Números reales construibles

Juan Manuel MATEO CHARRIS *

El mayor problema con que nos encontramos en nuestra labor de enseñantes es la postura pasiva, e incluso negativa, ante las matemáticas que toman la generalidad de los alumnos de B. U. P.

Las causas son varias, pero la fundamental es la ausencia de motivación en los contenidos de los que se informa, de los que además se exige un manejo conciso y claro. Esta falta de motivación es particularmente grave en 1.º de B. U. P.

Los alumnos de 1.º, como adolescentes que son, están muy poco interesados en conceptos de tan escasa relación con la realidad como los polinomios o los complejos, valga el ejemplo, y mucho menos por la rutina de las operaciones.

Sin embargo, los adolescentes muestran una cierta inquietud producida por la necesidad de jugar, y a juegos que ellos entienden como inteligentes. Un ejemplo: Hace unos meses aparecieron en *El País* las reglas de un nuevo (o viejo) juego topológico ideado por matemáticos de la Universidad de Cambridge. Pues bien, a los pocos días me encontré, al entrar en clase, con varias alumnas jugando partidas en la pizarra. Las "jugadoras" no se distinguen especialmente por su interés en las matemáticas, sino más bien por su aversión a ellas. Y es evidente que el juego en cuestión tiene muchos valores formativos.

Por otra parte, es patente la fascinación de los alumnos por las calculadoras de bolsillo. El manejo de éstas es considerado como un juego, hasta el punto de entablarse auténticas competiciones entre alumnos que se vanaglorian de saber sacar el máximo partido a su calculadora. ¿Y no son precisas buenas nociones de lógica, e incluso de cálculo, para poder manejar correctamente una calculadora?

* Catedrático de matemáticas del I. B. "Jiménez de la Espada", de Cartagena.

Pasemos al juego de moda: los juegos electrónicos. Cuando nuestros alumnos destruyen naves marcianas están desarrollando no sólo sus reflejos, sino también su intuición geométrica, pues existe claramente *geometría* en la adivinación de una intersección entre dos líneas. En este sentido, la pantalla de un televisor y una lámina de papel en la que se trazan rectas que se cortan son curiosamente semejantes.

En definitiva, nuestros alumnos sólo se interesarán por la matemática si se les plantea de forma recreativa y actual, y creo por tanto que en pocos temas podríamos realmente interesarlos, en un mundo invadido por la electrónica, salvo en la informática y en la geometría, por lo que tiene de visual, pues no en vano vivimos en plena civilización de la imagen.

Pero así como la informática sólo tiene futuro, la geometría sólo tiene pasado, y su futuro dependerá de su capacidad de adaptación a los nuevos tiempos.

La geometría ha ido desapareciendo progresivamente de la enseñanza media. Se ha ido condensando con el tiempo, y ha ganado en generalidad y en coherencia (para un matemático), pero ha perdido aplicabilidad para el alumno. No nos engañemos: la vieja geometría del triángulo, de las construcciones, no podrá volver a menos que su estudio se incentive de acuerdo con los intereses del alumno.

Siguiendo esta línea voy a introducir los números reales construibles con regla y compás para 1.° de B. U. P.

La idea general del tema me ha sido proporcionada por los mismos alumnos, que una vez construidos los reales, establecen una diferencia muy clara entre números como $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{3}$ que saben dibujar y números como π, que la teoría asegura que están en la recta, pero que no saben dibujar con instrumentos *comunes*.

Ello nos lleva al problema de las construcciones con regla y compás, tema superior desde luego, pero que con los necesarios recortes puede adaptarse para los alumnos de este nivel.

Su interés es indudable:

a) Se construye de esta manera un cuerpo más amplio que el de los racionales y contenido en los reales.

b) Se trata de un cuerpo obtenido mediante operaciones de definición geométrica.

c) Una vez establecidos los axiomas, todas las construcciones se obtienen lógicamente a partir de dichos axiomas. Constituye un primer contacto del alumno con el método axiomático, propio de la geometría.

