

# *Experimentación didáctica e Investigación activa en clase de Matemáticas*

**J. M. MARTÍNEZ SÁNCHEZ \***

Este artículo resume, con algunas modificaciones para su publicación, una serie de conferencias dadas a profesores de Bachillerato y contiene las ideas expuestas por el autor en las Jornadas de Didáctica celebradas en Alcalá de Henares durante el mes de julio de 1981.

Tratamos en todos los casos de motivar al profesorado sobre los métodos activos en la enseñanza, estimulándole a dar respuestas nuevas a los problemas cotidianos que se presentan en el ejercicio de la actividad docente.

Agradecemos la oportunidad que nos brinda el presente número monográfico de la *Nueva Revista de Enseñanzas Medias*, dedicado a la Didáctica de las Matemáticas, para dar más amplia difusión a estas ideas, de manera que puedan ser conocidas y contrastadas por un mayor número de profesores.

Queremos indicar, finalmente, que en el tiempo transcurrido desde que expusimos por primera vez el tema, han ido cambiando algunas cosas. En primer lugar, nos congratulamos de la aceptación que tienen los métodos activos en capas cada vez más amplias del profesorado; en segundo lugar, estas ideas, asumidas por las autoridades académicas, son actualmente fomentadas desde instancias oficiales. Todo ello es claramente positivo.

Sin embargo, ahora se corre el riesgo de la proliferación indiscriminada de experiencias y ensayos cuyo único aporte consista en su aparente novedad. También hemos de estar atentos sobre la aplicación de métodos y modelos útiles para determinadas etapas del desarrollo intelectual del alumno, pero triviales, cuando no claramente inadecuadas, en etapas posteriores.

---

\* Inspector de Bachillerato del Estado.

## **Introducción**

El fin inmediato que nos proponemos es presentar tres ejemplos de experiencias didácticas en Matemáticas realizadas con alumnos de Bachillerato, con la intención de que puedan servir a los profesores como sugerencias para emprender otras acciones análogas.

Las experiencias seleccionadas están ensayadas y contrastadas en el aula; no son especulaciones teóricas, sino que apuntan a una aplicación inmediata en clase y surgen de situaciones concretas que se presentaron en determinados momentos.

Pero este artículo tiene otra finalidad, más difícil de conseguir, que es convencer al profesorado de que sólo mediante su trabajo personal y propio, a ser posible creativo, se da respuesta, por un lado, a la mejora de la capacidad docente; por otro, a la elevación de la categoría profesional, y, finalmente, a la realización personal en el ejercicio de la tarea educativa.

Es una llamada a reivindicar, y asumir, el papel que la investigación debe desempeñar en la labor del profesor de Enseñanza Secundaria.

Estamos convencidos de que la investigación y la experimentación didáctica son medios posibles, si no los únicos, aunque no fáciles, para el perfeccionamiento del profesorado y la mejora de la enseñanza.

En este sentido, antes de exponer los ejemplos de las experiencias didácticas, hacemos unas consideraciones generales sobre investigación educativa y unas sugerencias para la acción, seguidas de algunas ideas sobre los temas susceptibles de estudio y experimentación.

## **Consideraciones generales sobre investigación educativa**

Algunos autores consideran la investigación educativa como parte integrante de la investigación científica y que sus métodos son, por tanto, los métodos científicos aplicados a las Ciencias de la Educación. Entiendo que esto no es rigurosamente cierto, pero puede admitirse como punto de partida.

Ahora bien, en tanto que los métodos científicos aplicados a las Ciencias de la Naturaleza han conseguido avances espectaculares y han traído como consecuencia el desarrollo técnico, el cual ha cambiado usos y costumbres del mundo civilizado, no ha ocurrido otro tanto en las llamadas Ciencias del Hombre. Ciertamente se han conseguido avances en algunas disciplinas, pero no podemos decir lo mismo de otras como la Ética o la Política, por ejemplo, donde el método científico no se ha mostrado especialmente fecundo.

En particular, la investigación en educación no ha conseguido resultados rigurosos que sean unánimemente aceptados, ni tampoco se ha conseguido una técnica pedagógica cuyos logros sean indiscutibles. Algo sí se ha avanzado, evidentemente, pero muchas veces estos avances son debidos a los aportes de otras disciplinas, o a resultados obtenidos en terrenos distintos

al campo docente, en lugar de consecuencia directa de investigaciones en educación.

