Un modo asequible de iniciarse en la combinatoria

M.ª Teresa GONZÁLEZ MANTEIGA *

Uno de los objetivos fundamentales de la combinatoria es la resolución de problemas de recuento como los que enunciamos a continuación:

1. ¿De cuántas formas distintas se puede elegir delegado, subdelegado y asesor de un grupo de 40 alumnos?
2. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar diez personas en una fila de diez butacas numeradas?
3. ¿Cuántas quinielas distintas de 14 partidos se pueden rellenar?
4. ¿De cuántas fichas consta el juego del dominó?
5. ¿De cuántas formas se puede elegir una comisión de tres personas, para realizar un trabajo en equipo, de un grupo de 46?
6. En una carrera participan cinco corredores, tres del equipo blanco y dos del equipo naranja, ¿cuántas *clasificaciones individuales* distintas se pueden dar, si se clasifican los cinco corredores?
7. ¿Cuántas *clasificaciones por equipos* distintas se pueden dar en la carrera del ejercicio anterior?

Para intentar resolver problemas como éstos, es necesario tener bien claro:

1.º Quién es el conjunto A, que llamaremos *alfabeto*, con el que se escriben los resultados.

2.º Cuántos elementos buscamos.

3.º Si en el grupo de k elementos que buscamos es importante el orden.

* Profesora de matemáticas en la Escuela universitaria de Ingenieros Técnicos de Montes y en el C. E. U.

4.° Si en estos grupos de k elementos han de estar necesariamente todos los elementos de A.

5.° Si en estos grupos de k elementos puede haber alguno repetido.

Teniendo en cuenta esto, los podemos resolver poniendo a funcionar el organigrama de la página siguiente.

- Así, *en el ejemplo núm. 1*

¿Quién es el conjunto A? Será el conjunto formado por los 40 alumnos de la clase. Por tanto, $n = 40$.

¿Cuántos elementos buscamos de A? Tres; por tanto, $k = 3$.

¿Importa el orden de estos k elementos? Evidentemente, *sí*, ya que el primero será el delegado; el segundo, el subdelegado, y el tercero, el asesor.

¿Tienen que estar necesariamente todos los elementos de A en el grupo buscado? *No*, ya que buscamos tres y podemos elegirlos entre 40.

¿Puede aparecer algún elemento repetido entre los tres buscados? *No*, ya que en este caso no tendríamos tres representantes.

Por tanto, la salida correspondiente a este ejercicio es la núm. 3 del organigrama y nos indica que el número de resultados es $V_{40,3}$.

- *En el ejemplo núm. 2*

$A = \{ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10} \}$, el conjunto formado por las diez personas, $n = 10$.

$k = 10$, pues se van a sentar las diez personas.

Sí importa el orden de las diez personas.

Sí tienen que estar todos los elementos de A.

No puede repetirse ningún elemento de A.

La salida en este caso es la núm. 5 y, por tanto, el número de resultados es $P_{10} = V_{10,10}$.

