

El surgimiento histórico del número irracional como instrumento didáctico

Carlos LÓPEZ FERNÁNDEZ *

1. Introducción

La historia de la Ciencia es una de las grandes olvidadas en los planes de estudio, no sólo del Bachillerato, sino de todos los niveles docentes.

Recientemente han aparecido algunas opiniones¹ sobre las ventajas que podría aportar su toma en consideración en los programas de B.U.P. La historia de la Ciencia, adecuadamente desarrollada como asignatura, aportaría a nuestros alumnos importantísimos aspectos formativos. Además de contribuir a que superaran esa falsa división entre Ciencias y Humanidades y facilitar la asimilación de ciertos conceptos científicos, podría ser utilizada como elemento desmitificador de las "verdades absolutas" de la Ciencia, colaborando así a una recepción antidogmática de los contenidos de ésta.

No es, sin embargo, el objetivo de

este trabajo el abogar por la institucionalización de la historia de la Ciencia como asignatura de B. U. P. Es tal la sobrecarga de los programas en el actual plan de estudios, que sería prácticamente injustificable el introducir ninguna nueva disciplina por importante que ésta fuese en la formación del alumno. El objetivo es mucho más modesto. Se trata de mostrar que la historia de la Ciencia, aunque no sea impartida como tal, puede y debe ser utilizada en el desarrollo académico de las diversas disciplinas como un elemento pedagógico y formativo más.

Aceptando la conveniencia de utilizar un enfoque historicista para ciertas ideas científicas, hay una polémica establecida sobre la forma de llevarlo a cabo. A la hora de utilizar la historia de la Ciencia para la introducción de un concepto científico, ¿debe ser consciente el alumno de que se le está reproduciendo el surgimiento histórico de ese concepto o, por el contrario, debe ocultársele? En

* Profesor agregado de matemáticas en el I. B. "Alfonso X el Sabio" (Murcia).

¹ Ver Lázaro y García Amengual.

otros términos, la historia de la Ciencia, puesta a ser utilizada didácticamente, ¿debe ser manejada implícita o explícitamente?². Muchas son las razones que podrían darse a favor de una u otra postura, pero tal vez lo más adecuado sea no renunciar a ninguna de ellas. La utilización de una u otra debe ir en función del objetivo concreto que se pretenda conseguir.

El presente trabajo ofrece una experiencia, llevada a cabo con alumnos de 1.º de B. U. P. del I. B. "Alfonso X el Sabio" (Murcia), sobre cómo utilizar en concreto la historia de la Matemática para la introducción de un concepto matemático: el número irracional. En la experiencia el enfoque historicista se maneja desde un punto de vista implícito pero, como se indicará al final, también es posible su utilización explícita.

2. Surgimiento del número irracional: problemas didácticos

La entrada en escena del número irracional es bastante similar en todos los textos de 1.º de B. U. P. Matices aparte, casi todos los autores siguen el siguiente esquema:

- Análisis de la biyección existente entre el conjunto Q de los números racionales y el conjunto de las expresiones decimales infinitas periódicas.
- Representación gráfica de los elementos de Q sobre una recta

² Simposio sobre la historia de la Ciencia en la Enseñanza (Valencia, mayo 1980). Ambas posturas fueron ampliamente debatidas en el coloquio que tuvo lugar tras la ponencia presentada por F. Hernán (Grupo Cero), sobre "Enseñanza e historia de las Matemáticas en el BUP".

graduada mediante una unidad arbitrariamente elegida. La recta así completada, recta racional, es inmediatamente aplicada a la medida de longitudes desconocidas.

- Demostración, mediante reducción al absurdo, de la no pertenencia a Q de una expresión decimal infinita. Suele ser escogida la que se obtiene de calcular el radical $\sqrt{2}$.
- Esa expresión decimal irracional es a continuación representada mediante un punto, en la recta racional. Así se hace ver al alumno la insuficiencia de esta recta para la medida de longitudes.
- El proceso suele terminar con la definición genérica del conjunto R de los números reales y la representación gráfica, mediante intervalos encajados, de cualquiera de sus elementos en la hasta ahora llamada recta racional. Esta recta pasa a ser llamada real y es ofrecida al alumno como solución definitiva al problema de la medición y comparación de longitudes.