La verdadera investigación educativa es escasa, si bien algunos de sus logros son ciertamente valiosos.

Por otro lado, es frecuente que las teorías pedagógicas y la práctica docente estén alejadas entre sí. Si a esto añadimos que las investigaciones suelen realizarse fuera del medio escolar y por profesionales ajenos al mismo, no es de extrañar que sus resultados sean de difícil aplicación en clase.

Esto explica, de algún modo, las resistencias del profesorado para incorporar a su labor docente teorías que, o bien, son inaplicables en la situación real de los centros, o no muestran especiales ventajas sobre los modos ya consagrados por el uso.

Además, toda innovación conlleva un cambio de mentalidad y un nuevo modo de hacer que requiere un período de adaptación. Cuando esta adaptación no se cumple, sea por falta de tiempo y preparación, sea por natural resistencia a todo cambio, los resultados de la innovación son nulos o, en el peor de los casos, contraproducentes.

En educación, muchas veces, vale más hacer bien lo malo conocido, que hacer mal lo bueno por conocer.

Naturalmente, no se pretende negar los beneficios que todo avance comporta, lo que se trata de decir es que primero hay que comprobar esos supuestos beneficios y luego poner las condiciones para que se pueda aplicar o aprovechar.

Una posible vía de solución para eliminar las objeciones anteriores sería realizar investigaciones en los centros educativos por los propios profesores y ligada a la práctica docente diaria.

El tipo de investigación educativa que por sus características se adapta especialmente a nuestros fines es la conocida con el nombre de investigación activa o investigación por la acción.

La finalidad de la investigación activa es el estudio y resolución de los problemas educativos que se presentan al profesor, en una situación didáctica concreta, dentro del ámbito del centro. Aborda problemas particulares, cuya resolución es de inmediata aplicación a la práctica docente, y sus resultados se valoran más por su utilidad local, que por su validez universal.

La investigación activa surge siempre ante una situación real; se desarrolla integrada en la propia labor docente y como una actividad más de la misma. Sus resultados pueden ser aplicados directamente en clase y mejorar el rendimiento académico.

Para el profesor significa una toma de conciencia y un esfuerzo para responder de modo racional y sistemático a las exigencias de la realidad docente en la que está inmerso. Constituye, además, un medio idóneo para su actualización profesional y, simultáneamente, produce un cambio de mentalidad sobre su quehacer facilitándole la adaptación a situaciones nuevas.

Un caso particular de la investigación por la acción es la experimentación didáctica. Sus fines y procedimientos son los mismos, pero su ámbito de actuación queda restringido a aspectos parciales de una determinada materia.

La experimentación didáctica es la investigación activa que puede realizarse sin rebasar los límites de un seminario, por los profesores del mismo y dentro de las tareas que le son propias.

Creemos, por consiguiente, que la investigación activa y la experimentación didáctica reúnen condiciones para paliar algunos de los inconvenientes que actualmente padecen nuestros institutos y resolver muchos problemas con los que se enfrenta el profesorado de Bachillerato.

### **Sugerencias para la acción**

Es consustancial con la naturaleza humana el afán de conocer y experimentar. Un profesor competente y dinámico nunca debe conformarse con los resultados que obtiene, siempre quiere mejorarlos; quiere que sus alumnos estén más motivados y trabajen con mayor entusiasmo. Esto sólo se consigue ensayando, planteando situaciones de aprendizaje distintas y buscando mejores formas de acción docente.

Cuando el profesor no actúa a título individual, sino formando parte de un grupo de trabajo, como puede ser un seminario didáctico, debe coordinar sus acciones con el resto del equipo. En este caso será necesario discutir y programar en común las tareas a desarrollar o las experiencias a realizar.

La investigación y la experimentación didáctica es una prerrogativa de los seminarios, recogida en la legislación vigente, y una necesidad para el profesorado si no quiere caer en la rutina y en el quehacer mimético, por tanto, esterilizante, además de aburrido.

La carencia de flexibilidad ante situaciones nuevas, la falta de información, así como por la dificultad para la comunicación y el trabajo coordinado, son situaciones que obstaculizan la puesta al día del profesorado y la adaptación de las innovaciones educativas. Todo ello puede superarse cuando se participa en una investigación, pues el afán por conocer estimula a vencer los inconvenientes y a esforzarse para lograr los resultados previstos.