- *En el ejemplo núm. 3*

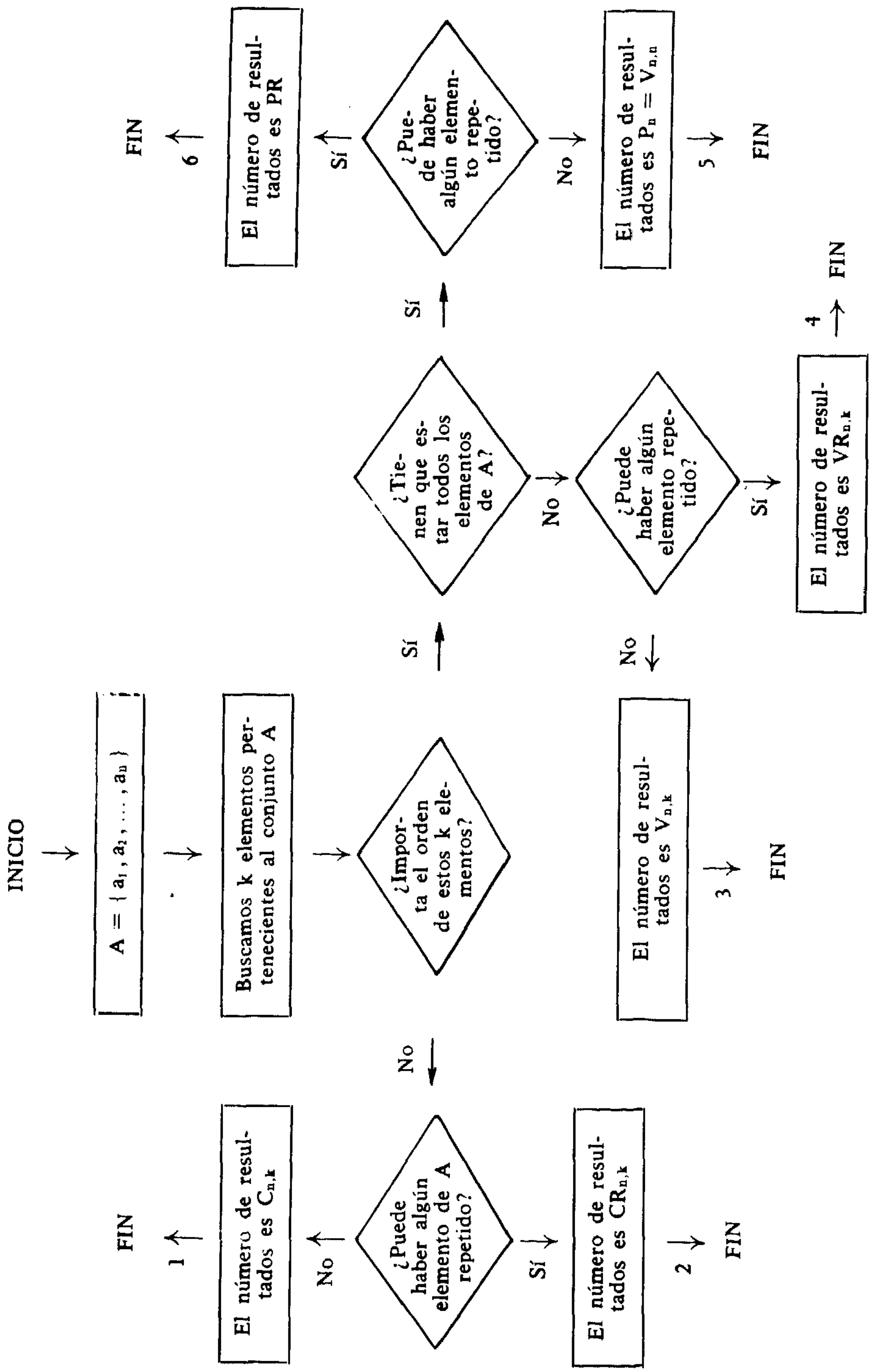
$A = \{ 1, X, 2 \}$, ya que el *alfabeto* para escribir las quinielas consta de estos tres símbolos, $n = 3$.

$k = 14$, ya que vamos a escribir quinielas de 14 partidos y, por tanto, buscamos 14 resultados. Ejemplo:

$1, X, 1, X, 1, 1, 1, 1, 1, 1, X, X, 1, 1$ es una quiniela.

Sí importa el orden de los 14 elementos.

No tienen que estar necesariamente todos los elementos de A; por ejemplo, en la quiniela anterior no aparece el 2.


INICIO
A = { a_1, a_2, ..., a_n }
Buscamos k elementos pertenecientes al conjunto A
¿Importa el orden de estos k elementos?
No
¿Puede haber algún elemento de A repetido?
No
El número de resultados es $C_{n,k}$
1
FIN
Sí
El número de resultados es $CR_{n,k}$
2
FIN
Sí
¿Tienen que estar todos los elementos de A?
No
¿Puede haber algún elemento repetido?
No
El número de resultados es $V_{n,k}$
3
FIN
Sí
El número de resultados es $VR_{n,k}$
4
FIN
Sí
¿Puede haber algún elemento repetido?
Sí
El número de resultados es PR
6
FIN
No
El número de resultados es $P_n = V_{n,n}$
5
FIN

Sí puede haber algún elemento de A repetido.