Este método, impecable desde el punto de vista matemático, ofrece algunos inconvenientes didáctico-metodológicos. Justo al contrario de como históricamente sucedió, el alumno quedará con la idea de que un buen día se demostró la irracionalidad de $\sqrt{2}$; en función de ello se construyó el conjunto R de los números reales (rationales e irracionales), aplicándose posteriormente éste a la medición y comparación de longitudes. Creerá seguramente que el número irracional, en lugar de ser una creación de nuestra mente para dar solución a un problema concreto, era algo que ya

estaba ahí antes de que el hombre pensara en él, algo que tenía poco menos que vida propia antes de su descubrimiento. Alguna mente humana lo encontró, lo desempolvó y lo presentó a los demás como solución al problema de la medida.

Este ahistoricismo puede ser, a la larga, negativo para el alumno, pues a base de repetírselo, tanto en ésta como en otras cuestiones matemáticas, le vamos inculcando, tema a tema y pregunta a pregunta, algo así como la existencia de un mundo de las Ideas Matemáticas (aquí Platón se apuntaría un buen tanto), al cual ciertas mentes privilegiadas tienen acceso, sólo de cuando en cuando, para contemplar esas ideas, recogerlas y traerlas hasta nosotros.

Junto a este inconveniente, el método expuesto presenta otro, que no por tópico es menos cierto. El esquema inicial de introducción del número irracional está preparado para ser enseñado de una forma muy concreta: explicación del profesor en la pizarra y toma de apuntes por parte del alumno. Se condena así a éste, una vez más, a ser un mero elemento pasivo-receptor de unos conocimientos previamente elaborados.

Los inconvenientes antes expuestos pueden obviarse en buena parte, al menos en este punto concreto del programa, si el método tradicional es reforzado (que no linealmente sustituido) con un planteamiento más historicista del problema. Si el número irracional surgió como una necesidad precisa para poder comparar longitudes y no al revés³, ¿por qué no ha-

cer que el alumno compare, con sus propias manos, longitudes y vea que para ello no le es suficiente con el número racional?, ¿por qué no dejarle planteado este problema el día antes de iniciar el tema primero de los dedicados a números reales, y hacerle ver unas clases más tarde que con los "nuevos" números que ha introducido en esos temas sí puede resolverlo? En otras palabras, ¿por qué no recurrir a plantearle al alumno el problema en los mismos términos en que los pitagóricos se toparon con él?

Es evidente que este enfoque histórico no es ninguna panacea didáctica, pero tiene sus ventajas. No evita el tener que reproducir el esquema tradicional, pero sí refuerza y rectifica a éste en unas direcciones muy concretas: acorta algo su exposición ulterior, hace que el alumno tome parte activa en el tema y, probablemente, le muestra con más claridad que ningún otro la necesidad de ampliar Q .

Esbozada ya la utilidad de plantear el problema del surgimiento de los números irracionales en unos términos historicistas, pasamos a ver cómo fue llevado esto a la práctica en una clase de 1.º B. U. P.⁴

cuela pitagórica (s. V, a. d. c.), en tanto que el primer intento de elevar el cociente entre diagonal y lado a la categoría de número no se da hasta Eudoxo (siglo IV a. d. C.).

⁴ En su aspecto teórico esta experiencia fue esbozada y debatida en la III Escuela de Verano de la Región Murciana, junto con otras similares dedicadas todas ellas a la aplicación didáctica de la historia de la Ciencia. El equipo de trabajo, dirigido por el profesor P. Marset (Universidad de Murcia), lo componían M. Valera, M. A. Iniesta y el firmante.

³ La prueba sobre la incómensurabilidad diagonal-lado fue aportada por la es-

3. Desarrollo de la experiencia

La clase comenzó motivando al alumno sobre la utilidad práctica que la comparación de longitudes ha tenido en cualquier época histórica. Muchos son los ejemplos que se le pueden ofrecer en este sentido; citaremos sólo uno. Dibujando en la pizarra dos segmentos A y B , con $A > B$, puede suponerse que fueran las unidades de longitud de dos naciones antiguas distintas. Es evidente que para poder entenderse en ciertos intercambios comerciales les sería imprescindible el establecer la proporción que guardan entre sí las longitudes de ambos segmentos, es decir, tendríamos que comparar éstas.

En algunos casos la comparación será elemental, esto ocurrirá cuando A contenga un número exacto de veces a B . Si es n este número, la com-

paración la expresaríamos diciendo: la longitud A es a la longitud B como n es a 1.

Naturalmente, esto sólo sucederá en contadas ocasiones. Lo normal será que no se cumpla la condición expresada en el párrafo anterior. Entonces la cosa se complica y el encontrar la relación de comparación requiere métodos más generales. Abordémoslos.

Una vez dibujados en la pizarra dos segmentos cuyas longitudes no guardaban una relación de proporcionalidad evidente, se propuso a los alumnos el siguiente método para encontrarla (ver fig. 1).

Manejando como único instrumento para las traslaciones las esquinas de un folio en blanco, trasladar el segmento B sobre el A , determinando así el segmento sobrante, C , el cual se trasladará a la derecha de B . Tendremos entonces:

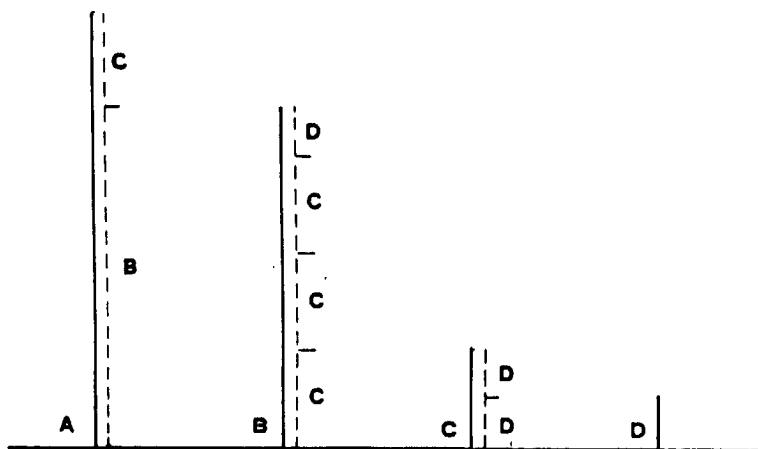


Figura 1

$$A = B + C \quad [1]$$

A continuación se traslada el segmento C sobre el B . Como la longitud sobrante es claramente mayor que C , éste se traslada hacia arriba las veces necesarias hasta que la longitud sobrante no exceda la del segmento C . Según se desprende de la figura:

$$B = 3C + D \quad [2]$$

Procediendo de forma análoga, se traslada D a la derecha de C y vuelve a llevarse ahora D sobre C , resultando en este caso una comparación exacta, ya que, según se desprende de la gráfica, C es doble que D . Entonces:

$$C = 2D \quad [3]$$

Una vez obtenida una comparación exacta, es elemental el obtener la relación de proporcionalidad a partir de [1], [2] y [3].

Bastaría con hacer:

$$A = B + C \quad [1]$$

$$B = 3C + D \quad [2]$$

$$C = 2D \quad [3]$$

de donde

$$B = 7D \quad \text{y} \quad A = 9D$$

Luego A es a B como 9 es a 7. Las longitudes ya están comparadas. Preguntados los alumnos sobre si este método sería válido para la comparación de dos longitudes cualesquiera, la respuesta fue ostentosamente afirmativa. Consideraron, al inquirirles el porqué, que debería ser una mera cuestión de paciencia el encontrar la relación a través de la comparación relativa de las longitudes sobrantes.

Al objeto de que comenzaran ya a tomar parte activa en la clase se les propuso que ellos mismos desarrollaran, en ese momento y según la técnica explicada, dos ejemplos prácticos de comparación de longitudes.

En el primer ejemplo se les entregó como único material una hoja fotocopiada con la gráfica que puede verse en la figura 2.

Naturalmente, A y B eran las longitudes a comparar. Las líneas auxiliares situadas a la derecha de ambos podían ser utilizadas para trasladar los segmentos sobrantes (C , D , etc.), evitando de esta forma el uso de escuadra y cartabón. Las traslaciones sucesivas las iban haciendo, al igual que en el ejemplo desarrollado en la pizarra, mediante la simple utilización de las esquinas de un folio en blanco.

Este primer ejemplo había sido previamente preparado de forma que ambas longitudes guardaban una relación sencilla, aunque no visible a simple vista. Como fácilmente podía determinarse con la técnica antes expuesta, la relación era: A es a B como 5 es a 3. Este resultado fue encontrado en apenas cinco minutos por la totalidad de la clase. La unanimidad fue absoluta.

Se pasó entonces al segundo ejemplo. En ese momento la confianza de los alumnos en la infalibilidad del método de comparaciones sucesivas era prácticamente total. Una nueva comparación (ver fig. 3) les fue propuesta.

Según podían comprobar antes de empezar, A correspondía a la longitud de la diagonal del cuadrado y B a la del lado. Comenzado el ejercicio, y conforme iban reproduciendo los pasos dados en ejemplos anteriores, el desconcierto comenzó a cundir. Mientras unos con sólo dos o

