Dificultades en la resolución de problemas

Análisis de una experiencia

M.ª Dolores DE PRADA VICENTE *

Es denominador común en la enseñanza de las matemáticas, el hecho de que los alumnos no saben resolver problemas y aun los más aventajados fracasan en algunos tipos de ellos cuya solución puede lograrse en el marco de los conocimientos que poseen.

¿A qué se debe esta dificultad? ¿Cómo poder subsanarla?

Cuando conozcamos por qué un determinado problema es difícil para nuestros alumnos, cuando averigüemos qué sucede en su actividad mental y por qué en algunos casos son incapaces de resolver los problemas por sí mismos, tendremos la posibilidad de elaborar una metodología que prevenga la aparición de defectos en el proceso y señale qué línea puede llevarles con más probabilidad al éxito en la resolución.

Esta afirmación, que parece idealista e inasequible, tendría sentido en el marco de una investigación didáctica seria sobre lo que sucede en la mente del alumno durante el proceso de resolución de problemas. Pero el proceso y la actividad mental son difíciles de conocer, evaluar e interpretar y arriesgado sacar conclusiones que permitan generalizar resultados. Consciente de estas dificultades y de sus limitaciones, me he aventurado, en la realización de una experiencia que pretende tímidamente y sin ambiciones generalizadoras, irnos introduciendo en el ámbito del discurso matemático de nuestros alumnos, para elaborar una metodología más adecuada a sus necesidades de aprendizaje en esta materia.

Análisis de la experiencia

La experiencia consistió en la selección de una serie de 20 problemas [1] y estudio de las soluciones dadas por 150 alumnos.

* Catedrática de matemáticas. Inspectora de Bachillerato del Estado.
[1] Los enunciados se presentan al final de este artículo.

Los alumnos pertenecían a cuatro grupos de 2.º de Bachillerato y uno de C. O. U. Todos ellos pertenecientes al mismo centro de Madrid. La base cultural de estos grupos era alta. Procedentes en su mayoría de clase social media alta. El nivel medio de conocimientos en Matemáticas era de 6.

El método utilizado fue el del experimento individual, pues de esta forma es más factible vigilar el proceso e intuir cuáles son los condicionantes de determinada actividad mental de los alumnos y captar los mecanismos ocultos que condicionan el resultado, y además, según Fox, "Si nos enteramos de cómo interaccionan determinados procesos en algunos individuos, es probable que lleguemos a saber más sobre esos procesos en abstracto y, a la larga, podremos aprender todo cuanto necesitemos sobre ello" [2].

Los problemas se seleccionaron de acuerdo con las hipótesis de nuestro trabajo y con el fin de detectar las dificultades en la actividad mental que condicionan el éxito en la búsqueda de la solución correcta.

La experiencia se realizó en cuatro fases:

1. Formulación de hipótesis y selección de los problemas.
2. Aplicación.
3. Evaluación y codificación.
4. Interpretación de resultados y conclusiones.

Algunos presupuestos previos

La formación en los alumnos de métodos generales de actividad mental constituye una importante misión de la docencia.

De los experimentos de Dunker y de la caracterización del raciocinio que nos ofrece V. N. Puchkin, se deduce, según afirma Landa, que: "Podrá enseñarse a un alumno la resolución de tantos problemas concretos como se quiera, pero si no se ha creado en él un método general para enfocarlos, unos medios generales para analizarlos, el alumno no aprenderá a resolver problemas por sí mismo. En semejantes circunstancias, la enseñanza no será progresiva, pues los conocimientos y hábitos creados, así como la experiencia pasada, no podrán ser utilizados con relación a un material nuevo" [3].

Según los psicólogos del aprendizaje (Ausubel, Bernstein, Landa), durante el proceso de resolución de los problemas se producen correlaciones entre los conocimientos de primer género que aporta el problema (datos) y las acciones que realiza el alumno con dichos datos. El conocimiento de los datos del problema actualiza las acciones de análisis de estos datos descubriendo relaciones que actualizan nuevos conocimientos: conocimientos de segundo género (axiomas, definiciones, teoremas). Estos conocimientos actualizan a su vez nuevas acciones y así hasta llegar a la solución.

[2] V. Fox: *El proceso de investigación en la Educación.* EUNSA, Pamplona.

[3] "La cibernética y algunos caminos para la racionalización de la enseñanza". Academia de Ciencias de la URSS, Moscú, 1962.

El paso de unos conocimientos a otros y la correlación entre conocimientos y acciones no siempre se llevará a cabo (aunque pueda realizarse espontáneamente) si no se produce:

1. La generalización de los conocimientos.
2. La generalización de las técnicas.
3. La actualización de los conocimientos y las técnicas.
4. El establecimiento de relaciones entre los conocimientos de primero y de segundo género.