Desarrollo del tema

I. Se invita al alumno a participar en un juego: dibujar puntos utilizando sólo regla y compás. Los puntos así dibujados los llamaremos construibles, y se obtienen como intersección de rectas, de círculos y rectas, y de círculos. Una recta se podrá dibujar si contiene dos puntos construibles, y una circunferencia se podrá dibujar si su centro es un punto construible, y el radio es un segmento de extremos construibles.

Precisando, resultan los siguientes axiomas de constructibilidad.

Ax. 1. Existen dos puntos del plano construibles.

Ax. 2. La recta que pasa por dos puntos construibles es construible.

Ax. 3. El círculo de centro y radio construible es construible.

Ax. 4. Los puntos de intersección de rectas construibles son construibles.

Ax. 5. Los puntos de intersección de círculos construibles son construibles.

Ax. 6. Los puntos de intersección de rectas y círculos construibles son construibles.

(El Ax. 1 es necesario para empezar a construir. Los otros son las reglas de juego. Es fácil ver que es un sistema "completo" de axiomas).

II. Al cabo de poco tiempo los alumnos han construido una serie de puntos. Los más aventajados habrán construido, quizás, el punto medio de un segmento, o el círculo que pasa por tres puntos.

Es el momento de advertirles la necesidad de una sistematización de las construcciones. Resultan, pues, los siguientes teoremas reducidos exclusivamente de los axiomas.

Teorema 1. La recta paralela a una recta construible r que pasa por un punto construible A es construible.

Demostración: Basta tomar los dos puntos construibles B y C que, como mínimo tiene r, y trazar los círculos de centro A y radio $\overline{BC}$, y de centro C y radio $\overline{AB}$. Se cortarán en un punto D construible. La recta que pasa por A y D es, obviamente, la paralela a r buscada.

Teorema 2. La mediatriz de un segmento construible es construible.

Demostración: Sea el segmento $\overline{AB}$ construible. Los círculos de centros A y B, y radio $\overline{AB}$ se cortan en dos puntos C y D construibles. La recta que pasa por C y D es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Teorema 3. El círculo que pasa por tres puntos construibles A, B y C no situados en línea recta, es construible.

Demostración (conocida del alumno por la asignatura de dibujo): Basta trazar las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, que se cortarán en un punto D. El círculo de centro D y radio $\overline{AD}$ es construible y pasa evidentemente por A, B y C.

III. Con estos tres teoremas las posibilidades de construcción de puntos aumentan considerablemente.

Es el momento de plantear la posibilidad de asignarle a cada punto construido un par de coordenadas. Para ello, necesitaríamos un sistema de ejes cartesiano-rectangulares construibles.

Teorema 4. Existe al menos un sistema de ejes cartesiano-rectangulares construibles.

Demostración: Consideramos dos puntos construibles A y B. La recta AB y el círculo de centro A y radio $\overline{AB}$ se cortan en dos puntos B y B'. Construyamos la mediatriz del segmento $\overline{BB'}$.

El sistema de ejes cartesiano-rectangulares queda determinado tomando la recta que pasa por A y B como eje X, la mediatriz del segmento $\overline{BB'}$ como eje Y, y el segmento $\overline{AB}$ como unidad de medida.

Una vez coordenado el plano (la determinación de las coordenadas de un punto construible es puramente teórica, aunque utilizando resultados elementales de geometría métrica, el alumno puede averiguar las coordenadas de algunos puntos construibles), planteamos la reducción de la construcción del punto $P(a, b)$ a la de sus proyecciones $P'(a, 0)$ y $P''(0, b)$ sobre los ejes X e Y. Nos lo asegura el siguiente teorema:

Teorema 5. El punto de coordenadas (a, b) es construible si y sólo si los puntos de coordenadas $(a, 0)$ y $(0, b)$ (proyecciones sobre los ejes) son construibles.

Demostración: La demostración es trivial. Si $P(a, b)$ es construible, sus paralelas a los ejes lo son, y sus intersecciones con ellos determinan $P'(a, 0)$ y $P''(0, b)$, respectivamente.