La salida en el organigrama es la núm. 4 y, por tanto, el número de quinielas distintas es $VR_{3,14}$.

- *En el ejemplo núm. 4*

El alfabeto es ahora: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, si convenimos en que *0* representa blanca, *1* un punto, 2 dos puntos, etc. Luego, $n = 7$.

$k = 2$, ya que las fichas de dominó constan de dos casillas. Ejemplo: blanca doble será *0-0*, uno-blanca será *1-0*, cinco-seis es *5-6* y seis doble es *6-6*.

No importa el orden de los dos elementos que buscamos, ya que sólo hay una ficha con un cinco y un seis.

Sí puede haber algún elemento de A repetido, ya que existe la ficha tres doble, es *3-3*.

La salida correspondiente en el organigrama es la núm. 2 y de ahí que el número de fichas de dominó es $CR_{7,2}$.

- *En el ejemplo núm. 5*

A es el conjunto formado por las 46 personas, $n = 46$.

$k = 3$, pues buscamos tres personas.

No importa el orden de los elementos, pues no se les da cargos distintos.

No puede haber ningún elemento de A repetido, pues el equipo no sería de tres personas.

La salida correspondiente es la núm. 1 y el número de resultados posibles es $C_{46,3}$.

- *En el ejemplo núm. 6*

$A = \{ B_1, B_2, B_3, N_4, N_5 \}$, indicando el color de la camiseta, blanca o naranja, y el número de dorsal de cada corredor, *1, 2, 3, 4, 5*. Es $n = 5$.

$k = 5$.

Sí importa el orden de los cinco corredores.

Sí tienen que estar todos en la *clasificación individual.*

No puede haber ningún corredor repetido.

En consecuencia, la salida es la núm. 6 y el número de *clasificaciones individuales* es $P_5 = V_{5,5}$.

- *En el ejemplo núm. 7*

$A = \{ B, N \}$, pues sólo nos fijamos en los equipos de los ciclistas. Tenemos cinco ciclistas, tres del equipo blanco y dos del equipo naranja.

Buscamos cinco elementos que han de ser necesariamente tres blancos y dos naranjas.

Sí importa el orden de llegada.

Sí tienen que estar todos los elementos de A en cada *clasificación por equipos*, ya que tiene que haber en todas ellas tres con camiseta blanca y dos con camiseta naranja.

Sí puede haber algún elemento de A repetido, ya que necesariamente tienen que aparecer tres con camiseta blanca y dos con camiseta naranja.

La salida es la núm. 6 y el número de *clasificaciones por equipos* es $PR_5^{3,2}$, permutaciones con repetición de cinco elementos, de los que tres son del equipo blanco y dos del equipo naranja.

Como consecuencia, podemos observar que en la primera pregunta del organigrama: ¿Importa el orden de los k elementos?, si la respuesta es *NO* se trata de *combinaciones*, y en el caso de que la respuesta sea *SÍ* pueden ser *variaciones* o *permutaciones*. Para distinguirlas hacemos la pregunta: ¿Tienen que estar todos los elementos de A?, si la respuesta es *SÍ* se trata de *permutaciones* y si la respuesta es *NO* se trata de *variaciones*. La última pregunta en todas las salidas sirve para distinguir las combinaciones ordinarias de las combinaciones con repetición, las variaciones ordinarias de las variaciones con repetición y las permutaciones ordinarias de las permutaciones con repetición.

Es ahora el momento de deducir las fórmulas y de formar las variaciones con y sin repetición, las permutaciones ordinarias, las permutaciones con repetición y las combinaciones.

Variaciones con repetición

Si $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ el conjunto de las variaciones con repetición de orden k formadas con los elementos de A es el producto cartesiano $AxAx \ldots$ $\ldots xA = A^k$.

Ejemplo: si $A = \{ a, b, c \}$ vamos a formar el conjunto de las variaciones con repetición de orden *1*, *2* y *3*. (Vid. Fig. 1).

Esta representación se conoce con el nombre de diagrama de árbol.