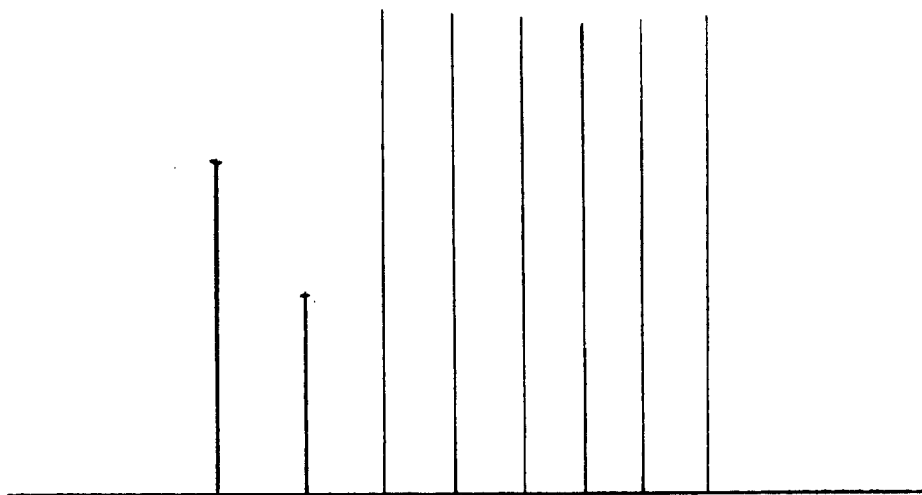


Figura 2

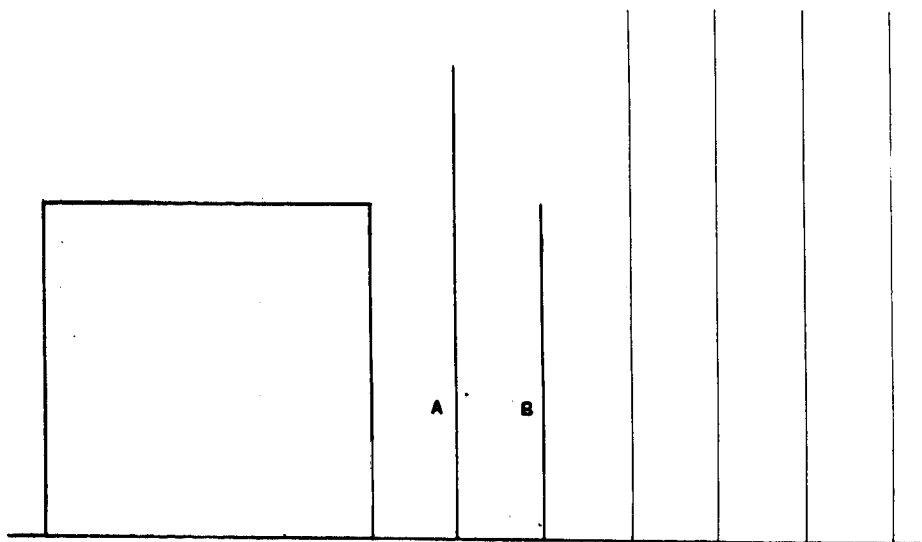


Figura 3

tres traslaciones ya habían llegado a un resultado, otros iban ya por la quinta o sexta y aún no conseguían llegar a la comparación exacta que les permitiera cortar el proceso. Finalmente, todos los alumnos, salvo seis, llegaron a un resultado concreto. Recogidas las hojas, se fueron anotando en la pizarra las proporciones de longitud obtenidas. Ante la extrañeza general observaron cómo donde antes se había dado unanimidad absoluta, ahora aparecían hasta un total de doce resultados distintos (totalmente dispares además; ej.: $13/5$, $40/27$, $8/7$, $7/5$, etc.), sobre un conjunto de veintisiete alumnos que llegaron a una solución concreta.

Aun con la evidencia del fracaso en el segundo ejemplo, fue recibida con incredulidad la afirmación del profesor de que esa enorme discrepancia de resultados era debida a que la relación de proporcionalidad entre las longitudes de la diagonal y el lado no era posible encontrarla mientras sólo manejaran números racionales. Si individualmente la habían creído encontrar era porque, debido a las limitaciones de sus sentidos, en un momento dado del proceso creían haber llegado a una comparación exacta que rigurosamente no lo era.

La demostración matemática sobre la imposibilidad de encontrar la relación de proporcionalidad diagonal-lado, expuesta a continuación en la pizarra, fue seguida con auténtica expectación. Como es sabido, dicha demostración puede ser efectuada de diversas maneras. En este caso, y dado que aún no se había hablado para nada de fracciones generatrices ni de expresiones decimales infinitas, se efectuó de la siguiente forma ⁵:

- Conocimientos previos: Par \times Par = par; impar \times impar = impar.
- Hipótesis de partida: Aceptemos que ha sido posible el comparar la diagonal y el lado, siendo p/q la relación de proporcionalidad obtenida, en la cual p y q son enteros primos entre sí.
- Demostración: si es cierta la hipótesis, podríamos considerar p y q como las longitudes de la diagonal y el lado, respectivamente. Como teorema de Pitágoras $p^2 = 2q^2$, valdría el siguiente razonamiento:

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ es par} \Rightarrow p \cdot p \\ \text{es par} \Rightarrow p \text{ es par.}$$

Claro que, si p es par, entonces tendríamos que $p = 2r$, y

$$p = 2r \Rightarrow p^2 = 4r^2 \Rightarrow 2q^2 = 4r^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow q^2 = 2r^2 \Rightarrow q^2 \text{ es par} \Rightarrow q \cdot q \text{ es} \\ \text{par} \Rightarrow q \text{ es par.}$$

Como dos números pares no pueden ser primos entre sí, hay que considerar falsa la hipótesis de partida y dar por demostrado el hecho de que no es posible encontrar la relación diagonal-lado.