Recíprocamente, si $P'(a, 0)$ y $P''(0, b)$ son construibles, la paralela al eje Y por P', y la paralela al eje X por P'' son construibles, y su intersección es $P(a, b)$.

IV. La correspondencia biyectiva entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos del plano de coordenadas $P(a, 0)$ (*eje* X) definida de modo obvio

$$\begin{aligned} f: R &\longrightarrow X \\ a &\longrightarrow P(a, 0) \end{aligned}$$

motiva la siguiente

Definición.—Un número real a es construible si el punto $P(a, 0)$ es construible.

Hecha la identificación anterior queda claro que construir números reales equivale a construir sus representaciones sobre una recta graduada, y es evidente que la elección de dicha recta es irrelevante, aunque por motivos "técnicos" supondremos que es el eje X.

Los números reales construibles, como reales que son, participan de las propiedades de las operaciones definidas en R, esto es, suma y producto, pero dados a y b números reales construibles, aunque existen $a + b$ y $a \cdot b$, no se puede asegurar en principio que sean construibles.

Vamos a comprobar que sí es cierto, es decir, que a partir de dos números reales construibles a y b pueden construirse también $a + b$ y $a \cdot b$.

Es evidente que tales construcciones se pueden considerar definiciones de dos operaciones *suma* y *producto*, en R_C, operaciones que se definen geométricamente (las primeras conocidas del alumno) y que resultan compatibles con la suma y producto de reales.

Más aún, dado cualquier $a \in R_C$ es posible construir $-a$ y a^{-1} (si $a \neq 0$), con lo que tendremos

— Un conjunto $R_C \subset R$ y dos operaciones $+$; restricciones de las operaciones suma y producto de R, tal que:

a) $(R_C, +)$ grupo abeliano.

b) $(R_C - \{0\}, .)$ grupo abeliano.

c) Se verifica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, pues $R_C \subset R$.

En resumen, $(R_C, +, .)$ es un cuerpo conmutativo (subcuerpo de R).

La razón de *c)* es válida para comprobar las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y el producto en R_C.

Proposición 1.—Si a y b son reales construibles, también lo es $a + b$.

Demostración: Sean a y b números reales construibles, entonces son construibles $P(a, 0)$ y $P'(b, 0)$.

Trazamos un círculo de centro P y radio $\overline{OP'}$, que cortará al eje X en dos puntos P'' y p''' situados, respectivamente, a izquierda y derecha de P. Es evidente que si $b \geq 0$, entonces $P'''(a + b, 0)$ y si $b < 0$, entonces $P''(a + b, 0)$.

Proposición 2.—Si a es construible, $-a$ es también construible.

Demostración: Si a es construible, lo es $P(a, 0)$. Trazamos el círculo de centro O y radio $\overline{OP}$, que corta al eje X en P y p'. Entonces, $P'(-a, 0)$.

Proposición 3.—Si a y b son construibles, entonces $a \cdot b$ es construible.

Demostración: Basta con demostrar la proposición para el caso $a > 0$,

$b > 0$. Si $a = 0$ ó $b = 0$ es trivial. Si alguno de ellos es negativo basta con tener en cuenta la regla de los signos y aplicar la proposición anterior.

Supongamos entonces a y b construibles y, por tanto, $A\,(a\,,0)$, $B\,(b\,,0)$ construibles. Los puntos $A'\,(0\,,a)$, $B'\,(0\,,-b)$ y $P\,(-1\,,0)$ son evidentemente construibles, y como no están alineados, el círculo que pasa por A', B' y P es construible y cortará al eje X en un nuevo punto C, de coordenadas $(a \cdot b\,,0)$.

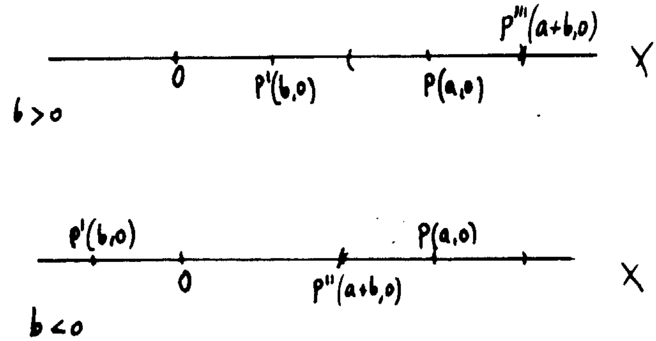

Figura 1

Nota: La justificación de que C tiene coordenadas (a · b , 0) exige el conocimiento de los ángulos inscritos en una circunferencia, así como de la semejanza de triángulos, temas del antiguo bachillerato elemental, pero que no sé si serán conocidos del alumno de 1.º.

