrencia das alturas dun triángulo entre varios centos doutras afirmacións? Necesitaríase dun heurístico que medise a significación de cada feito deducido en cada situación de aprendizaxe, tarefa que, polo de agora, non parece moi doada.

As aproximacións alxébricas á proba automática de teoremas, os métodos de Wu e de Groebner, pódense utilizar tamén para o descubrimento automático daqueles. Mediante o desenvolvemento dun método de Kapur (1986) baseado no cálculo das bases de Groebner, Recio e Vélez (1999) estudian propiedades xeométricas arbitrarias (é dicir, propiedades non deducidas dunha construcción) co obxectivo de atopar hipóteses complementarias que fagan verdade as primeiras. Unha técnica semellante que utiliza o método de Wu para o descubrimento e proba de propiedades relativas a lugares xeométricos pode verse en Chou (1984) ou en Roanes Macías e Roanes Lozano (1999).

Posto que o interese primordial deste foro é didáctico non entraremos en sutilezas técnicas acerca do método de Recio e Vélez (*op. cit.*), que é o escollido na nosa proposta. Para maior abundamento da información exposta nos seguintes parágrafos, remitímolo lector interesado a un interesante libro: Recio (1998), de onde sacámo-lo seguinte exemplo ilustrador:

Constrúase, cun programa de xeometría dinámica, un triángulo ABC, a circunferencia circunscrita de centro O e a medida do ángulo ACB.

Se a construcción se fai con REX, a pantalla amosará algo semellante á figura 1. Se agora escollemos un dos vértices do triángulo e o arrastramos é doado nota-la circunstancia de que, cando o ángulo medido é 90°, o punto O se atopa aliñado con A e B (Figura 2).

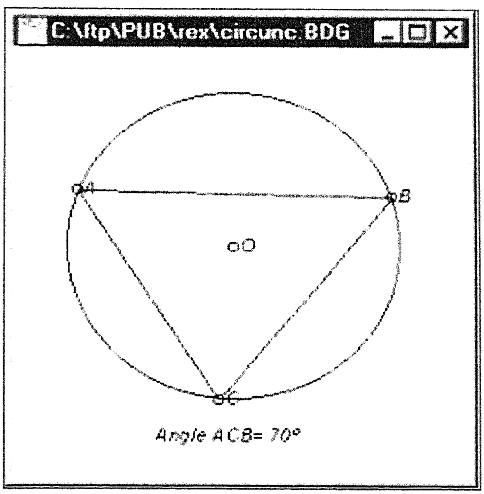

Figura 1. Un triángulo, o circuncírculo de centro O e o ángulo ACB.

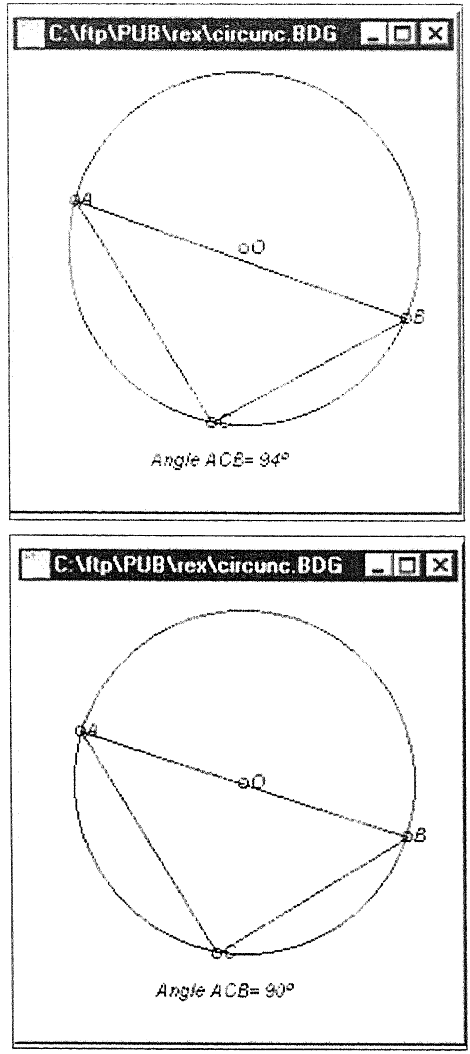

Figura 2. Dúas instanciacións da construcción da figura 1.