Ahora bien, en nuestra situación actual los problemas que presenta cualquier tipo de investigación no son los más adecuados para ser resueltos en el medio escolar, compatibilizándolos además con la labor diaria de la docencia. Pero, justamente, la investigación por la acción elimina los inconvenientes citados y cumple los requisitos necesarios para realizarse con las demás tareas docentes.

Las actividades de aprendizaje pueden ser observadas sistemáticamente, analizadas con rigor y constituir modelos para su experimentación. El profesor, simplemente, viendo las reacciones de sus alumnos, observando el desarrollo y marcha de las clases y evaluando rigurosamente los resultados obtenidos puede deducir pautas de actuación para la mejora de su trabajo.

De este modo, cada clase es una oportunidad de aprendizaje en sí misma y banco de pruebas donde realizar experiencias. Con frase del inolvidable maestro Puig Adam: "La mejor y más maravillosa fuente de conocimientos para el profesor son sus propios alumnos".

Un bosquejo para el desarrollo de una investigación en el seno de los seminarios didácticos, viene resumida en los siguientes puntos:

1. Elegir un tema objeto de estudio, en función de su interés y posibilidades reales del seminario.
  2. Plantear el tema y definir las dificultades con la mayor precisión posible.
  3. Recopilar datos y recoger información sobre el tema elegido y otros análogos.
  4. Comparar y analizar la información recogida, seleccionando la que se considere útil.
  5. Discutir las ideas y opiniones sobre la mejor forma de resolver las cuestiones planteadas; se formula una hipótesis de trabajo basada en las soluciones previstas.
  6. Diseñar una experiencia, a partir de la hipótesis de trabajo adoptada, fijando su desarrollo, duración y metodología a emplear.
- Todo ello va ligado a determinadas actividades que se han de realizar en las condiciones ordinarias de las clases.
7. Se hace una distribución de tareas entre los miembros del equipo de investigación, asignando a cada uno misiones y objetivos concretos; a la vez que se procede al acopio de los materiales, medios y recursos necesarios.
  8. Control periódico de la marcha del proceso y del grado de cumplimiento de las tareas encomendadas.
  9. Análisis de los resultados finales, los cuales se contrastan con la hipótesis inicial para extraer las conclusiones que se deriven del contraste.
  10. Las conclusiones obtenidas se traducen en normas operativas para su aplicación en clase.

Lo anterior se lleva a cabo mientras se realiza el trabajo en el instituto, y como una parte más del mismo. En ello radica, como ya se ha indicado, la peculiaridad de la investigación por la acción que debería ser una realidad cotidiana en las tareas de los profesores de Enseñanza Media.

## El campo de experimentación

Sí, ¿pero cómo elegir el tema objeto de estudio? ¿Cuáles son adecuados para realizar experiencias? El campo de experimentación no está definido *a priori* y cualquier tema es válido tratado convenientemente; en cambio, sí está acotado por nuestras posibilidades reales de trabajo, por su finalidad docente y por los objetivos directos e inmediatos que nos propongamos conseguir.

Entre los objetivos podemos citar: aclaración de conceptos, introducción de nuevas ideas, formas de motivación, presentación atractiva de contenidos, materiales y juegos, enunciados de problemas intrigantes o provocadores de curiosidad, modelos de situaciones didácticas, etc.

Sin con ello agotar todas las posibilidades, podemos encuadrar los temas en tres grandes apartados:

- a) Contenidos de la asignatura: conceptos y técnicas matemáticas.
- b) Organización de los contenidos: métodos y sistemas de trabajo.
- c) Modelos de aprendizaje: situaciones y actividades didácticas.

Estos apartados no son disjuntos entre sí, las líneas de trabajo se entrecruzan y ciertos aspectos de cada uno de ellos pueden perfectamente ser encuadrados en los otros dos restantes.

Simplemente esta distribución, que responde a la clásica división en: contenidos, métodos y didácticas, sirve como punto de partida para iniciar nuestra tarea.