En efecto, los triángulos $\widehat{0PA'}$ y $\widehat{0B'C}$ son semejantes porque:

a) Son rectángulos.

b) $L\,A'P0 = L\,A'B'C$, por estar inscritos en la circunferencia y abarcar el mismo arco.

Luego se verifica $\dfrac{0A'}{0C} = \dfrac{0P}{0B'}$, es decir, $\overline{0C} = a \cdot b \Rightarrow C$ tiene coordenadas $(a \cdot b\,,0)$.

Proposición 4.—Si $a \neq \varnothing$ es construible, también lo es $1/a$.

Demostración: En efecto, el círculo que pasa por los puntos construibles $A\,(0\,,1)$, $B\,(0\,,-1)$ *y* $P\,(-a\,,0)$ cortará el eje X en otro punto P' de coordenadas $(1/a\,,0)$. La justificación es análoga a la de la proposición anterior.

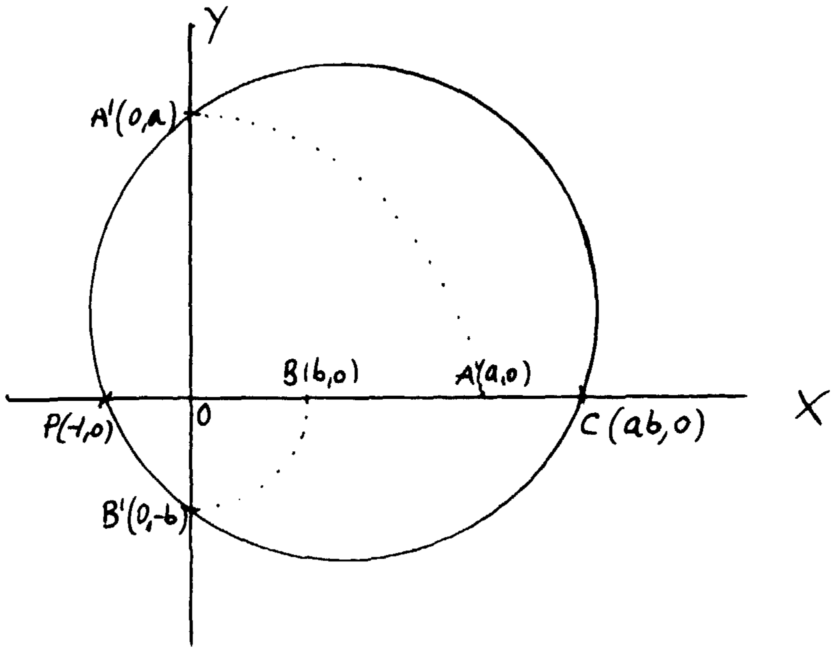

Figura 2

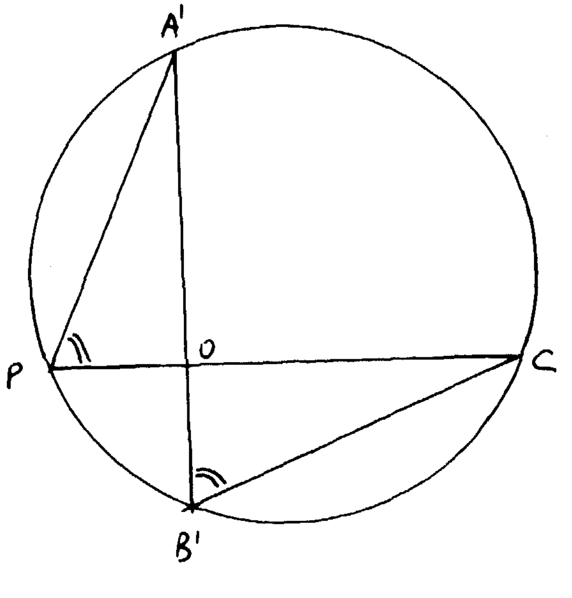

Figura 3

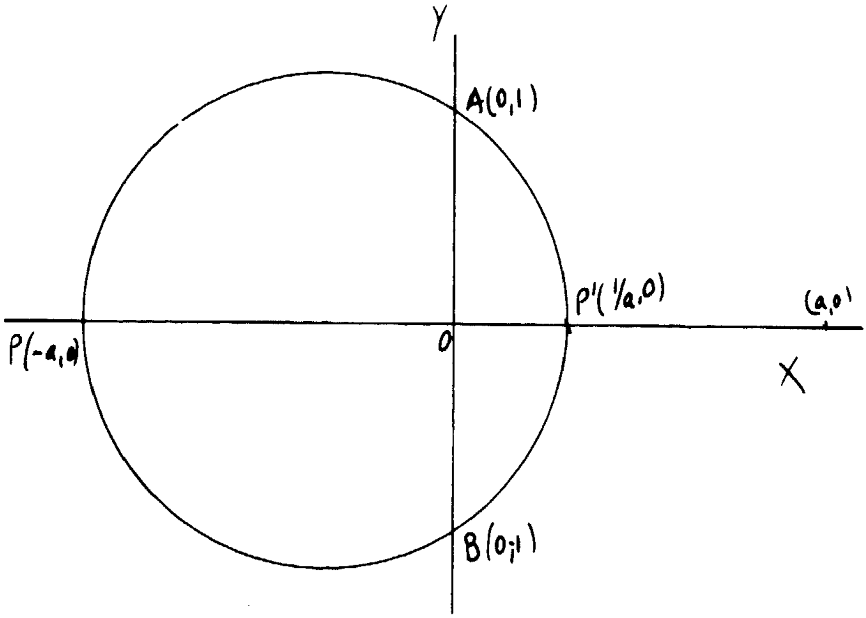

Figura 4

V. Consideraciones finales.

¿Qué números reales son construibles con regla y compás?

a) Es evidente que lo son todos los enteros y todos los racionales, y para ello basta con utilizar las construcciones de las cuatro proposiciones anteriores (se puede proponer al alumno que construya el número racional m/n, en algunos casos sencillos, por supuesto).

b) También lo son algunos irracionales. Como ejercicio se puede proponer la construcción de $\sqrt{2}$, y de este modo descubrirá el alumno que necesita usar más la regla y el compás de lo que esperaba.