Por generalización de conocimientos se entiende la transferencia de ideas y conceptos de unas situaciones a otras. Si no se da la transferencia no se produce el aprendizaje, no se elabora ese principio de orden superior no contenido en la experiencia pero que permite al alumno llegar a la solución y generalizar a toda una categoría de situaciones que plantean los problemas del mismo tipo.

La generalización de conocimientos supone en el alumno la habilidad para aplicar un conocimiento adquirido a todas las situaciones en las que es posible, aunque éstas estén enmascaradas. Por ejemplo: si se trata de conocimientos relativos a las propiedades de la proporcionalidad, éstos han de saber aplicarse en todas las situaciones en que se trabaje con magnitudes proporcionales, sea con números, segmentos u otros objetos.

Lo mismo que con los conocimientos, el alumno ha de saber hacer la transferencia de la utilización de una técnica (de asociación, operacional, etc.) de una situación a otra en la que esa técnica sea aplicable.

La actualización de los conocimientos y las técnicas supone la capacidad para traer a la mente en el momento de la resolución de un problema todos los conocimientos (axiomas, definiciones, propiedades, relaciones, etc.) que hacen referencia a los datos y todas las técnicas que pueden aplicarse a esos datos.

La experimentación ha demostrado que las propiedades que primero vienen a la mente suelen ser las que se utilizan con mayor frecuencia. Gracias a su aplicación reiterada las conexiones nerviosas que sirven de base a la actualización de estas propiedades tienen mayor solidez. De ahí que al resolver un problema, estas propiedades acuden en primer lugar, los alumnos se limitan a practicar un análisis unilateral, el facilitado por las conexiones más frecuentes, y con ello el problema resulta inalcanzable.

Muchos de los profesores afianzan este enfoque unilateral al seleccionar los problemas que proponen a sus alumnos. Un análisis de los cuadernos de éstos permite advertir que sus profesores plantean mayoritariamente ejercicios de aplicación y de automatización y lo mismo sucede con los libros de texto; y casi nunca se plantean problemas abiertos que no estén sujetos a un algoritmo para su resolución.

Hasta aquí se ha hecho un sucinto análisis de las dificultades en cuanto a la elaboración de las operaciones mentales necesarias para la resolución de un problema, sin embargo no son éstas las únicas causas del fracaso; los complejos factores que intervienen en el aprendizaje nos impiden analizarlos todos, y no podemos pasar por alto dos pilares que hay que afianzar: la motivación y la comprensión del problema.

La alegría, fruto de la resolución de un problema, del encuentro con la verdad, puede ser un elemento autosatisfactorio del esfuerzo realizado, pero no siempre funciona como elemento motivador que venza la pasividad ante un trabajo intelectual que se presenta como arduo. ¿Qué otros factores pueden motivar a querer resolver un problema? Seguramente hay muchos, y sin duda uno de ellos es su presentación: la forma en que esté redactado, el interés que suscite, la inteligibilidad que presente, la aplicabilidad que en él se vea, la curiosidad que despierte.

Polya, en su libro *Cómo resolver un problema,* afirma que es necesario: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución encontrada.

Comprender el problema es, primeramente, saber leer el problema y entender su significado; después, construir mentalmente el enunciado, reteniendo los datos en el campo de la conciencia, distiguiendo lo conocido y lo desconocido.

Algún lector puede pensar en la obviedad de muchas de estas afirmaciones. No se trata de ofrecer ningún descubrimiento sensacional sino de llamar la atención sobre datos fundamentales cuyo olvido está en la raíz de las dificultades que muchas veces encontramos para hacer frente a las necesidades concretas de nuestros alumnos.

Formulación de hipótesis y selección de los problemas

Partiendo de los presupuestos previos, de la experiencia personal, del examen de los cuadernos de trabajo de los alumnos y de los libros de texto, hemos llegado a la formulación de las siguientes hipótesis de trabajo:

H_1. El hecho de resolver muchos problemas no lleva espontáneamente al alumno a la elaboración de un método general de resolución de problemas.

H_2. Para llegar a la solución de un problema es necesaria, en primer término, una motivación, y uno de los factores que inciden en la motivación es la forma en que esté redactado el problema, el interés que suscite, la inteligibilidad que presente.

H_3. La variabilidad en la elección de tipo y forma del problema es un factor inherente a la construcción del método general de resolución de problemas.

H_4. Los defectos en la actividad mental que impiden que los alumnos acaben con éxito la resolución de un problema son:

- La no transferencia de ideas y conceptos de unas situaciones a otras.

— La no generalización de las técnicas.
— La no actualización de los conocimientos y de las técnicas.
— La falta de relaciones entre los conocimientos que aportan los datos y la actualización de otros conocimientos asociados a ellos.

De acuerdo con estas hipótesis se seleccionaron los problemas. Nueve de dichos problemas (núms. 1, 5, 6, 15, 16, 19, 20) eran variantes de problemas familiares al alumno y que éste había resuelto con otra redacción. Hipótesis 1.

Un mismo problema (núms. 7 y 8) se redactó de dos maneras distintas (una, mucho más atractiva que la otra, pero más larga y menos directa). Hipótesis 2.

Se seleccionaron siete problemas (núms. 5, 6, 8, 13, 14, 15, 19) que expresaban situaciones reales, y seis de investigación abierta. Estos son los que no contienen en su formulación la estrategia para resolverlos y por ello propician procesos de razonamiento divergente (núms. 8, 9, 10, 12, 14, 17).

Se propusieron problemas de cuatro categorías distintas: de reconocimiento, de aplicación, de investigación abierta y de situaciones reales. Hipótesis 3.

Se le pidió al alumno que en todos los problemas contestara a una serie de preguntas para seguir su proceso mental, que describiera en lo posible este proceso con sus explicaciones y en caso de no poder continuar la resolución explicara por qué. Hipótesis 4.

Aplicación

Se presentaron los problemas en varias sesiones y se les dio la posibilidad de elección entre los problemas que se propusieron en cada sesión, por ello no todos hicieron todos los problemas. En cuanto a los de investigación abierta se les permitió que los resolvieran utilizando todo tipo de apuntes, libros y material.

Salvo los problemas 2 y 4, por su especificidad, los restantes se propusieron en la misma redacción a los alumnos de 2.º y de C. O. U.

Se plantearon una serie de preguntas que todos los alumnos debían contestar a fin de poder detectar en lo posible en qué fase del proceso se había interrumpido la actividad de resolución. Las preguntas fueron las siguientes:

1. ¿Qué es lo que el problema pregunta?
2. ¿Qué se debe contestar?
3. ¿Qué relaciones entre los datos pueden ayudarte a encontrar la solución?
4. ¿Qué otros conocimientos (definiciones, propiedades, relaciones) o técnicas necesitas?
5. ¿Qué operaciones o fórmulas debes emplear?
6. Haz un gráfico o esquema del problema.

7. Calcula la solución.
8. Explica o enjuicia la solución encontrada.
9. ¿Para qué puede servirte haber resuelto este problema?

Evaluación y codificación

Se establecen tres categorías —bien, resuelto en parte, mal—, adjudicando porcentajes a cada una de ellas.

El aspecto cualitativo de la evaluación se lleva a cabo recogiendo las respuestas a las preguntas escritas y orales de los alumnos, y las observaciones del evaluador a partir de los fallos detectados en la resolución. Esto es lo que ha permitido hacer la interpretación de los resultados.

En la corrección se detectó ambigüedad en la redacción del problema número 3. Algunos alumnos entendieron el producto referido a los polinomios q(x) y r(x) y otros lo entendieron referido a cada uno de ellos. Por ello se optó por no calificar dicho problema.

CODIFICACIÓN

Número	SEGUNDO							C. O. U.						
	Fr.				%			Fr.				%		
	B	*R*	*M*	*T*	*B*	*R*	*M*	*B*	*R*	*M*	*T*	*B*	*R*	*M*
1	23		49	72	32		68							
2									8	17	35		22	78
3	AMBIGUO													
4								1	10	24	35	3	8	69
5	2	15	55	72	3	20	76							
6										35	35			100
7		8	28	36		22	78		5	30	35		14	86
8	8	11	78	97	8	11	80	10		21	31	32		67
9			38	38			100			35	35			100
10		30	7	37		81	9							
11								1	20	14	35	2	57	31
12	4	15	50	69	6	22	72							
13	1	3	68	72	1	4	95							
14	21		27	48	43		57	17		13	30	56		44
15	24	12	15	51	47	23	29	14	7	17	38	36	18	44
16	11	22	39	72	15	30	54							
17		3	35	38		7	93							
18								7	8	12	27	25	29	44
19														
20		17	18	35		48	52							

Interpretación de los resultados

La base para la interpretación de los resultados han sido las puntualizaciones de los alumnos a su propio proceso, las contestaciones a las preguntas y las observaciones del evaluador ante los fallos detectados.

Presentamos algunas de las justificaciones de los fallos.

Problema núm. 1

"$4/x + 5x^2 + 2$ si es polinomio porque $4/x$ es un número racional."

"$4/x + 5x^2 + 2$ si es un polinomio porque es una sucesión de elementos de 0 en la que son nulos todos los términos a partir del grado 3.º"

"$4/x + 5x^2 + 2$ si es polinomio porque es una división."

"$4/x + 5x^2 + 2$ si es polinomio porque es la división de la incógnita por un número racional."

"5 no es polinomio porque es un monomio."

"5 no es polinomio, le falta la incógnita."

"5 no es polinomio por no tener indeterminada."

"5 no es polinomio porque los polinomios constan de una incógnita con un coeficiente."

Como se ve, no han actualizado los conocimientos y no ha habido transferencia de aprendizaje, puesto que la definición de polinomio la saben aplicar bien en unos casos y en otros mal. No han sabido captar el concepto, aunque sepan de memoria la definición.