¿É esta coincidencia (a aliñación dos puntos A, B e O e a rectitude do ángulo ACB) puramente casual? Ou, noutros termos, ¿que é necesario para que na construcción teñámo-lo aliñamento de A, B e O? Utilizando o módulo de descubrimento de REX impoñémo-la condición de aliñamento dos puntos A, B e O (Figura 3).

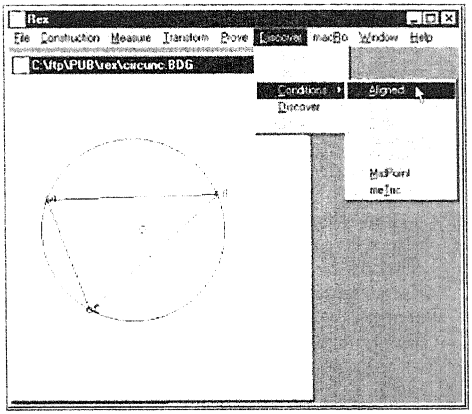

Figura 3. Para que o circuncentro estea no lado AB ...

Despois seleccionámo-la opción Discover. Aparece entón a ventá da figura 4, na que se mostran os puntos e as propiedades da construcción, así como as condicións impostas. Nótese que os puntos teñen asignadas coordenadas coa convención de que unha coordenada da forma U_n é libre (pode tomar calquera valor) mentres que unha *X[m]* ten un valor que depende das libres. Ademais, aparecen puntos non amosados nas figuras. Estes puntos foron utilizados para a construcción do circuncentro e posteriormente ocultados para facilita-la percepción. As catro propiedades da construcción, xunto cos puntos con, polo menos, unha coordenada libre, determínana completamente.

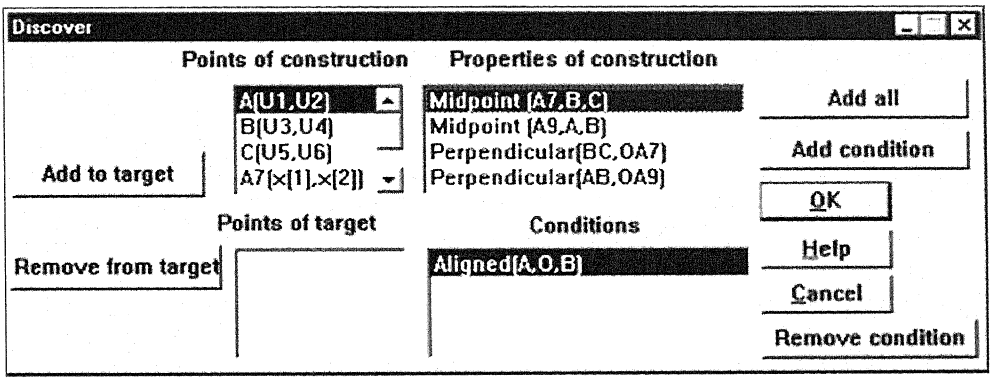

Figura 4. O cadro de diálogo para o descubrimento.

Se lle engadimos ó obxectivo os puntos A, B e C (os únicos que teñen algunha coordenada libre), as propiedades da construcción e aceptamos, REX executa un programa de cálculo simbólico (no prototipo desenvolvido é

Mathematica [Wolfram, 1996]) dun xeito transparente para o usuario. Logo duns segundos aparece un cadro que dá conta do feito descuberto (Figura 5).

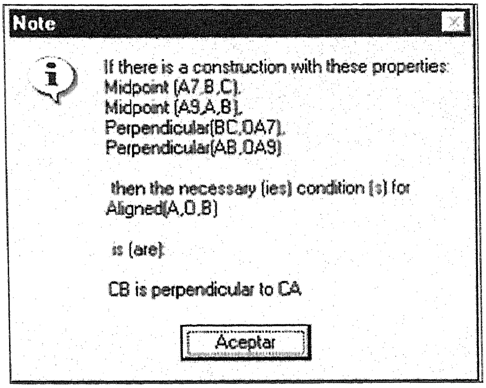

Figura 5. ... é necesario que os lados CB e CA sexan perpendiculares.