Reiterando el proceso se puede construir $\sqrt{n}$, donde n es un número natural.

c) Por aplicación de las proposiciones 1, 2, 3, 4, se puede construir cualquier número real que se exprese como una operación "racional" (sumas, restas, productos y cocientes) de números racionales y raíces cuadradas de dichos números racionales. E incluso, más aún, con raíces de índice una potencia de dos, aunque esto ya no está al alcance del alumno de ningún modo.

d) Desgraciadamente no podemos seguir más adelante, y no podremos hacer comprender al alumno que no todos los números reales son construibles. Ya conocíamos el caso de π.

No hay que ir tan lejos. Un número real tan sencillo para el alumno (acostumbrado a operar con radicales) como $\sqrt[3]{2}$ tampoco es construible. Y este número está directamente relacionado con la famosa duplicación del cubo, imposible con regla y compás. Ya sólo queda hablar un poco de los clásicos teoremas de construcciones y de las fecundas ramas de la matemática que han nacido al intentar resolverlas, lo que demuestra, una vez más, que la matemática entra por los ojos y después se hace abstracción.

Bibliografía

COURANT, R., y ROBBINS, H.: *¿Qué es la matemática?* Ed. Aguilar, 1958.
ARTIN, E.: *La teoría de Galois.* Ed. Vicens-Vives, 1970.
CLARK, A.: *Elementos de álgebra abstracta.* Ed. Alhambra, Colección Exedra, 1974.