El problema de encontrar esta relación quedaba entonces, al menos de momento, sin solución. Finalmente, se les anunció a los alumnos que, en los temas del programa a desarrollar en días sucesivos, serían introducidos unos nuevos números, llamados irracionales, los cuales nos permitirían dar solución cumplida al problema planteado.

⁵ Ver Newman, R.

Naturalmente, al reproducir la demos-

tración tal y como lo hacía la escuela pitagórica, se han utilizado los símbolos algebraicos modernos.

4. Conclusiones

Según se desprende del desarrollo de la experiencia, han sido cubiertos varios objetivos. A saber:

a) El alumno ha participado activamente en la clase.

b) El alumno adquiere conciencia de que hay un problema concreto, que puede tener una proyección práctica, imposible de solucionar en tanto sólo maneje el campo numérico Q .

c) El alumno recibirá a continuación una serie de clases sobre la construcción y posterior tratamiento teórico del conjunto R . Se le habrá hecho ir entonces de un problema concreto a una teoría construida inicialmente *ad hoc* para resolverlo. No obstante, podrán observar cómo dicha teoría alcanza posteriormente desarrollos autónomos, los cuales desbordan y arrinconan al problema inicial que la produjo. A su vez, observarán cómo más adelante pueden aplicar unos desarrollos a problemas prácticos. ¿No se le ha hecho recorrer, de esta forma, el proceso generador de la Matemática?

d) El alumno, sin saberlo, habrá reproducido la aparición del número irracional tal y como históricamente se produjo. Ha vivido la historia de la Matemática como un elemento más dentro del aprendizaje de ésta.

Dejando ya aparte las conclusiones concretas de esta experiencia, debe desprenderse de todo lo expuesto que la utilización de la historia de la Ciencia como elemento didáctico es un apoyo nada desdeñable.

¿Quiere esto decir que hemos de ir a una reelaboración de los programas de B. U. P., para poder abordar todos los conceptos matemáticos desde un punto de vista histórico? Tajantemente, no. Esto sería no sólo disparatadamente ambicioso, sino, en muchos

casos, didácticamente desastroso. Es innegable que ciertos conceptos matemáticos, enfocados desde el punto de vista de su surgimiento histórico, no harían sino complicar e incluso distorsionar las ideas expuestas. Pero igual de innegable es que en ciertos puntos de los programas de B. U. P., el enfoque histórico sí puede ser extremadamente positivo.

La experiencia que hemos referido ha tomado a la historia como variable implícita. No obstante, y precisamente este mismo tema, puede ser desarrollado mediante enfoque histórico explícito. Terminaremos indicando que también así ha sido utilizado, concretamente como complemento a las explicaciones de la profesora de Filosofía (C. O. U.), en torno a la crisis del sistema filosófico pitagórico. Los alumnos, con las correcciones de planteamiento adecuadas, reprodujeron el problema de la comparación diagonal-lado como una de las claves de dicha crisis.

Bibliografía

1. LÁZARO, I.: "Reflexiones históricas sobre la didáctica de la Ciencia", en *Revista de Bachillerato*, núm. 16, octubre-diciembre, 1980.
2. GARCÍA AMENGUAL, C.: "Algunas reflexiones sobre los objetivos de las Matemáticas", en *Revista de Bachillerato*, núm. 16, octubre-diciembre 1980.
3. NEWMAN, R.: *Sigma, el mundo de la Matemática*. Ed. Grijalbo, Barcelona, 1974.
4. HOFMANN: *Historia de las Matemáticas*. Ed. Uteha, México, 1960.
5. ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N., y LAURENTIEV, M. A.: *La Matemática: Su contenido, método y significado*. Ed. Alianza Universidad, Madrid, 1973.
6. COLERUS, E.: *Breve historia de las Matemáticas*. Ed. Doncel, Madrid, 1972.
7. *Actas del Simposio sobre la historia de las Ciencias y la Enseñanza*. Ed. Universidad de Valencia, Instituto de Ciencias de la Educación, Valencia.