A título indicativo, y sin ninguna otra pretensión, planteamos una serie de interrogantes relativos a cada apartado para mostrar cómo el profesor debe pararse a reflexionar sobre aspectos de su materia, que van desde los más conocidos y habituales, pero con un enfoque distinto, hasta otros más generales o ambiciosos que pueden ser útiles para su propósito.

En el primer apartado incluiríamos cuestiones como las siguientes:

i) ¿Qué queremos decir cuando decimos que la recta real es continua?, ¿qué queremos decir cuando decimos que la función  $y = x^2$ , o, simplemente,  $y = x$  es continua? Clarificar conceptos, distinguir entre continuidad de la aplicación y continuidad de la gráfica.

Cuando decimos que un muro es continuo o que un cine es de sesión continua, ¿estamos expresando la misma noción de continuidad?

En el estudio de la continuidad en Bachillerato sólo suelen considerarse funciones reales de variable real, lo cual es natural, pero tiene el peligro, que acaba convirtiéndose en hábito, de no distinguir ciertas propiedades topológicas de los espacios de aplicación de las propiedades de continuidad intrínsecas de la función.

ii) Posiblemente tengamos noticia del Análisis No Clásico, el cual vuelve a poner de actualidad la noción de infinitésimo. ¿Qué sabemos del estado actual de la cuestión? ¿Puede esto tener alguna influencia sobre la matemática que explicamos en el Bachillerato? Por ejemplo: ¿modifican las ideas del Análisis No Clásico el concepto de límite y consecuentemente la noción de derivada?; ¿se podría introducir la derivación sin necesidad de explicar límites?, ¿sería esto más sencillo o tendría alguna otra ventaja?

En el siguiente apartado tendrían cabida cuestiones relativas a métodos y sistemas docentes, su comparación y contraste, organización de tareas, tipos de pruebas y ejercicios más adecuados para valorar a los alumnos y estimularles al trabajo, etc.

i) ¿Se debe utilizar la calculadora habitualmente en clase o sólo para ciertos temas? ¿Modifica este hecho y, más aún, la introducción y uso de los miniordenadores en el aula, el enfoque de la asignatura? Es decir: ¿matemática existencial o matemática algorítmica?, ¿deducción o enumeración?, ¿formalismo o intuicionismo? Sí, ambos aspectos, ¿en qué proporción y por qué?

ii) La simple cuestión de los enunciados de los ejercicios modifica no sólo la dificultad y modo de resolverlos, si no fundamentalmente el fin para el cual son propuestos. Compárense los siguientes enunciados de un mismo problema:

I. Si  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ , demostrar que  $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8 \cdot a b c$ .

II. Dados tres números reales positivos  $x, y, z$ , se pide demostrar:

1.º  $(x - y)^2 \geq 0$ ;

2.º  $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$ ;

3.º  $(x + y)(x + z)(y + z) \geq 8xyz$ .

La primera redacción es apta para un concurso o premio, se trata de eliminar candidatos y quedarse con los mejores; la calificación es de todo o nada, la solución es difícil y el enunciado disuasorio. La segunda redacción, al contrario, gradúa las dificultades, permite evaluar con más precisión el nivel de conocimientos de cada alumno y le estimula a proseguir un trabajo. Caso de éxito, los resultados son retenidos y recordados con mayor dificultad por los alumnos medios.

En el tercer y último apartado podrían situarse cuestiones del tipo siguiente:

i) Utilizando las propiedades de las progresiones aritméticas es fácil construir cuadrados mágicos de orden impar, pero no de orden par; mejor dicho, un cierto procedimiento válido en un caso no lo es de otro, ¿por qué?

Tampoco es difícil encontrar un algoritmo que sirva de modelo para la construcción de tales cuadrados, ¿qué diferencia sustancial habría entre realizar el modelo con o sin ordenador?

ii) Usando papel milimetrado en los problemas de cálculo gráfico, ¿de qué manera están implícitos los conceptos de aproximación y error?, ¿lo están de igual manera usando calculadora? ¿Qué podemos decir del uso simultáneo de calculadora y papel milimetrado en el cálculo aproximado? ¿Qué es cálculo aproximado?

¿En qué sentido está implícita la noción de "borrosidad"?, ¿lo está también en el punto i) de este mismo apartado?

Medite el lector no sobre lo anterior, que al fin y al cabo sólo son ejemplos, sino sobre lo que a él se le pueda ocurrir, perseverare en el esfuerzo, y al final observará que no es tiempo totalmente perdido.

## Ejemplos de experiencias didácticas

Hemos elegido tres ejemplos de experiencias didácticas como ilustración práctica de lo expuesto en los puntos anteriores. Con la primera experiencia se pretende que el alumno adquiera una idea más completa y general sobre un concepto; la segunda es un intento para organizar una parte de nuestra labor docente en un determinado aspecto; en la tercera, y última, la matematización de una situación real se traduce en una actividad de aprendizaje al requerir en concurso de los alumnos en su realización final.

Los ejemplos, publicados en su momento, se presentan completos en líneas generales, con una breve explicación y un esquema de su desarrollo. No entramos en más detalles, pues no se trata de dar soluciones, sino de sugerir ideas y marcar pautas de acción; para mayor información pueden consultarse los artículos que se citan al final de cada ejemplo.

### I. Espacios métricos en retículos

Experiencia realizada para introducir una métrica en estructuras reticulares conocidas por los alumnos, generalizar la idea de distancia y precisar el concepto de espacio métrico en una situación no habitual. Nivel C. O. U.

**Explicación:** Partiendo del hecho de que a los alumnos se les presenta el concepto de distancia en la recta y el plano, o, lo que es equivalente, en estructuras con un orden total,  $\mathbb{R}$ , o en estructuras no ordenadas,  $\mathbb{C}$ ; se trata de completar lo anterior definiendo una métrica en conjuntos parcialmente ordenados.

Ahora bien, estos conjuntos deben de alguna manera ser familiares al alumno para no acumular dificultad sobre dificultad y, además, que los resultados los encuadren dentro de hechos ya conocidos.

En este orden de ideas, vamos a considerar el conjunto  $\mathbb{N}$  de los naturales, parcialmente ordenado por la relación de divisibilidad:  $a$  divide a  $b$ , notación  $a/b$ , equivale a decir que  $b$  es múltiplo de  $a$  en la relación opuesta y expresa que existe  $c \in \mathbb{N}$ , tal que  $b = a \cdot c$ .

Para cada par de elementos  $a$  y  $b$  de  $\mathbb{N}$  existe un extremo inferior:  $\text{inf. } (a, b) = d$ , que divide simultáneamente a los números  $a$  y  $b$ , siendo, por consiguiente, el máximo de los divisores comunes, notación usual m. c. d. ( $a \cdot b$ ) =  $d$ ; asimismo existe para cada par de números  $a$  y  $b$  un extremo superior,  $\text{sup. } (a, b) = m$ , que es múltiplo común de  $a$  y  $b$ , siendo el mínimo de los múltiplos comunes, notación usual m. c. m. ( $a, b$ ) =  $m$ . También utilizaremos la notación  $a \wedge b$  para designar el m. c. m. ( $a, b$ ) y  $a \vee b$  para el m. c. d. ( $a \cdot b$ ), según convenga. Es decir:

$$a \wedge b = \text{m.c.m. } (a, b); \quad a \vee b = \text{m.c.d. } (a, b)$$

Se verifica que  $a.b. = m.d.$  y que si  $a/b$  entonces  $a \leq b$  en la ordenación natural de  $\mathbb{N}$ .

Se establece una aplicación, norma, de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , asignando a cada número natural  $a$  su logaritmo en base 10 (cualquier base mayor que uno sirve para nuestros fines):

$$a \mapsto \|a\| = \log a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Con lo anterior estamos en condiciones de definir una aplicación  $d$ ; de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  en  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , verificando las propiedades que caracterizan a la distancia; en efecto, para cada par  $a, b$  de números naturales definimos la distancia entre ambos como diferencia de las normas de su extremo superior e inferior. Es decir:

$$d(a, b) = \log m - \log d$$

siendo  $m$  y  $d$  el m.c.m. y el m.c.d. de  $a$  y  $b$ , respectivamente.

Para la aplicación  $d: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , así definida, se demuestran las propiedades:

1.  $d(a, b) \geq 0$ ; si  $d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$
2.  $d(a, b) = d(b, a)$
3.  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ .

Se hubiera podido definir la distancia mediante la diferencia  $m - d$ , entre el m.c.m. y el m.c.d., y la norma mediante la inyección natural de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{R}$ , pero esto no es satisfactorio, a nuestro juicio, porque tal distancia no refleja la naturaleza multiplicativa del retículo  $(\mathbb{N}, /)$ ; definiendo la norma por medio del logaritmo tenemos que  $d(a \cdot b) = \lg \frac{m}{d}$ , es decir, la distancia es el logaritmo de los factores no comunes a  $a$  y  $b$ . Esto expresa, como si dijéramos, el "grado de indivisibilidad" entre  $a$  y  $b$ : "dos números están más próximos cuantos más factores comunes tengan", lo cual no deja de ser un resultado esperado y natural.

**Desarrollo:** Se empieza definiendo la distancia entre elementos de filas y cuadrículas; se recuerda la definición de norma y valor absoluto de números reales y complejos; distancia en la recta real, plano complejo y plano métrico. Se dice, finalmente, que se entiende por espacio métrico.

A continuación se presenta el ejemplo explicado anteriormente, se continúa definiendo una métrica en el conjunto  $\mathcal{P}(A)$  de las partes de un conjunto  $A$ , parcialmente ordenado por la relación de inclusión, se finaliza con un ejemplo de métrica discreta en el conjunto de las proposiciones con las operaciones lógicas disjuntiva "o" y copulativa "y".

Para más detalles puede verse: "Algunos ejemplos de espacios métricos", *Gaceta Matemática*, núms. 1 y 2, Madrid, 1973.

## II. Taxonomía de ejercicios y problemas

Intento una clasificación para establecer un orden de prelación y una sistemática de los distintos ejercicios y problemas a proponer a los alumnos para, aparte de ejercitarse en la realización de los mismos, utilizarlos con una finalidad didáctica que permita cubrir ciertos objetivos.

Estos objetivos pueden ser tanto de tipo cognoscitivo, como efectivo o psicomotor; es decir, se pueden utilizar los ejercicios y problemas, debidamente presentados, para la adquisición y aplicación de conocimientos, para formación de valores o para el fortalecimiento de la voluntad. Nivel B. U. P.

**Explicación:** Los ejercicios se encuadran según su finalidad en los siguientes tipos:

1. Ejercicios de motivación.
2. Ejercicios de asimilación.
3. Ejercicios de síntesis.
4. Ejercicios de repaso.
5. Ejercicios de exposición graduada.
6. Ejercicios de exposición libre.
7. Ejercicios de aplicación inmediata de conceptos.
8. Ejercicios de utilización de técnicas en situaciones concretas.
9. Ejercicios de búsqueda de soluciones óptimas entre varias alternativas dadas.
10. Ejercicios de investigación de soluciones en situaciones desconocidas.
11. Ejercicios de ordenación, sistematización y organización (métodos y técnicas).
12. Ejercicios de generalización y transferencia de conocimientos (teorías, sistemas y modelos).

Naturalmente, un ejercicio dado, podrá ser encuadrado en uno u otro tipo, según la presentación del mismo y de acuerdo a la finalidad que deseamos conseguir en él.

En la clasificación anterior se ha tenido en cuenta una gradación de menor a mayor dificultad, tanto en los conocimientos y técnicas suministrados por los ejercicios, como en la creciente complejidad y dificultad para la realización de los mismos.

Los seis primeros tipos de ejercicios, o ejercicios propiamente dichos, son para la adquisición de conocimientos y para su adecuada estructuración y exposición; no requieren, por parte del alumno, nada más que la voluntad de realizarlos y no requieren el aporte de ningún esfuerzo creativo, basta ejecutar las instrucciones para obtener el resultado; a lo más, el número 6 exige del alumno algo de su libre iniciativa. Los siguientes tipos son ya de dificultad creciente y requieren, por parte del alumno, la incorporación de factores

no implícitos en el enunciado del ejercicio para la resolución del mismo, así como un cierto grado de tesón para alcanzar el éxito; estos ejercicios son los que llamaremos problemas, y van desde los más simples, aplicación inmediata de conceptos aprendidos, hasta la sistematización explícita de su trabajo o la elaboración de modelos y teorías generales que expliquen un conjunto de situaciones análogas.

Dentro de los ejercicios propiamente dichos, los dos primeros responden a la necesidad de introducir la información; el 3 y 4, al proceso interno de la misma, resumiéndola y memorizándola; los ejercicios del tipo 5 y 6 corresponden a la salida de la información y adiestran en la cantidad que debe salir y en la presentación de la misma.