COMUNIDAD ESCOLAR

PERIODICO SEMANAL DE INFORMACION EDUCATIVA

Disposiciones legales al dia y un Consultorio para salir de dudas

Porque usted no lee cada día el Boletin Oficial del Estado, ni el de su respectiva Comunidad Autónoma. Porque necesita saber dónde, cuándo y cómo hacer una instancia, solicitar una beca o presentar una reclamación. COMUNIDAD ESCOLAR le ofrece un seguimiento exhaustivo de todas las disposiciones legales de interés para profesores, padres y alumnos. Y un consultorio muy abierto para que no le queden dudas.

Desde enero, un recreo más a la semana

Una información educativa veraz y contrastada, de alcance nacional e internacional, elaborada por periodistas especializados y servida a Vd., cada semana. Con secciones de Salud, Universidad, Ciencia y Cultura... porque la escuela no agota su curiosidad, ni la nuestra.

Un semanario de información educativa abierto a toda la comunidad escolar

Con el nuevo año crece la comunidad escolar. A partir de enero contará con un nuevo semanario de información educativa.

Maestros y Profesores, padres y pedagogos hallarán en sus páginas la información veraz y contrastada, la opinión plural y contrapuesta, así como una completa guía de servicios diversificados que les permitirán conocer el día a día de la acción educativa.

El salto cualitativo que representa la edición de un semanario de información educativa ha sido cuidadosamente preparado a la luz de una experiencia enormemente útil y enriquecedora. Desde mediados de abril de 1983, COMUNIDAD ESCOLAR, editado por el Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, ha venido cumpliendo una cita quincenal con un número cada vez mayor de lectores. La experiencia recogida a lo largo de más de año y medio de existencia, las críticas, opiniones y sugerencias recibidos de nuestros lectores y las exigencias que impone el seguimiento puntual de la actualidad informativa en educación, han sido tres poderosas razones que aconsejaban el cambio de periodicidad de nuestra publicación.

La mejor Bolsa de Trabajo y anuncios gratis

La más completa relación de ofertas y demandas de trabajo, tanto de la enseñanza pública como de la privada, aparecidas en boletines oficiales y en las secciones de anuncios de los principales diarios del país. Además, todos los lectores pueden insertar en nuestras páginas anuncios gratuitos no comerciales de hasta un máximo de 50 palabras, para buscar trabajo, hacer permutas o, simplemente, publicar avisos.

Ricardo Cid, Fabricio Caivano, Martinmorales y Romeu

Ricardo Cid Cañaveral seguirá dejando escribir a su boli alborotado, Fabricio Caivano se une a nosotros con un nuevo sacapuntas, Martinmorales promete un humor igual de descarado que hasta ahora y Romeu, acompañado de sus niños y viñetas, estará con nosotros desde enero.

BOLETIN DE SUSCRIPCION

COMUNIDAD ESCOLAR
SEMANAL

Señale ☒ el periodo de suscripcion que le interesa:

Precios de suscripcion (sin gastos de envio)		OFERTA	ORDINARIA
	☐ UN SEMESTRE (24 numeros)	800 ptas.	1.000 ptas.
	☐ UN AÑO (48 numeros)	1.600 ptas.	2.000 ptas.

Forma de pago. Señale ☒

☐ Cheque adjunto ☐ Contra reembolso
☐ Giro postal n.º ☐ Domiciliacion bancaria

D./D.ª ....

Domicilio ....

Localidad .... Tel. ....

.... Codigo Postal ....

Provincia ....

Deseo suscribirme a partir de ....

FIRMA

Sr. Director del Banco/Caja de Ahorros de ....

Sucursal/Agencia Urbana num. ....

Calle ....

Localidad .... Codigo ....

Ruego a Ud. se sirva cargar en mi cuenta núm. ...., hasta nuevo aviso, el importe de la suscripción semestral/anual al periódico COMUNIDAD ESCOLAR del Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. Apdo. nº 169 F.D. MADRID.

.... ,a .... de .... de 198

Firmado: