XEOMETRÍA DE SEMPRE NO INICIO DUN NOVO MILENIO

*Luis Cachafeiro Chamosa**
Instituto Pontepedriña
Santiago de Compostela

Os cambios da sociedade de fin de milenio afectan á forma de vivir, de consumir e de situarnos neste mundo, así mesmo levan implícitos cambios nos usos e nas crenzas sociais. Con todo, resulta necesario conservar boa parte das referencias ó mundo anterior —social, cultural ou filosófico—, pois de non ser así atopariámonos perdidos, sen obxectivos nin experiencias coas que interpreta-los fenómenos actuais e iriamos camiño dunha catástrofe cultural e humana de consecuencias imprevisibles. Estes cambios modifican igualmente as necesidades matemáticas da sociedade e, en consecuencia, da súa vertente educativa. Isto vese claramente na existencia e o uso que se lles dá ás calculadoras que, por facer máis doadas algunhas actividades matemáticas, van modifica-la utilidade dalgúns contidos e procedementos matemáticos que pasan a perder interese social. Pese a isto, tamén cómpre conservar moitos elementos tradicionais, tanto pola súa faceta práctica coma pola súa importancia cultural.

Cremos que na Xeometría se atopan boa parte deses elementos que se deben manter. Logo do auxe das Matemáticas modernas caracterizado pola famosa consigna de Diedonné, "¡Abaixo Euclides!", hoxe estamos lonxe desa época na que eran a materia principal do currículo educativo e vemos como a Xeometría sintética mostra unha enorme utilidade —dentro das Matemáticas ou fóra delas— axudándonos á transmisión de ideas, conceptos e análise dos obxectos do mundo real (así como do outro mundo virtual, pero tamén real, que é o do ordenador).

Neste artigo pretendemos mostrar elementos matemáticos que resultan de interese, non só pola súa conexión cos coñecementos matemáticos tradicionais senón tamén pola relación directa con outros eidos do saber. Xustamente, este obxectivo é un dos aspectos que as entidades organizadoras do Ano Mundial das Matemáticas queren destacar e facer chegar a todo o público.

* Catedrático de Matemáticas.

POLIEDROS REGULARES

As formas xeométricas son un dos elementos que, de xeito máis suxestivo, mostran a conexión das Matemáticas coa sociedade, coa cultura e coas outras materias educativas. Unha das razóns atópase no actual uso masivo de formas e materiais de todo tipo na produción e consumo de productos, incluíndo a publicidade e as manifestacións culturais. As propiedades desas formas e a súa propia existencia derívanse de moitos resultados matemáticos (por exemplo, non podemos facer un poliedro regular de dez caras). Amais, apareceron novas formas e figuras que se poden estudiar de xeito matemático, coma os "fractais". Os desenvolvementos de figuras por ordenador baséanse en algoritmos e polo tanto son, no seu interior, resultado de operacións lóxicas e alxebraicas.

É ben coñecido que, entre os poliedros que se poden construír no noso mundo tridimensional, só existen cinco regulares, chamados "sólidos platónicos", nome que se lles deu pola súa propia perfección intrínseca. Un poliedro será regular cando se verifique que:

— Tódalas arestas teñen a mesma lonxitude.

— Tódalas caras teñen o mesmo número de arestas.

— En tódolos vértices concorre o mesmo número de arestas.

Podíase pensar que a terceira condición é consecuencia das anteriores pero non é así, como podemos ver se pegamos por unha cara dous tetraedros regulares da mesma medida, a nova figura contén seis caras formadas por triángulos equiláteros iguais, pero en dous dos vértices saen tres arestas e nos outros tres saen catro.

Tampouco a segunda é consecuencia da primeira e a terceira, xa que mediante cortes axeitados do cubo se converte nun cuboactaedro (figura 1), no que as caras están formadas por triángulos equiláteros e mais por cadrados.

A estes dous exemplos de poliedros formados por polígonos regulares de igual lado chámaselles "poliedros semirregulares arquimediáns".

Dos cinco sólidos platónicos: *tetraedro*, *hexaedro*, *octaedro*, *dodecaedro* e *icosaedro*, tres deles teñen as caras for-

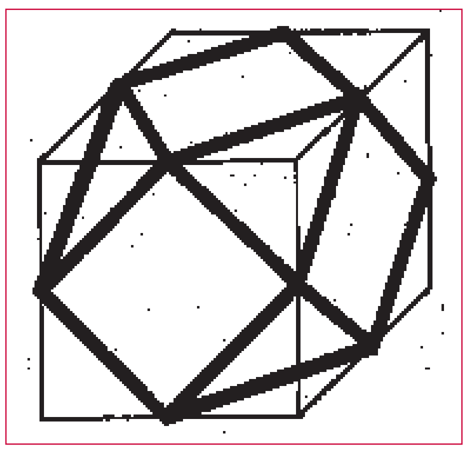

Figura 1. Cuboctaedro obtido a partir do cubo.

madas por triángulos, outro por cadrados e outro por pentágonos. ¿Por que non poden estar formadas as caras por outros polígonos, por exemplo hexágonos? Non é moi difícil conseguir que algún alumno ou alumna dea unha resposta atinada a esa pregunta, que posiblemente sirva para que deduzan que non pode haber máis ca eses cinco poliedros regulares.

Dado que as caras dos poliedros regulares son só triángulos, cadrados e pentágonos, podemos analiza-las diferencias entre eles. Observamos que o pentágono é notablemente máis complexo cós outros dous e así, se lles pedimos ós nosos alumnos que tracen e describan un método de construcción deses polígonos regulares, seguramente atoparemos solucións para o triángulo e o cadrado pero dificilmente para o pentágono. É doado, para un alumno de ESO, realiza-las construccións do triángulo e do cadrado coa regra e o compás, pero resulta practicamente imposible que poida deducir algunha para o pentágono. Outra diferencia notable atopámola na proxección ortogonal dos vértices sobre un lado, que proporciona valores irracionais no pentágono, o que non sucede co triángulo equilátero nin co cadrado (figura 2).

Moitos dos alumnos de ESO tamén precisarán axuda para calcula-los ángulos dun pentágono, axuda que pode consistir na división do pentágono en triángulos, trazando as alturas e calculando os ángulos destes triángulos como paso intermedio antes de obte-lo valor do ángulo interior do

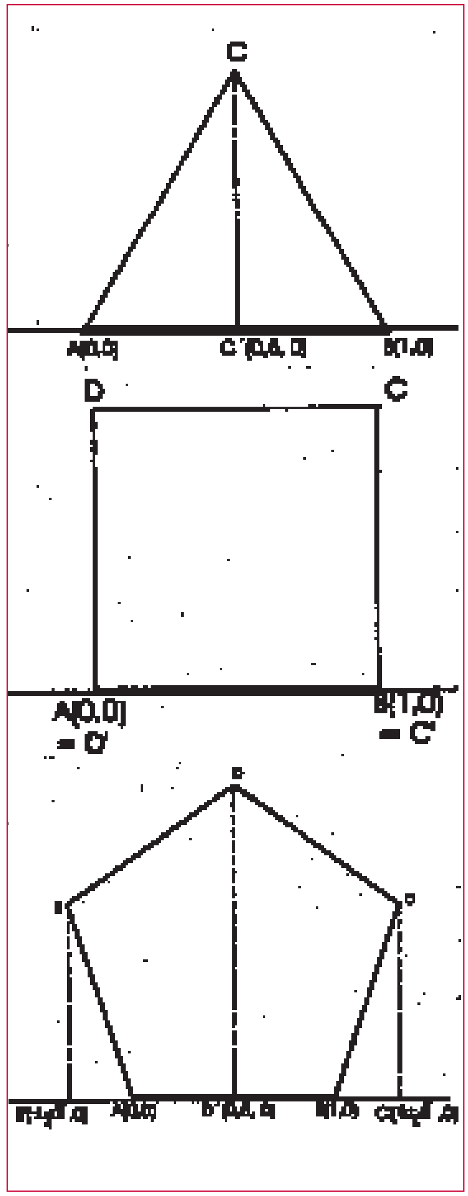

Figura 2. Polígonos que forman os poliedros regulares e as respectivas proxeccións dos vértices sobre a base.

pentágono regular. Deste xeito, unha deducción do valor do ángulo do pentágono será a seguinte:

$$\frac{360^{o}}{10} = 36^{o};\ 90^{o} - 36^{o} = 58^{o};\ 2 \cdot 58^{o} = 108^{o}$$

Outro exercicio que se pode realizar na aula é o de calcula-lo valor do apotema e a área do pentágono regular de lado a unidade. O valor do apotema pode obterse, ben mediante unha representación a escala —o que proporciona un valor aproximado—, ben por trigonometría, deste xeito conséguese outro tipo de aproximación.

No pentágono danse algunhas outras peculiaridades xa coñecidas en boa medida polos xeómetras gregos.

Trazando as diagonais dun pentágono aparecen triángulos isósceles. Algúns agudos, coma o AFG na figura 3, outros obtusos, coma o AFE, e un pentágono regular no interior FGHIJ. O triángulos AFE e AEB son semellantes e, como consecuencia desta propiedade, o pentágono FGHIJ é regular.

A razón de semellanza entre os triángulos AFE e AEB resulta ser un número que se considerou como base das formas perfectas: o número áureo $\phi = 1{,}6180339...$

Considerémo-lo pentágono regular ABCDE de lado a unidade (figura 2). Como consecuencia da semellanza dos triángulos AFE e AEB verifícase a igualdade $\frac{EF}{AE} = \frac{AE}{EB}$ e tamén $\frac{EB\text{-}1}{1} = \frac{1}{EB}$

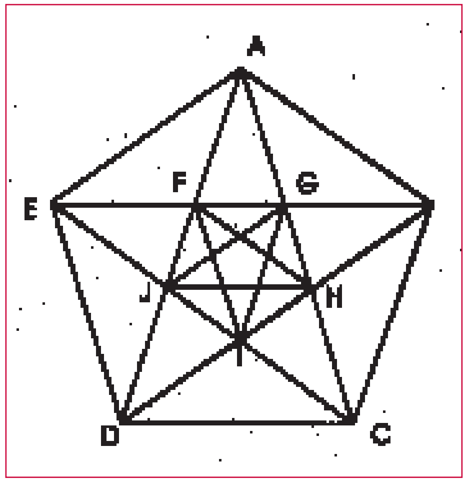

Figura 3. Pentágono regular e proceso de división por trazado das diagonais.

dado que FB=AE=DC=1. En consecuencia EB verifica a ecuación EB^2 -EB -1= 0 que ten de solución positiva $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, número coñecido tamén como número áureo. Así mesmo, aparece como o cociente entre o radio da circunferencia circunscrita ó decágono regular e o lado deste.

O NÚMERO ÁUREO

— Este número expresa a relación máis sinxela que se pode establecer dividindo un segmento en dúas partes a e b: a parte menor é á maior como esta é ó total das dúas.

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

— Para os pitagóricos esta proporción tiña propiedades máxicas. Unha delas é que se reproduce de xeito constante se construímos unha secuencia substituíndo a menor pola suma das dúas: a e a+b ; a+b e 2a+b; 2a+b e 3a+2b... Por simetría, tamén están en proporción áurea os pares a e b; b e a-b; a-b e 2b-a; 2b-a e 2a-3b... que se obteñen substituíndo a maior pola diferencia das dúas.

— As potencias do número áureo forman unha curiosa secuencia na que un termo é exactamente igual á suma dos dous anteriores:

$$\frac{1}{\phi^2}\ ;\ \frac{1}{\phi}\ ;\ 1\ ;\ \phi\ ;\ \phi^{\,2} ;\ \phi^{\,3}$$

$$\phi^3 = \phi^{\,2} + \phi\ ;\ \phi^2 = \phi + 1\ ;\ \phi = 1 + \frac{1}{\phi}\ ;\ \ldots$$

— A secuencia anterior é unha progresión xeométrica que á vez ten propiedades aritméticas. O matemático italiano do século XIII, Nicolás de Pisa (Fibonacci), empregou por primeira vez secuencias de números coa propiedade de que un deles se obtén dos anteriores sumando os dous que o preceden, propiedade que acabamos de ver que teñen as potencias de ϕ. Á sucesión con esta propiedade na que os dous primeiros números son 1 —isto é, a serie 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...— coñécese como "sucesión de Fibonacci" e aproxímase moi rapidamente a ϕ. Por exemplo ϕ - 8/5 = 0,010... ; ϕ -21/13 = 0,00264...

— Os rectángulos nos que a razón entre o lado maior e o menor é o número áureo coñécense como "rectángulos áureos". Este foi considerado o modelo de rectángulo máis perfecto e equilibrado. As tarxetas de crédito, os rectángulos nos que se realizan moitos cadros pictóricos, etc., son aproximacións a rectángulos áureos. No Partenón aparece claramente o número áureo (figura 8).

— O número áureo é o único número positivo que difire unha unidade do seu inverso e, polo tanto, ten as mesmas cifras decimais ca el. Isto pódese enunciar como un problema para resolver na aula (e.g. adiviña-los números que difiren do inverso nunha unidade —resposta: en varias unidades— o que proporciona a ecuación x^2 -x - 1 = 0, de solucións ϕ e -1/ϕ (resp. x^2 -nx - 1 = 0).

— Cando a un rectángulo áureo se lle engade un cadrado, o novo rectángulo tamén é áureo. O mesmo sucede se se lle subtrae un cadrado, como observamos na figura 5.

— Como resultado destas propiedades, o número áureo fainos lembra-los procesos de xeración de figuras que se poden repetir infinitamente conservando as proporcións e as formas. Neste sentido, para os artistas e sabios do Renacemento, incluíndo a Leonardo da Vinci e Johannes Kepler, o número áureo é a máxima representación da harmonía, do equilibrio na desigualdade. Para os templarios era un dos símbolos máxicos que encerraba en si os misterios das proporcións perfectas. Non é de estrañar que outro dos seus símbolos fose a estrela de cinco puntas ou estrela de Salomón, símbolo que apareceu en practicamente tódalas sociedades secretas, incluídas as loxas masónicas.

— Para C. Boyer os matemáticos gregos posiblemente descubriron a irracionalidade do número áureo antes cá de $\sqrt{2}$ argumentando o exceso sobrante ó medi-lo lado do pentágono FGHIJ da figura 3, exceso que se continúa indefinidamente de se repetir indefinidamente o trazado de pentágonos inscritos.

Vimos que a diagonal do pentágono regular é o número áureo multiplicado polo lado. Na deducción do valor de EB (figura 3) notamos que esta diagonal aparece dividida en tres partes: EF, FG e GB de medidas $1/\phi$; $1/\phi^2$ e $1/\phi$ respectivamente. De aí resultan os valores da proxección dos vértices C e D da figura 2. As dúas primeiras partes (EF+FG) dan a unidade ($1/\phi + 1/\phi^2 = 1$) e os tres, o número áureo ($1/\phi + 1/\phi^2 + 1/\phi = \phi$). En consecuencia, o pentágono inscrito ten de medida $1/\phi^2$ e trazando as sucesivas diagonais dos novos pentágonos xorde unha progresión xeométrica de razón $1/\phi^2$ (figura 3).

No dodecaedro podemos observar esta sucesión de pentágonos en cada cara. Se trazámo-las diagonais das caras que son adxacentes a un mesmo pentágono obtemos un novo pentágono no que os lados son esas mesmas

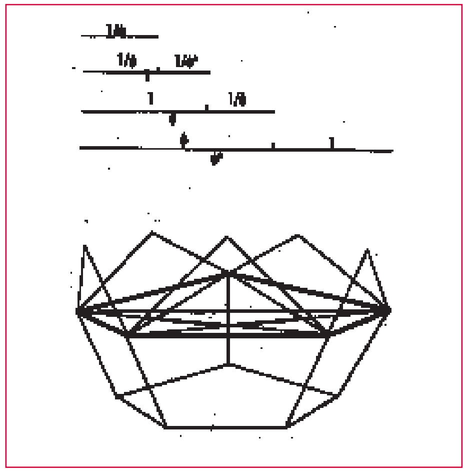

Figura 4. As diagonais do dodecaedro son lados dun pentágono regular.

diagonais (de lado ϕ, como vimos cando a aresta é a unidade). En consecuencia, as súas diagonais estarán divididas en tres segmentos de medidas 1; $1/\phi$ e 1 e, en total, a medida desta diagonal é ϕ^2 (figura 4).

Na natureza non aparece o pentágono nas redes cristalinas pero si hai, en cambio, triángulos, cuadriláteros e hexágonos. A razón deste feito atopámola na coñecida como "lei dos índices", directamente vinculada, no caso do pentágono, á irracionalidade dos valores das proxeccións de E e C (na figura 2), e polo tanto á do número áureo.

NÚMERO ÁUREO, FORMAS E CONSTRUCCIÓNS

Tense suxerido que a razón do éxito do rectángulo áureo, por exemplo na pintura, se debe a que o ollo, ó compara-la espesura da pequena tira coa grande, recorta mentalmente nesta última unha espesura igual á da pequena e obtén —cando os intervalos verticais se atopan na razón ϕ— un resto que obedece á mesma proporción, e de aí a impresión de repouso, constancia, seguridade, nun ritmo indefinidamente continuo (figura 7). Moitos cadros corresponden a rectángulos áureos e non é difícil atopar paisaxes nas que a liña do horizonte divide o cadro na proporción áurea. Os rectángulos de razón entre os lados próxima a $\sqrt{\phi}$ foron amplamente escollidos para realizar pinturas trazadas de xeito vertical, isto é, máis altas ca anchas (figura 6).

A sección ou proporción áurea, "divina proporción" como tamén é coñecida, é un caso particular da regra xeral da harmonía das formas que conservan a mesma proporción nos detalles ca no conxunto.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{CD} = \phi$$

A diferencia do que sucede nas formas minerais, o pentágono regular atópase cunha incrible abundancia nas formas vivas. Moitísimas flores teñen forma pentagonal (caravel, xeranio, prímula, a flor da maceira, a da fresa, etc.) e no caso da pasiflora atopamos combinadas a forma pentagonal e decagonal. No reino animal gran cantidade de seres teñen forma pentagonal (estrela de mar, medusas, etc.). O ourizo de mar, ou lanterna de Aristóteles, recibe este nome do filósofo grego que

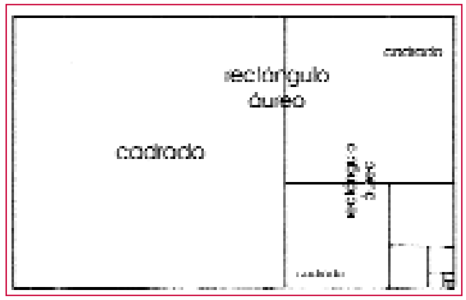

Figura 5. Rectángulo áureo e xeración de novos rectángulos áureos.

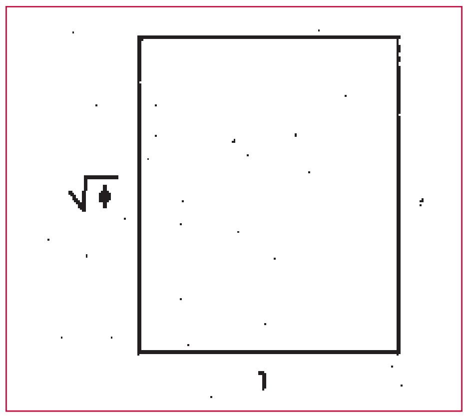

Figura 6. Rectángulo de razón $\sqrt{\phi}$.

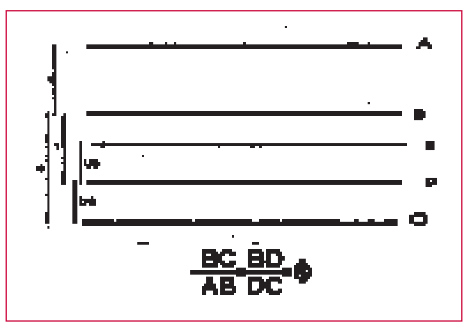

Figura 7. Constancia e equilibrio xeradas polo número áureo.

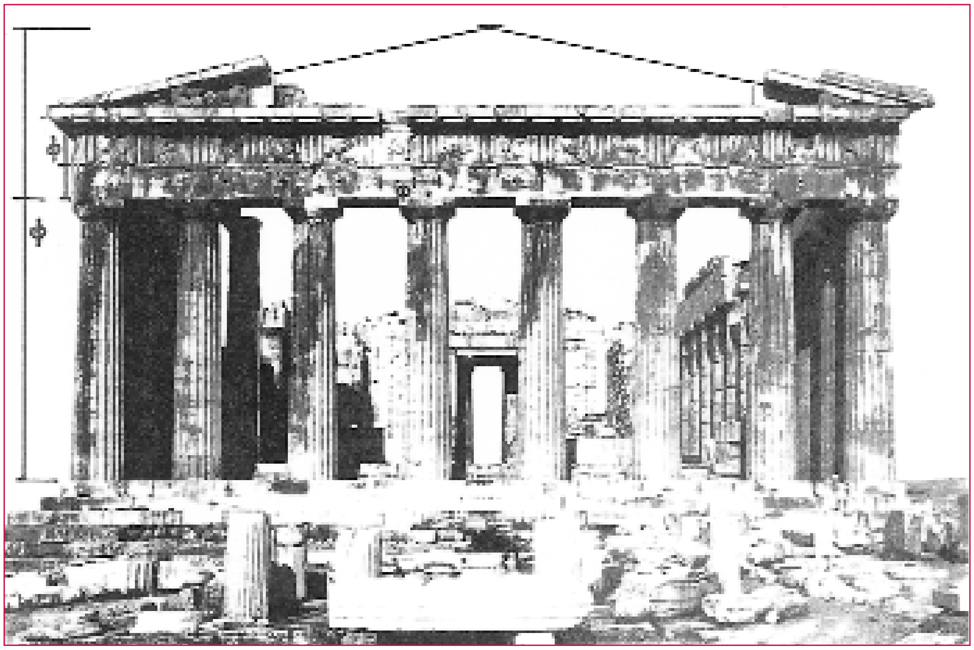

Figura 8. O número áureo no Partenón.

observou que a súa forma se atopa disposta en grupos de cinco ou de múltiplos deste número. O radiolario, *Circorhegna dodecaedra*, forma un dodecaedro regular. As nosas mans teñen forma de pentágono.

A natureza pode evita-la lei dos índices racionais dado que o desenvolvemento do ser vivo ten a súa orixe no proceso de crecemento organizado no que inicialmente se dispón dun pequeno elemento que vai medrando pero conservando a forma e a complexidade. Este crecemento difire do das formas cristalinas baseado na repetición de estructuras idénticas en forma e tamaño.

A ESPIRAL LOGARÍTMICA

Na espiral logarítmica, tan próxima ó número áureo, podemos observar este equilibrio típico da natureza biolóxica, "cambiar para que todo siga igual". Esta espiral é a única curva aberta que ten os seus segmentos proporcionais e, polo tanto, simboliza máis ca ningunha outra a conservación de forma no proceso de crecemento. Ó igual que ϕ, aparece constantemente en multitude de formas vivas, coma a disposición das follas de moitas plantas ou os grans nos froitos no reino vexetal. No reino animal un gran número de cunchas teñen forma de espiral logarítmica, os cornos dos mamíferos e o propio caracol do noso oído interno tamén toman esa forma.

Unha espiral logarítmica caracterízase pola propiedade de que a relación entre segmentos de espiras consecutivas están en progresión xeométrica. Toda espiral logarítmica queda caracterizada polo valor da razón OC/OB desa progresión xeométrica. Outro xeito de identificala é mediante o ángulo característico.

$$\frac{OC}{OB}=\frac{OB}{OA}$$

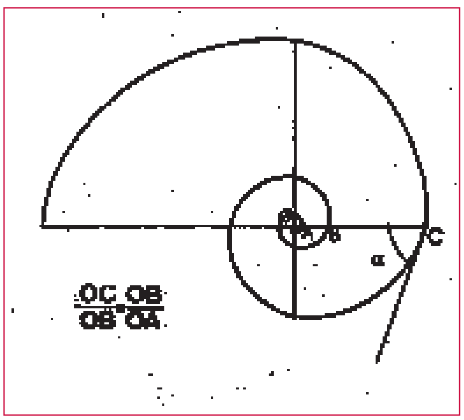

Figura 9. Espiral logarítmica.

Nunha espiral logarítmica, o ángulo que forma calquera radio vector (OC por exemplo) coa tanxente á espiral no punto común con esta (C, neste caso) é constante. As espirais de ángulo característico próximo a 90º aproxímanse á espiral de Arquímedes (de aumento constante entre espiras consecutivas) e o crecemento é moi lene. Na natureza atopamos moitas espirais deste tipo (ángulos maiores de 89º) nos restos fósiles das *numulitas*, pequenos protozoos extinguidos que hoxe se poden atopar en moitas rochas sedimentarias. No outro extremo están as espirais logarítmicas de ángulo característico pequeno (arredor de 60º) que aparecen nos actuais *Halitoides* (escalope de mar), coma o *Halitoides splendes*; espirais que son, polo tanto, extremadamente abertas.

Entre estes dous valores atopámo--la espiral de pulsación radial ϕ (isto é OC/OB=ϕ), que ten de ángulo característico 85º 36’ e está presente en moitas amanitas fósiles e outras especies vivas coma o *Murex* ou a *Scalaria pretiosa.*

A abertura destas é menor cá das espirais de pulsación radial ϕ^2 e ángulo característico 81º 22’, presente na *Dolium Perdix*. Aínda maior abertura ca esta é a da espiral de pulsación ϕ^4, que

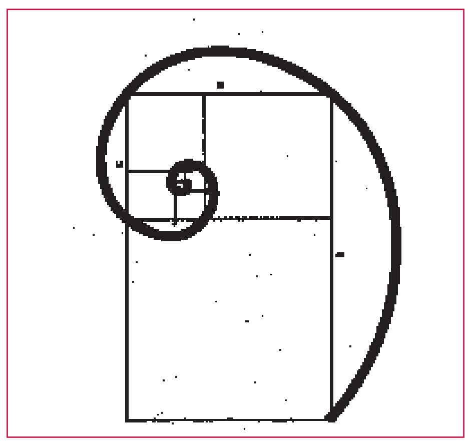

Figura 10. Espiral logarítmica e rectángulos áureos

ten de ángulo característico 73º 43', valor que case coincide co do pequeno *Haliotis parvus*.

Unha característica das formas espirais dos seres vivos ó longo da súa evolución parece se-la reducción do ángulo característico xunto cunha diminución de tamaño.

M. Ghyka (1977) observou que, se trazamos unha secuencia crecente de rectángulos áureos polo procedemento clásico de engadir cadrados cada vez maiores, e unímo-los vértices consecutivos dos sucesivos rectángulos por unha espiral, a figura que se forma tende a confundirse coa espiral logarítmica de razón entre as espiras ϕ^4 (figura 10).

A disposición en espiral de moitos froitos (piñas, xirasoles, etc.) e animais demóstranos que esas formas están aí polas súas propiedades matemáticas. No caso da espiral logarítmica é ese patrón espacial —que non cambia ó cambiar de tamaño xa que engade elementos isométricos idénticos— o que a diferencia das formas cristalinas. Non é casual que nos froitos, o número de espirais que hai nun sentido e no outro sexan números consecutivos de Fibonacci e, polo tanto, aproximacións ó número áureo ϕ.

As espirais tamén aparecen representadas nas obras humanas da antigüidade. Por exemplo, en moitos petroglifos do noso país, nas fíbulas de bronce de La Tène, en chapiteis xónicos e noutras moitas formas xeométricas.

NÚMERO ÁUREO, ARTE E CORPO

A razón áurea foi empregada tanto polos artistas —arquitectos, escultores, pintores, músicos— da antiga Grecia coma polos de épocas posteriores, como Leonardo, Stradivarius ou Mozart.

Na arquitectura gótica, obsérvase unha liberdade e unha exuberancia nos detalles que semellan as da natureza viva, ó permitir esas pequenas desviacións prohibidas nas construccións gregas. Esta fantasía gótica, aparentemente caprichosa, revélanos un rigor dinámico tan perfecto coma o equilibrio estático dos templos gregos. Nas catedrais góticas aparecen tanto o dobre cadrado coma a sección áurea, combinándose o pentágono, o cadrado e mailo triángulo equilátero (figuras 11 e 12).