Observa que el conjunto de las variaciones con repetición de orden *2* se forman a partir de las variaciones de orden *1* (cada uno de los elementos de A) añadiendo a su derecha cada uno de los elementos de A; las de orden *3* se forman a partir de las de orden *2* añadiendo a su derecha cada uno de los elementos de A, y así sucesivamente.

El número de variaciones con repetición de orden k formadas con los n elementos del conjunto A lo escribiremos así: $VR_{n,k}$.

$$VR_{3,1} = 3 \; ; \; VR_{3,2} = 3 \cdot 3 = 3^2 \; ; \; VR_{3,3} = 3^3 \; ; \; \ldots \; ; \; VR_{3,k} = 3^k$$

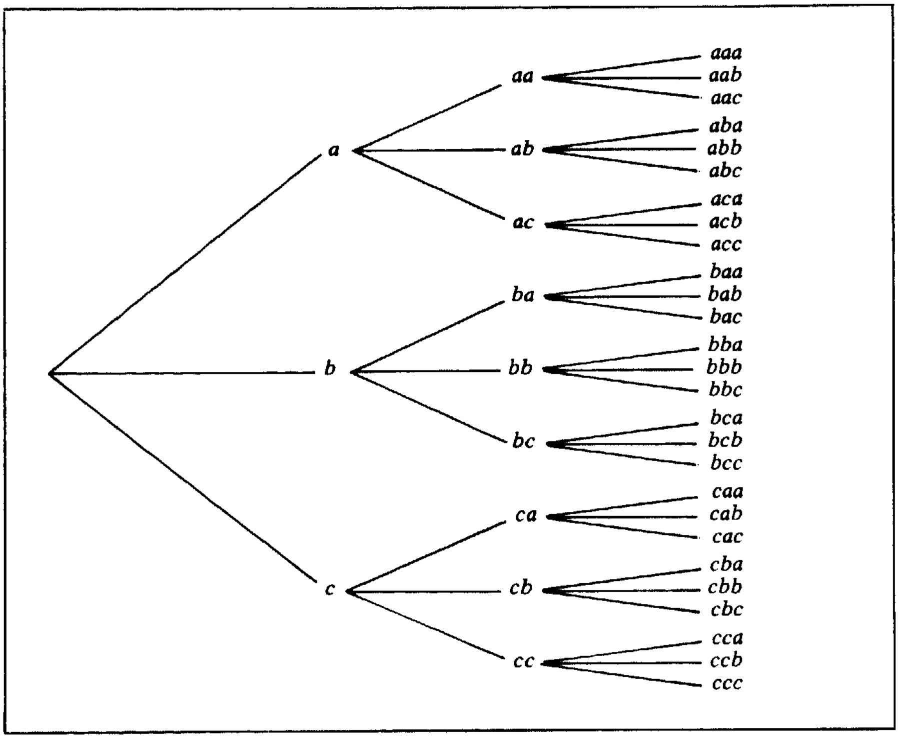


Figura 1

Si el conjunto A tiene n elementos, a partir del diagrama de árbol se deduce que:

$$VR_{n,1} = n \ ; \ VR_{n,2} = n^2 \ ; \ VR_{n,3} = n^3 \ ; \ \dots \ ; \ \boxed{VR_{n,k} = n^k}$$

siendo k cualquier número natural positivo.

Variaciones ordinarias

El conjunto de las variaciones (o variaciones ordinarias) de orden k formadas con los n elementos del conjunto A es el subconjunto A^k formado por aquellas variaciones en las que no aparece ningún elemento de A repetido.

Ejemplo: Si $A = \{a, b, c\}$ vamos a formar el conjunto de las variaciones de orden *1, 2, 3.*

No existen variariones ordinarias de orden superior al número de elementos de A; sin embargo, sí existen variaciones con repetición de orden k, siendo $k > n$.