4. UN CONTORNO INTEGRADO DE XEOMETRÍA DINÁMICA E CÁLCULO SIMBÓLICO

En Recio (1998, 70) poden lerse algunhas reflexións sobre a didáctica do método de descubrimento automático. A cita, aínda que extensa, resulta ó noso xuízo totalmente pertinente:

> Muchos de los argumentos empleados [...] superan las posibilidades matemáticas de los alumnos de secundaria: están dirigidos al profesor o al matemático formado. Uno de los requisitos para que esta técnica tenga cierta repercusión escolar en el futuro es la automatización de varios pasos intermedios. Por ejemplo, la obtención automática de las ecuaciones analíticas de las hipótesis y de las tesis conjeturales, de modo que el ordenador desarrolle, sin intervención humana, las ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos de coordenadas dadas, [...], a través de una interfaz gráfica. Esto no es difícil, y ya ha sido elaborado, de modo más o menos experimental, por varios investigadores. Aún mejor sería que tal interfaz tuviese otras buenas cualidades para la exploración geométrica, como las del programa, tantas veces mencionado, Cabri-Géomètre. Más compleja se presenta la conversión de los resultados analíticos en términos de significado geométrico [...]. Finalmente, la simplificación fundamental vendría de la mano del establecimiento de una Comunicación entre el programa gráfico y el programa (o programas) de Cálculo Simbólico que vaya a ser empleado en el proceso de descubrimiento automático. Esto significaría, por ejemplo, que el alumno sólo precisaría describir la construcción geométrica, las hipótesis y la tesis, a nivel gráfico, con un ratón sobre la pantalla del ordenador. Tal información sería remitida internamente al programa de Cálculo Simbólico, que procedería —sin involucrar al usuario en conceptos de Álgebra Conmutativa— a eliminar las variables pertinentes (del mismo modo que Cabri "sabe" cuáles son los objetos de base y cuáles los construidos) y a obtener un resultado que sería interpretable con la ayuda, de nuevo, de la interfaz gráfica (descubriendo condiciones degeneradas, por ejemplo). Ya existen hoy calculadoras de bolsillo que incluyen programas geométricos y simbólicos... ¡sólo falta que, mañana, se relacionen entre sí!

As propostas mencionadas no parágrafo anterior están implantadas na versión 2 de REX, coa excepción das calculadoras de peto.

REX é un programa para facer xeometría nunha computadora. É unha interface gráfica de usuario para debuxar figuras bidimensionais baixo restriccións xeométricas. Os obxectos iniciais dunha construcción son puntos. Os obxectos restantes, algúns dos cales son descritos na gramática da táboa 1, son construídos a partir de puntos.

Táboa 1. Algúns obxectos de REX

obxecto ::= *punto* | *liña* | *círculo* | Locus | Reference
punto ::= FreePoint | MidPoint | IntersectionPoint | PointOnObject
liña ::= Segment | Line | Parallel | Perpendicular | Bisector
círculo ::= CircleByCenterPoint | CircleByCenterRadius

Tódolos obxectos, coa excepción de FreePoint, teñen un ou máis pais. A Táboa 2 describe esta relación para os obxectos mencionados.

Táboa 2. Pais dos obxectos

Obxecto	**Pais**
Segment, Line, CircleByCenterPoint, Reference	(*punto, punto*)
Parallel, Perpendicular	(*punto, liña*)
MidPoint	Segment
IntersectionPoint	(*liña* | *círculo, liña* | *liña*)
PointOnObject	*liña* | *círculo*
Bisector	(*punto, punto, punto*)
CircleByCenterRadius	(*punto*, Segment)
Locus	(*punto*, PointOnObject)

Os obxectos, as súas propiedades e relacións decláranse nunha base de feitos de Prolog: a lista da construcción. Así, unha figura é un conxunto de definicións de obxectos, e este ten a estructura

obxecto(#, tipo (#1, #2, ...), oculto?, etiqueta, mostrar_etiqueta?, seleccionado?)

onde # é o número do obxecto na lista, *tipo* é un elemento terminal da gramática da Táboa 1, #*n* fai referencia a un dos pais do obxecto ou dúas coordenadas se o punto é FreePoint, *etiqueta* é o nome do obxecto, e as tres variables binarias restantes son autoexplicativas. Así, a lista da construcción da figura 1 está formada por quince obxectos. Esta lista pode verse, desde o sistema operativo, no arquivo onde se garde a construcción, ou, desde REX, co mecanismo que amosa o histórico (Figura 6).