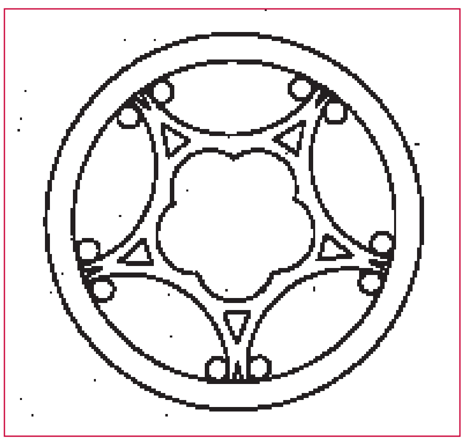

Figura 11. Rosetón pentagonal da Notre Dame de París.

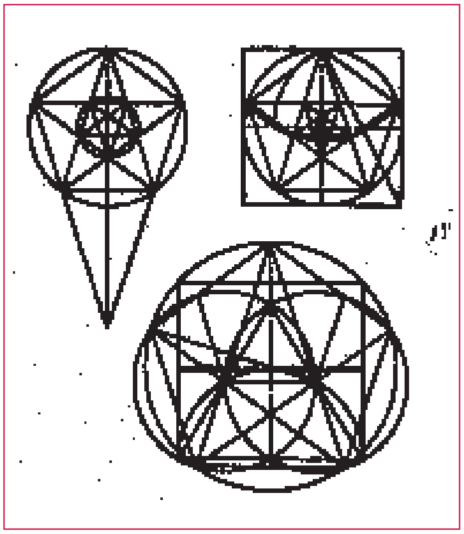

Figura 12. Formas pentagonais de catedrais góticas.

Para os gregos, a natureza seguía determinadas proporcións que correspondían ó modelo ideal. Un dos modelos era, evidentemente, o número áureo.

O interese polo número áureo anovouse coa súa relación cos procesos computacionais —as series de Fibonacci son un exemplo típico de recursividade dobre— e empregouse tamén no estudio de dinámica de poboacións, en economía e noutros ámbitos.

O rectángulo áureo é unha das formas, coma a espiral logarítmica e os fractais, que se conservan sen variación tanto no infinitamente grande coma no pequeno. Esta propiedade de persistencia a pesar dos cambios lémbrano-la necesidade que temos de conservar un

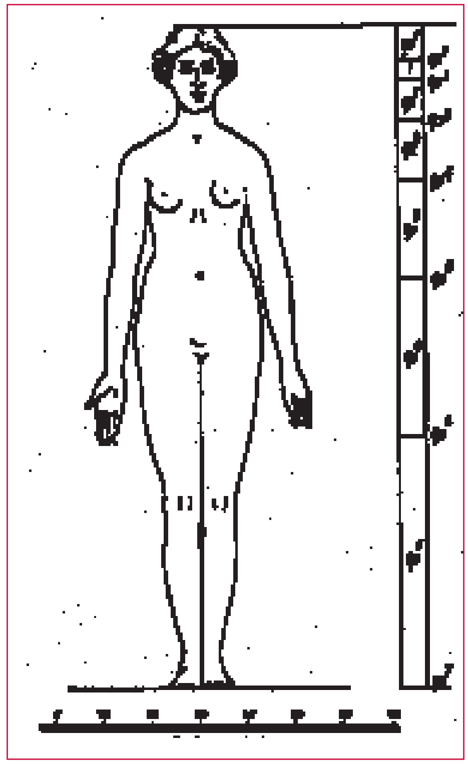

Fig 13. Proporcións vinculadas ó número áureo no corpo feminino.

número suficiente de contidos matemáticos. ¿Seguirá a ser ϕ un exemplo do que se ha de manter na Matemática educativa? Cambios para conservar ou conservar para asumi-los cambios nesta vertixinosa época na que vivimos.

BIBLIOGRAFÍA

Atienza, J., *La ruta sagrada*, Barcelona, Robin Book, 1992.

Boyer, C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Universidad, 1986.

Cachafeiro, L., *As Matemáticas do corpo*, Granada, Proyecto Sur, 2000.

Enzensberger, H., *El diablo de los números*, Madrid, Siruela, 1997.

Ghyka, M., *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*, Barcelona, Poseidón, 1977.

Wikstroöm, A., *Functional Programming Using Standard ML*, New York, Prentice Hall, 1988.