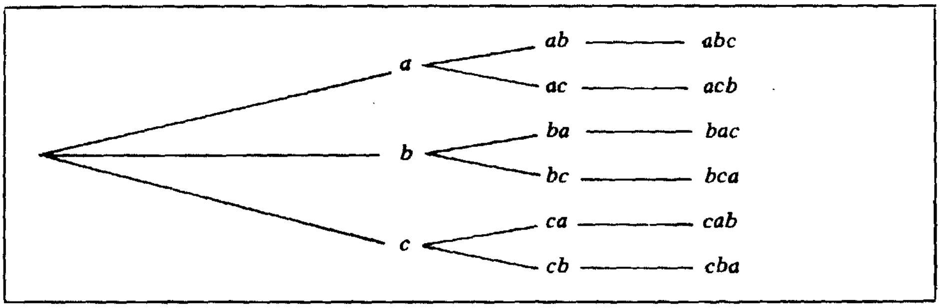


Figura 2

Las variaciones ordinarias de orden *2* se obtienen a partir de cada uno de los elementos de A (variaciones de orden *1*) añadiendo a su derecha todos los elementos de A salvo el que está escrito; las de orden *3*, añadiendo a la derecha de las de orden *2* cada uno de los elementos de A, salvo los que forman esa variación, y así sucesivamente, hasta llegar a las variaciones de orden n si A tiene n elementos.

El número de variaciones (o variaciones ordinarias) de orden k formadas con los n elementos del conjunto A, lo escribiremos así: $V_{n,k}$.

$$V_{3,1} = 3 \ ; \ V_{3,2} = 3.2 \ ; \ V_{3,3} = 3.2.1$$

Si el conjunto A tiene n elementos, del diagrama del árbol obtenemos:

$$V_{n,1} = n \ ; \ V_{n,2} = n(n-1) \ ; \ V_{n,3} = n \cdot (n-1)(n-2) \ ; \ \dots \ ;$$

$$V_{n,k} = n(n-1)(n-2) \dots [n-(k-1)] = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1).$$

$$V_{n,n} = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1 = n!$$

$$\boxed{V_{n,k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ siendo } 0 < k \leq n, k \in N}$$

Permutaciones ordinarias

Las variaciones ordinarias de orden n formadas con los n elementos del conjunto A se llaman permutaciones ordinarias de los elementos de A.

Para formar las permutaciones de los n elementos de un conjunto A basta con formar las variaciones ordinarias de orden n.

El número de permutaciones ordinarias de los n elementos de un conjunto A, lo indicaremos por P_n.

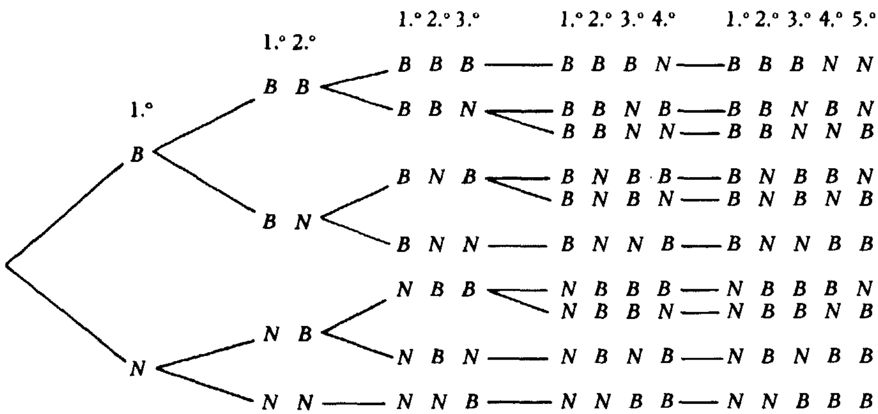
$$\boxed{P_n = V_{n,n} = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1 = n!}$$

Permutaciones con repetición

Empezaremos con nuestro ejemplo.

En una carrera participan cinco corredores, tres del equipo blanco y dos del equipo naranja. ¿Cuántas *clasificaciones por equipos,* distintas, se pueden dar?

Suponemos que los corredores del equipo blanco llevan dorsales *1, 2, 3* y que los del equipo naranja llevan dorsales *4* y *5.* Las distintas *clasificaciones por equipos* son:



Hay diez *clasificaciones por equipos.*

En este caso el diagrama de árbol no sirve para calcular el número de permutaciones con repetición.

El número de *clasificaciones por equipos* de estos cinco corredores, tres del equipo blanco y dos del equipo naranja lo indicaremos por $PR_5^{3,2}$.