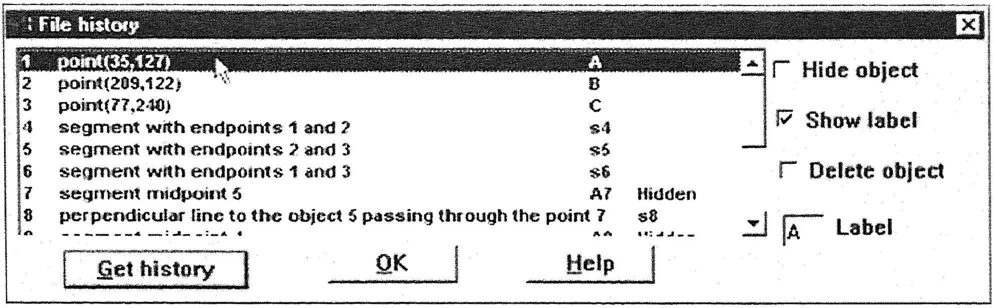

Figura 6. Histórico da construcción dun triángulo e o circuncírculo.

A partir da lista da construcción REX "sabe" da existencia de seis puntos (os tres vértices do triángulo A, B, C, os puntos medios —ocultos polo usuario na construcción— dos lados BC e AB, A7 e A9, respectivamente, e o circuncentro O), e das catro relacións xeométricas entre eles. Esta información é mostrada tamén no cadro de diálogo de descubrimento (Figura 4), ademais da condición imposta (o aliñamento dos puntos A, B e O).

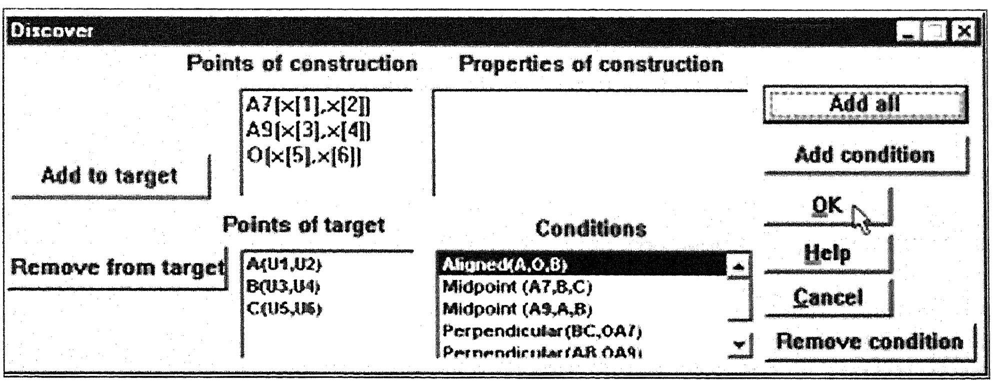

Figura 7. Argumentos para o descubrimento.

Táboa 3. Ecuacións analíticas das condicións xeométricas

(x[6]-U2)*(U3-x[5])-(U4-x[6])*(x[5]-U1)=0
(x[1]-(U3+U5)/2)==0,(x[2]-(U4+U6)/2)=0
(x[3]-(U1+U3)/2)==0,(x[4]-(U2+U4)/2)=0
(U6-U4)*(x[6]-x[2])+(U5-U3)*(x[5]-x[1])=0
(U4-U2)*(x[6]-x[4])+(U3-U1)*(x[5]-x[3])=0

Ó inicia-lo proceso de descubrimento (Figura 7), REX escribe as ecuacións analíticas das cinco condicións (Táboa 3) e pásaas ó núcleo de Mathematica, onde se fai un proceso de eliminación das variables x nas ecuacións anteriores, posto que as variables U son as dos vértices do triángulo, únicos datos independentes do problema. O resultado da eliminación, neste caso unha única longa ecuación,

```
(-(U1^2*U2) - U2^3 + 2*U1*U2*U3 - U2*U3^2 - U1^2*U4 + U2^2*U4 + 2*U1*U3*U4
- U3^2*U4 + U2*U4^2 - U4^3)*U6 +

U1^2 + U2^2 - 2*U1*U3 + U3^2 - 2*U2*U4 + U4^2)*U6^2

-(U1^3*U3) - U1*U2^2*U3 + 2*U1^2*U3^2 - U1*U3^3 - U1^2*U2*U4 - U2^3*U4 +
4*U1*U2*U3*U4 - U2*U3^2*U4 + 2*U2^2*U4^2 - U1*U3*U4^2 - U2*U4^3 +
U1^3*U5 +

U1*U2^2*U5 - U1^2*U3*U5 + U2^2*U3*U5 - U1*U3^2*U5 + U3^3*U5 -
2*U1*U2*U4*U5 - 2*U2*U3*U4*U5 + U1*U4^2*U5 + U3*U4^2*U5 - U1^2*U5^2 -
U2^2*U5^2 + 2*U1*U3*U5^2 - U3^2*U5^2 + 2*U2*U4*U5^2 - U4^2*U5^2 = 0
```