Problema núm. 2

"Necesito saber que es a."

"Me desorienta ese a."

"No sé lo que significa el entorno $N_r(L)$ ni qué tienen que ver s ó $a-s < x < a$ con $f(x) \in N_r(L)$."

"L tiene que ser la mitad del número de elementos del conjunto imagen de la función f(x)."

"No sé lo que quiere decir N_r."

"No puedo hacerlo, pues no recuerdo el concepto de entorno ni lo que significa la letra *a* que aparece en el enunciado."

Hay una falta de identificación en el lenguaje. Tampoco ha habido transferencia, puesto que saben utilizar la δ, pero se desconciertan cuando en el mismo contexto se usa otro lenguaje. No ha habido generalización.

Problema núm. 4

"Necesito la ecuación de las asíntotas de una hipérbola."

"No me acuerdo qué es una discontinuidad asintótica."

"Esto debe ser por el cuento de la vieja."

Hay una falta de actualización de los conocimientos, no recuerdan la teoría y como es un ejercicio algorítmico no lo pueden resolver.

Problema núm. 5

No comprenden el problema.

En general no saben plantear las ecuaciones, les sobran incógnitas.

Dicen que les faltan datos.

Dicen que les hace falta saber cuánto es lo que la segunda se lleva más que la primera.

Un alumno lo plantea y llega a encontrar que $a + b = 100$ y se da cuenta que está mal planteado y no sigue.

Estos fallos indican que no saben hacer la traducción de un lenguaje a otro, les desorienta este lenguaje, quizá el que les proponemos en los problemas de ecuaciones es más directo.

Problema núm. 6

"No lo sé, porque no sé cómo construir un embudo a partir de un círculo con o sin sector."

Hallan mal el radio del cono en función de la longitud del círculo de hojalata.

Derivan la altura del cono sin darse cuenta que está en relación con lo que se ha cortado.

No conocen la fórmula del volumen del cono.

"No sé cómo debe ser que el volumen sea máximo ni cómo relacionarlo después con la superficie del cono."

En este caso, los fallos son debidos a deficiencias en los conocimientos y en las operaciones mentales (no saben relacionar el radio del cono con el círculo de hojalata, ni la altura con la sección que cortan).

Problema núm. 7

Algunos no saben hacer una demostración.

Otros saben que para hacer una demostración hay que probar dos implicaciones, pero lo hacen mal porque no prueban lo que tienen que probar.

Algunos saben escribirlo en lenguaje matemático, pero de ahí no pasan. La intuición les dice que los divisores se agrupan en parejas, menos cuando un divisor es cuadrado, que no tiene pareja, pero no saben probar esta conjetura.

"No sé seguir, pues no sé lo que significa que n sea cuadrado."

Problema núm. 8

No llegan a generalizar.

Hacen conjeturas falsas y no las prueban.

Mezclan el número de orden con el número de armarios abiertos.

No hacen esquema y se pierden en el proceso.

Sacan falsas deducciones de los datos concretos. Por ejemplo:

12 .... 3 abiertos
n .... x abiertos

Llegan a descubrir que en 12 quedan abiertos el 1, 4 y 9, pero no hacen conjeturas ni llegan a generalizar.

Problema núm. 9

"No he encontrado la fórmula".

Creen que debe aplicarse el teorema de Pitágoras.

Creen que no hay datos suficientes.

Olvidan que el problema dice "de medida entera" y consideran que hay infinitos.

Uno hace una conjetura, pero no la comprueba.

Creen que n puede medir infinitos centímetros.

No se acuerdan cómo se halla el término general de una progresión aritmética.
Fallan la actualización de los conocimientos, a ninguno se le ha ocurrido pensar en la relación "un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia".

También ha fallado la comprensión. No han sabido leer el problema.

Problema núm. 10

Han buscado casos particulares pero ninguno ha llegado a generalizar.

Problema núm. 11

"Como no tengo el tercer lado, y dos lados no definen ni el perímetro ni el área, no lo puedo hacer."

"$h = \operatorname{sen} \alpha$, $b = \cos \alpha$, $S = b \cdot h/2$, pero no sé cómo hallar α."

"No sé dónde puedo encontrar el otro lado y la altura. Sólo puedo hallar el área en el caso de un triángulo rectángulo."

La solución queda condicionada por el ángulo α y parece lógico. A nadie se le ha ocurrido dar una fórmula indeterminada que les permita encontrar infinitas soluciones.

Problema núm. 12

Lo ponen en dos posiciones, pero no generalizan a todas las posiciones posibles.

Problema núm. 13

"Creo que faltan datos".

"No sé cómo utilizar los datos que tengo para resolver el problema".

No distinguen los datos de lo que se les quiere preguntar.

Se encuentran perdidos, no saben cómo enfocarlo.

Problema núm. 14

Los que no lo resuelven bien es que no se han atenido a las proporciones que marca el padre.

No se han fijado en las relaciones que establece el problema.

Bastantes han dividido la herencia en seis partes: tres para el hijo, dos para la madre y una para la hija.

Otros buscan la solución justa sin atenerse a las proporciones.

Problema núm. 15

Suponen que se mueren la mitad de las gallinas, es decir, 15 gallinas y media.

Suponen que el número de semanas es igual al número de gallinas.

Consideran que no tienen datos suficientes.

Les da un número fraccionario de gallinas y no se inmutan.

Si la comida duró el doble es porque se consumió la mitad (no tienen en cuenta el número de gallinas que se van muriendo).

En general adolecen de falta de sistematización y defectos en el raciocinio.

Problema núm. 16

Consideran que faltan datos.

Lo dejan planteado con C y M (caballos y mulas).

Han encontrado tres ecuaciones con tres incógnitas: sacos del caballo, sacos del mulo y parte del total, que es un saco de cada animal.

Hay bastantes que sacan 5 y 7 porque quitan 1 en ambos.

En general no han sabido hacer la traducción de lenguajes.

Problema núm. 17

"No sé cómo comenzar."

"No entiendo el enunciado."

Uno ha probado y ha visto que a partir de 7 sale.

Otros hacen conjeturas falsas.

Algunos sacan la conclusión de que no es válido para los cuadrados perfectos.

Problema núm. 18

Consideran que el ortocentro es el centro de la circunferencia.

Confunden alturas con mediatrices y, por tanto, propiedades de las alturas con las de las mediatrices.

Eligen mal los ángulos que tienen que comparar y los triángulos, que tienen que ser iguales.

Confunden ortocentro con baricentro.

Consideran que los segmentos que pasan por el ortocentro son diámetros.

Problema núm. 20

Uno no sabe seguir porque no se acuerda de la fórmula.

Otro llega hasta $\left(\dfrac{36}{k-1}\right)\dfrac{2^{n-k+1}}{3^{k-1}} = \dfrac{36 \times 35 \times \ldots 2^{n-k+1}}{(k-1)\ (k-2) \ldots 3^{k}}$ y no sabe seguir porque no sabe qué hacer con tantos exponentes.

El término de mayor coeficiente es el término x.

La x tiene mayor coeficiente, ya que $2^{36} > 1/2^{36}$.

No sabe multiplicar potencias.

Resumiendo y sintetizando los fallos obtenidos se puede establecer la siguiente clasificación:

Fallos en las relaciones entre los conocimientos que aportan los datos y otros conocimientos asociados a ellos (62 %)

Núm. 6. No saben relacionar el radio del cono con el círculo de hojalata y por ello no saben qué hacer con el círculo.

Núm. 9. A ninguno se le ha ocurrido pensar en la relación "un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia".

Núm. 14. No se han fijado en las relaciones que establece el problema.

Fallos en la comprensión del texto y en la traducción de lenguajes (83 %)

Núm. 2. Hay una falta de identificación de los lenguajes simbólicos utilizados.

Núms. 5 y 9. No comprenden el texto y no saben hacer la traducción de lenguajes.

Núm. 7. No saben lo que quiere decir "probar".

Núm. 11. No se les ha ocurrido pensar en dar una fórmula del perímetro indeterminada.

Núm. 13. No distinguen los datos de las incógnitas.

Núm. 14. No se atienen a los datos, es decir, a las proporciones que establece el problema.

Núm. 15. Hacen suposiciones falsas sobre el enunciado del problema.

Núm. 16. No saben traducir el enunciado a una formulación matemática.

Núm. 17. No comprenden el enunciado.

Fallos en la generalización de los conocimientos (80 %)

Núm. 1. No ha habido transferencia y no se ha producido el aprendizaje del concepto de polinomio.

Núm. 2. No ha habido transferencia y no se ha producido el aprendizaje del concepto de límite.

Núm. 8. No llegan a generalizar.

Núm. 18. No se ha producido el aprendizaje de ortocentro, alturas y mediatrices.

Fallos en la generalización de las técnicas (73 %)

Núm. 8. No saben probar una conjetura.

Núm. 10. No saben generalizar a partir de casos particulares.

Núm. 12. No generalizan a todas las posibles construcciones, si no sólo a una o dos particulares.

Núms. 15 y 17. Hacen conjeturas falsas y no saben refutarlas.

Fallos en la actualización de los conocimientos y las técnicas

Núm. 4. No actualizan los conocimientos relativos a las asíntotas.

Núm. 6. No actualizan el volumen del cono.

Núm. 9. No actualizan todas las propiedades de los lados del triángulo.

Núm. 18. Actualizan unas propiedades de ortocentros, mediatrices y alturas, y otras, no.

Núm. 20. No actualizan los conocimientos del binomio de Newton.