Por cada una de estas *clasificaciones por equipos,* si observamos el número del dorsal de cada corredor, obtenemos $P_3 \cdot P_2 = 3! \cdot 2! = 12$ *clasificaciones individuales* diferentes. En efecto, las *12 clasificaciones individuales* siguientes corresponden a la misma *clasificación por equipos: BBBNN,*

$B_1B_2B_3N_4N_5$	$B_1B_2B_3N_5N_4$
$B_1B_3B_2N_4N_5$	$B_1B_3B_2N_5N_4$
$B_2B_1B_3N_4N_5$	$B_2B_1B_3N_5N_4$
$B_2B_3B_1N_4N_5$	$B_2B_3B_1N_5N_4$
$B_3B_1B_2N_4N_5$	$B_3B_1B_2N_5N_4$
$B_3B_2B_1N_4N_5$	$B_3B_2B_1N_5N_4$

Sabemos que el número total de *clasificaciones individuales* es $P_5 = 5! = 120.$

El número de *clasificaciones por equipos,* 10, multiplicado por $P_3 \cdot P_2 = 12$ *clasificaciones individuales,* que corresponden a la misma *clasificación por equipos,* da 120 *clasificaciones individuales.* Es decir:

$$PR_5^{3,2} \cdot P_3 \cdot P_2 = P_5$$

por tanto:

$$PR_5^{3,2} = \frac{P_5}{P_3 \cdot P_2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

Análogamente si fueran nueve corredores, cuatro del equipo blanco, tres del equipo naranja y dos del equipo azul, el número de *clasificaciones por equipo* sería:

$$PR_9^{4,3,2} = \frac{P_9}{P_4 \cdot P_3 \cdot P_2} = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$$

ya que por cada *clasificación por equipos,* por ejemplo, *BBBBNNNAA,* se obtienen $P_4 \cdot P_3 \cdot P_2$ *clasificaciones individuales.*

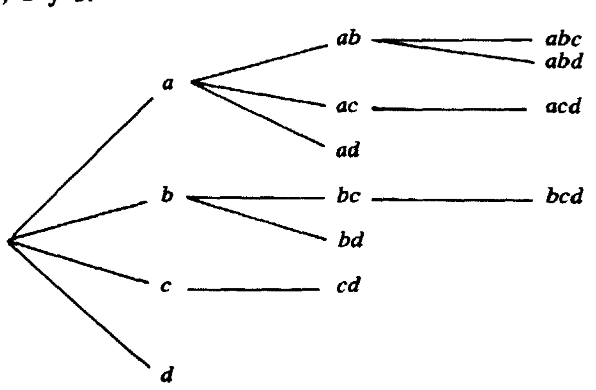
En general el número de permutaciones con repetición de n elementos de los que h_1 son iguales a a_1, h_2 son iguales a a_2, ..., h_k son iguales a a_k y siendo $h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_k = n$ viene dado por:

$$\boxed{PR_n^{h_1, h_2, \ldots, h_k} = \frac{n!}{h_1! \cdot h_2! \ldots h_k!}}$$

Combinaciones ordinarias

Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ las combinaciones ordinarias de orden k formadas a partir de los n elementos de A son los subconjuntos de A de cardinal k, esto es, subconjuntos de A que tengan k elementos.

Así, si $A = \{a, b, c . d\}$ vamos a formar las combinaciones de orden *1,* 2 y *3:*



Para formar las combinaciones de orden *2*, a partir de las de orden *1*, se escribe a la derecha de cada uno de los elementos de *A* todos los que le siguen en el conjunto *A*, con el objeto de contar cada subconjunto sólo una vez.

Como ocurría en el caso de las permutaciones con repetición, el diagrama de árbol no nos sirve para contar el número de combinaciones.

Escribiremos $C_{n,k}$ para indicar el número de combinaciones de orden k formadas con los n elementos de un conjunto A.