é factorizado e simplificado, entre outras operacións, para finalmente ser casado cunha base de datos de equivalencias entre ecuacións polinómicas e enunciados na linguaxe natural sobre propiedades xeométricas relativas á construcción, que devolve aquí a perpendicularidade entre os lados CB e CA.

CONCLUSIÓN

Descríbese un prototipo experimental de programa de computadora que combina un contorno de xeometría dinámica coa funcionalidade dun programa de cálculo simbólico para o descubrimento automático de teoremas elementais da xeometría plana, enunciados na linguaxe natural. Aínda que incompleto (¡trátase dun descubrimento!), os resultados preliminares suxiren que a súa capacidade abonda para utilizalo na docencia e pode ser empregado tamén para a investigación (quizais redescubrindo vellos teoremas xa esquecidos).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baulac, Y., F. Bellemain e J. M. Laborde (1994): *Cabri II*, Dallas, Texas Instruments.

Bernat, P. (1996): "Using dynamic geometry environments for problem solving", *Actas do VIII Congreso Internacional de Educación Matemática*, Sevilla.

Bernat, P., e J. Morinet-Lambert (1996): "A new way for visual reasoning in geometry education", *Lecture Notes in Computer Science*, 1086, 448-456.

Botana, F. (1998): "Novos recursos para o ensino das Matemáticas: xeometría dinámica", *Revista Galega do Ensino*, 18, 171-183.

Buchberger, B. (1985): "Groebner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory", en N. K. Bose, *Multidimensional systems theory*, Dordrecht, Reidel.

Chou, S. C. (1984): "Proving elementary geometry theorems using Wu's algorithm", en W. W. Bledsoe e D. W. Loveland, *Automated thoerem proving: After 25 years*, AMS, Providence.

Chou, S. C. (1987): *Mechanical geometry theorem proving*, Dordrecht, Reidel.

Chou, S. C., X. S. Gao e J. Z. Zhang (1996): "An introduction to Geometry Expert", *Proc. CADE'96*.

Davis, Ph. (1977): "Proof, completeness, transcendentals and sampling", *Journal of the Association for Computing Machinery*, 24(2), 298-310.

Jackiw, N. R. (1995): *The Geometer's Sketchpad, v3.0*, Berkeley, CA, Key Curriculum Press.

Kapur, D. (1986): "Using Groebner bases to reason about geometry problems", *Journal of Symbolic Computation*, 2, 399-408.

Kortenkamp, U. (1999): *Foundations of dynamic geometry*, Tese de Doutoramento, ETZH, Zurich.

Nevins, A. J. (1975): "Plane geometry theorem proving using forward chaining", *Artificial Intelligence*, 6, 1-23.

Recio, T. (1998): *Cálculo simbólico y geométrico*, Madrid, Síntesis.

Recio, T., e M. P. Vélez (1999): "Automatic discovery of theorems in elementary geometry", *Journal of Automated Reasoning*, 23, 63-82.

Richter-Gebert, J., e U. Kortenkamp (1999): *The interactive geometry software Cinderella*, Berlín, Springer.

Ritt, R. F. (1950): *Differential algebra*, New York, AMS Colloquium Publications.

Roanes Macías, E., e E. Roanes Lozano (1999): "Búsqueda automática de lugares geométricos", *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas-Congreso IMACS-ACA'99*, 53, 67-77.

Valcarce, J. L., e F. Botana (1999a): "REX: un recurso para el estudio de la geometría", *Actas das IX Xornadas para a Aprendizaxe e o Ensino das Matemáticas*, Lugo.

___(1999b): "Developing a dynamic geometry environment with Prolog", Informe Técnico.

Wolfram, S. (1996): *The Mathematica book*, Cambridge, Cambridge University Press

Wu, W. T. (1994): *Mechanical Theorem Proving in Geometries*, Viena, Springer.