Núm. 3. Sólo han traído a la mente una técnica, la de la regla de Ruffini.

Conclusiones

Dadas las características de la experiencia, en la cual no se ha utilizado grupo de control ni se han aislado variables de validez, no se puede hacer una generalización de los resultados, ni mucho menos buscar las causas, no obstante proponemos al profesorado algunas reflexiones suscitadas por estos resultados:

1. Los problemas familiares a los alumnos (los que éstos habían resuelto con otras variantes) núms. 1, 4, 5, 6, 15, 16, 19, 20 dan los siguientes porcentajes de éxito:

   Núm. 1, lo resuelven bien el 32 %.

   Núms. 4 y 5, lo resuelven bien el 3 %.

   Núm. 15, lo resuelven bien el 41,5 %.

   Núm. 16, lo resuelven bien el 15 %.

   Núms. 6 y 20, no lo hace bien nadie.

No parece que dichas categorías de problemas hayan sido generalizadas por los alumnos, por la cantidad de errores cometidos en su resolución y los tanteos caóticos que hemos advertido. En alguno de ellos, núm. 16, ha sido suficiente un cambio de lenguaje para que alumnos que resolvían problemas similares no hayan tenido éxito con éste.

Es curioso observar que el problema núm. 8 no era un problema familiar al alumno y, sin embargo, lo resuelve bien el 20 %, cosa que no sucede con el 4, 5, 6, 16 y 20, que son problemas que se han presentado más frecuentemente a estos alumnos.

2. Un mismo problema se expresó en dos formas diferentes (núms. 7 y 8). En su formulación más directa y más abstracta, donde se utilizaba la palabra "probar" no fue resuelto por ningún alumno. En su formulación más larga, pero más concreta y activa, fue resuelto bien por el 14 %, en parte bien por el 8 % y mal por el 72 %.

3. El éxito en la resolución de un problema depende de la corrección de las acciones y de las reflexiones del alumno durante el proceso y es importante para el profesor conocer este proceso a fin de ayudar al alumno en sus dificultades.

Los defectos en la actividad mental observados están recogidos en el párrafo anterior. Estos resultados nos inducen a pensar que el defecto más frecuente en estos alumnos, que impide la resolución de problemas, es la incomprensión del texto y los fallos en la traducción de lenguajes. Problemas sencillos como el 4, 14, 15 y 16 no han podido ser resueltos debido a las dificultades en la traducción de lenguajes. Otros, como el 2, 5, 9, 7, 13 y 19, tienen textos que no comprenden la mayoría de los alumnos que no los han resuelto.

Si ha habido una deficiente comprensión del problema y, por consiguiente, las acciones sobre los datos son insuficientes, no se producen las correlaciones entre los conocimientos de primero y de segundo género necesarias para llegar a la solución.

Un recurso didáctico que se puede utilizar para ayudar a estos alumnos en la comprensión es el comentario matemático de textos (del cual hay una experiencia en marcha) [4], que incide en aspectos como: lectura comprensiva, interpretación, asociación, juicio crítico, síntesis, interdisciplinariedad y traducción de lenguajes.

4. Otro defecto en la actividad mental subrayado en esta experiencia es la no generalización de los conocimientos y de las técnicas, al no haberse realizado la transferencia de conceptos, ideas y técnicas de unas situaciones a otras.

Para propiciar dicha generalización hay que utilizar en la enseñanza situaciones variadas, ejercicios de distintos tipos, problemas de una amplia gama de categorías, variantes en la forma, de un mismo problema.

[4] Ver *Apuntes de Educación.* Edit. Anaya.

5. Otros alumnos no han resuelto los problemas porque no trajeron a la mente todas las propiedades y los conocimientos necesarios para su resolución. Si no se presentan al alumno los conocimientos en sistemas organizados, es posible que no se produzca la actualización de todos ellos, sino que aparezcan caóticamente impidiendo la elección de aquel que conduzca a la solución.

6. Es muy difícil resolver un problema si se sigue un método a ciegas, los tanteos a ciegas son estériles, aunque son fructíferos los tanteos creadores y buscadores, ya que en éstos se sabe lo que se necesita obtener y se experimentan los posibles medios de obtener el objetivo.

   Para resolver un problema se necesita saber qué es lo que hay que hacer y en qué orden. Se favorecerá el proceso proporcionando al alumno unas reglas o unas técnicas con cuya aplicación reiterada pueda ir formándose en su mente un método general de resolución.

Problemas propuestos

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son polinomios?

$$x^3 + 2x - 5 \ , \ \sqrt{x} + 4x^2 + 2 \ , \ 5 \ , \ \frac{x}{2} + \frac{3}{5} \ , \ \frac{4}{x} + 5x^2 + 2$$

2. Si para todo entorno $N_r(L)$ existe un número positivo s tal que si $a - s < y < a$, entonces $f(x) \in N_r(L)$.

   ¿Qué es L de la función f(x)?

3. Expresar como producto de polinomios

$$q(x) = 27 + 54x + 36x^2 + 8x^3$$
$$r(x) = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

4. Escribir tres funciones con discontinuidad asintótica en los puntos $x_0 = 3$, $x_0 = -5$, $x_0 = 0$.

5. Entre cinco personas se repartieron 100 medidas de trigo de tal suerte que la segunda recibió más que la primera, tanto como le correspondió a la tercera más que a la segunda, a la cuarta más que a la tercera y a la quinta más que a la cuarta.

   Además, las dos primeras obtuvieron la séptima parte de las tres restantes. ¿Cuánto correspondió a cada una?

6. Debemos construir la parte cónica de un embudo valiéndonos de un círculo de hojalata. Para ello se corta un sector en dicho círculo y con el resto se construye un cono. ¿Cuántos grados debe tener el arco del sector que se ha cortado para que el embudo alcance la mayor capacidad posible?

7. Sea d(n) el número de divisores positivos del entero n. Probar que d(n) es impar si y solamente si n es cuadrado.

8. Hay n armarios todos cerrados y n hombres. Supón que el primer hombre abre cada armario. El segundo hombre cierra cada segundo armario (contando de dos en dos). El tercer hombre cambia de estado (es decir, si estaba abierto lo cierra, y viceversa) cada tercer armario (contando de tres en tres). Si este procedimiento se continúa hasta que todos los hombres hayan pasado por todos los armarios. ¿Qué armarios quedarán abiertos?

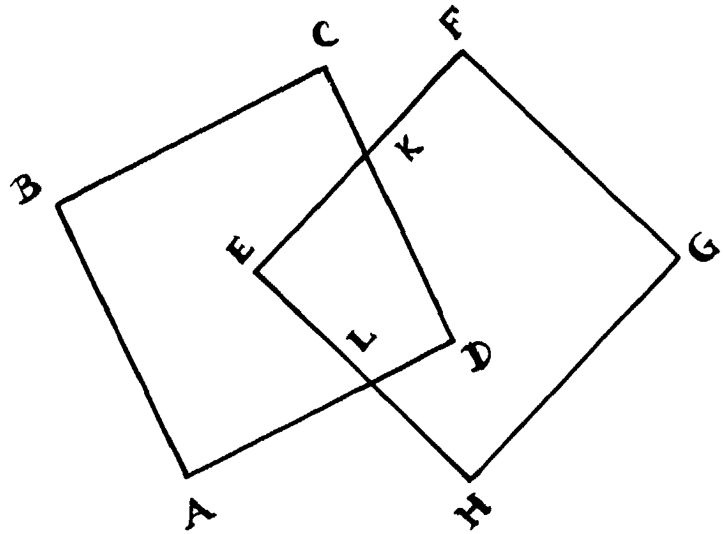
   Pista: Supón que n = 12 y averigua después de haber pasado los los 12 hombres qué armarios quedan abiertos. Intenta dar una regla general.

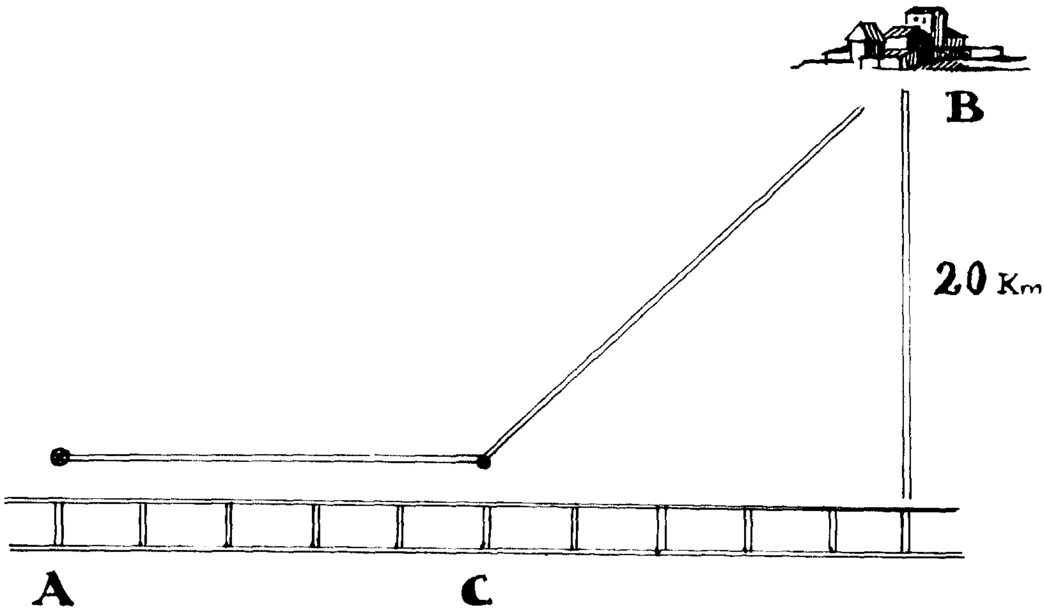
9. ¿Cuántos triángulos diferentes con lados de medida entera pueden ser dibujados teniendo el lado mayor longitud de 5 cm o de 6 cm? Intenta generalizar para n.

10. Escribir 525 como la suma de enteros consecutivos de todas las formas que sea posible.

11. Dos lados de un triángulo tienen longitudes de 4 cm y 6 cm. Hallar el perímetro y el área del triángulo.

12. ¿Qué valores son posibles para el área del cuadrilátero EKDL si ABCD y EFGH son cuadrados de lado 12 cm y E es el centro del cuadrado ABCD?





13. A 20 km del ferrocarril, por línea recta, está el lado B. ¿Dónde hay que construir el apeadero C para que en el viaje de A a B por la línea férrea AC y por la carretera CB se invierta el menor tiempo posible? La velocidad por ferrocarril es de 0,8 km/m y por carretera es de 0,2 km/minuto.

14. Un hombre que va a morir sabe que va a tener un heredero y hace el siguiente testamento:

    Deja un tercio de la herencia a la mujer y dos tercios al heredero si es niño.

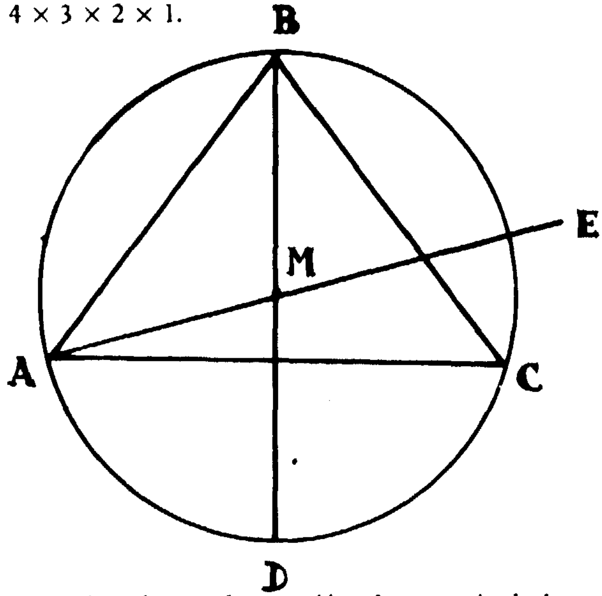
    Deja dos tercios a la mujer y un tercio al heredero si es niña. Nacen mellizos (niño y niña). ¿Cómo se repartirá la herencia?

15. Para 31 gallinas se ha preparado una cantidad de reservas de comida a base de 10 kg semanales para cada una. Esto se hacía en el supuesto de que el número de gallinas permaneciera invariable. Pero, debido a que cada semana disminuía en una el número de aves, la comida preparada duró doble tiempo del proyectado. ¿Qué cantidad de comida prepararon como reserva y para cuánto tiempo fue calculada?

16. Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesadas sacas. Lamentábase el jamelgo de su enojosa carga a lo que el mulo le dijo: ¿de qué te quejas? Si yo tomara un saco tuyo, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco tu carga se igualará a la mía. ¿Cuántas sacas llevaba cada uno?

17. ¿Para qué enteros positivos n, es n un factor del producto (n−1) (n−2) (n−3) × ..., 3 × 2 × 1?

Pista: 5 no es factor de 4 × 3 × 2 × 1, pero 6 sí lo es de 5 × 4 × 3 × 2 × 1.



18. Se trazan dos alturas de un triángulo a partir de los vértices A y B y hasta su intersección con la circunferencia circunscrita en los puntos E y D. Demostrar que los segmentos de las rectas que van desde el ortocentro M hasta la circunferencia quedan divididos en dos partes iguales por los correspondientes lados del triángulo.

Contestar a las siguientes preguntas:

1. Escribir en lenguaje matemático qué es lo que hay que contestar.
2. Buscar todas las propiedades, leyes y teoremas relacionados con lo que hay que demostrar.
3. Decir si hay que trazar sobre la figura algún segmento, lado o figura suplementaria.

19. Una familia quiere comprar un piso de 6.500.000 pesetas. Pagan de entrada 1.300.000 pesetas. La Caja de Ahorros le concede un crédito hipotecario de 1.750.000 a pagar en diez años al 14 %. Tienen que pedir un crédito personal para pagar la diferencia al 18 %. ¿Por cuántos años tiene que suscribir este crédito si la familia sólo puede abonar una renta de 55.000 pesetas mensuales, en las cuales deben estar comprendidos los intereses y la amortización?

20. Dedúzcase el término que tiene mayor coeficiente en el desarrollo

$$\left(2x + \frac{y}{3}\right)^{36}$$