Teniendo en cuenta que por cada combinación de orden *3* se obtienen *3!* variaciones ordinarias. Ejemplo:

$$\{a, b, c\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} abc \\ acb \\ bac \\ bca \\ cab \\ cba \end{array}\right. \quad P_3 = 3! \text{ variaciones}$$

el número de combinaciones ordinarias de orden *3* multiplicadas por el número de permutaciones de los tres elementos da el número de variaciones ordinarias de orden *3*, es decir:

$$C_{n,3} \cdot P_3 = V_{n,3}$$

de donde:

$$C_{n,3} = \frac{V_{n,3}}{P_3} = \frac{\frac{n!}{(n-3)!}}{3!} = \frac{n!}{3!\,(n-3)!}$$

Del mismo modo:

$$C_{n,k} \cdot P_k = V_{n,k}$$

y por tanto:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Se suele escribir:

$$\boxed{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{siendo } 0 \leq k \leq n\ ,\ k \in N}$$

Observa que sólo existen combinaciones ordinarias de orden k, siendo $k \leq n$.

Combinaciones de repetición

Empezaremos con nuestro ejemplo:

¿De cuántas fichas consta el juego del dominó?

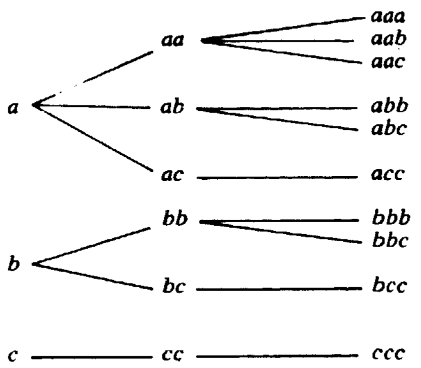
Convenimos en que *0* representa blanca, *1* representa un punto, *2* representa dos puntos, etc.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y las fichas de dominó son:

0-0, 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5, 0-6, 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 4-4, 4-5, 4-6, 5-5, 5-6, 6-6.

Para formar las combinaciones de orden *2* se escriben a la derecha de cada elemento de *A*, este elemento y los que le siguen en el conjunto *A*. Para formar las de orden *3* se escribe a la derecha de cada una de las de orden *2* el último elemento de esa combinación de segundo orden y todos los que le siguen en el conjunto *A*, y así sucesivamente.

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$ vamos a formar las combinaciones con repetición de orden *1*, *2* y *3*:



De nuevo no nos sirve el diagrama de árbol para contar el número de combinaciones con repetición.

El número de combinaciones con repetición de orden k formadas con los n elementos del conjunto A lo indicaremos así: $CR_{n,k}$.

Una forma sencilla de contar el número de combinaciones con repetición de orden *3* formadas con los elementos de $A = \{a, b, c\}$ podría ser la siguiente.

Convenimos en sustituir cada elemento repetido por x_1 o por x_2, según que el elemento repetido sea el primero o el segundo, cuando éstos están colocados en orden alfabético si son letras, o en el orden natural si son cifras.

Así, las combinaciones con repetición de orden *3* formadas con los elementos de $A = \{a, b, c\}$ las sustituimos por:

$aaa \longrightarrow ax_1x_2$	$acc \longrightarrow acx_2$
$aab \longrightarrow ax_1b$	$bbb \longrightarrow bx_1x_2$
$aac \longrightarrow ax_1c$	$bbc \longrightarrow bx_1c$
$abb \longrightarrow abx_2$	$bcc \longrightarrow bcx_2$
$abc \longrightarrow abc$	$ccc \longrightarrow cx_1x_2$

Así el número de combinaciones con repetición de orden *3* formadas con los elementos de $A = \{a, b, c\}$ es igual al número de combinaciones ordinarias de orden *3* formadas con los elementos de $B = \{a, b, c, x_1, x_2\}$. Es decir:

$$CR_{3,3} = C_{3+2,3} = C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10.$$

Observamos que el conjunto B está formado por los elementos de A y dos letras auxiliares x_1, x_2 en el caso de las combinaciones con repetición de orden *3*.

$$CR_{n,3} = C_{n+2,3}$$

Para las combinaciones con repetición de orden k necesitaremos $(k-1)$ letras auxiliares distintas, y así:

$$\boxed{CR_{n,k} = C_{n+(k-1),k} = \binom{n+k-1}{k}}$$

En el caso del dominó, el número de fichas es:

$$CR_{7,2} = C_{7+1,2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,6!} = 28.$$

Experiencias