Los problemas tipo 7 y 8 corresponden a lo que llamo proceso externo de la información y consiste en conectar los conocimientos adquiridos con la realidad objetiva; es decir, aplicar y utilizar los conocimientos en casos determinados, para lo cual es necesario saber seleccionar de entre todos los conocimientos, los apropiados, pero facilita esta selección en el enunciado del problema mediante una sugerencia adecuada.

Los problemas del tipo 9 y 10 son de una dificultad considerable, y el alumno no debe enfrentarse a ellos sin una previa preparación y mentalización. El enunciado de los mismos contiene datos suficientes para su resolución pero no suministra ninguna información sobre el camino a recorrer; los del tipo 9 son combinatorios, es decir, la elección entre diversas alternativas se ve dificultada al aumentar su número y en ciertos casos nos vemos obligados a idear un método de elección. Tanto éstos, como los del tipo 10, habitúan al alumno a perseverar en el esfuerzo para la obtención del éxito.

Por último, los tipos 11 y 12 se salen en parte del marco del alumno y requieren la cooperación estrecha con el profesor para su desarrollo y exposición. En resumidas cuentas, son problemas amplios que se plantean al profesor al empezar el curso y fijar los objetivos del mismo, y que se resuelven mediante las correspondientes actividades de clase, de tal manera que la solución es correcta si, al final del curso, el alumno ha asimilado los métodos y teorías que debemos transmitirle al programar la asignatura.

**Desarrollo:** A lo largo del curso, seleccionando los ejercicios según la finalidad prevista, presentando en la forma y momento oportuno, siguiendo su evolución y comprobando los resultados. Una de las mayores dificultades consiste en la elección y redacción de los enunciados; un mismo ejercicio, según su redacción, puede servir para una u otra finalidad. Conviene que los ejercicios estén graduados y, a veces, formando batería de manera que la solución de uno nos indique el camino para resolver el siguiente.

Hay que formar un archivo de ejercicios, de modo que la variedad en cada tipo sea amplia, cambiándolos, o modificando el enunciado, según se vaya viendo los resultados obtenidos.

Los alumnos deben estar informados, en todo momento, de qué se pretende de ellos con los ejercicios propuestos, tanto la finalidad inmediata como la remota. A veces es conveniente que los alumnos colaboren en la redacción de ejercicios con sus ideas, opiniones y sugerencias.

(Puede verse: "Problemas y ejercicios; utilidad didáctica", *Cursillos sobre Didácticas Matemáticas*, tomo XIII, Madrid, 1974).

### III. Simulación de una situación real

Experiencia realizada para mostrar cómo la Matemática puede ser útil en el estudio de situaciones complejas y aparentemente alejadas del campo matemático. La experiencia tiene por finalidad motivar el estudio de la Matemática; pero, al involucrar en su desarrollo a los alumnos, es también un ejemplo de verdadera actividad de aprendizaje, que permite iniciar a los estudiantes en las tareas de programación e introducir la idea de algoritmo en procesos secuenciales no numéricos.

Se trata de analizar una situación en que se presenta la necesidad de efectuar ciertas consultas, de frecuencia y duración variables, para resolver algunas dificultades que aparecen al realizar tales consultas.

El estudio en tiempo real no es posible o no es práctico: procede, por consiguiente, establecer un modelo teórico que refleje la situación bajo ciertas hipótesis y simular el proceso en tiempo reducido. Nivel C. O. U.

#### Explicación

Aprovechando la circunstancia de que un grupo de alumnos de C. O. U. disponían de dos horas semanales, que podían ser utilizadas para prácticas y trabajos en grupo, formamos cinco equipos de trabajo con objeto de que profundizaran en el estudio de algunos temas de especial interés del programa. A cada equipo se le proporcionaba el contenido esquemático de los temas, los puntos de mayor dificultad, los ejercicios a realizar y la correspondiente bibliografía de consulta para ser utilizada en las sesiones semanales de estudio.

Para varios de los temas propuestos era necesario consultar un determinado libro, del que sólo disponíamos de un ejemplar, y se producía el inconveniente de que distintos equipos necesitaban consultar a la vez o que, cuando un equipo necesitaba hacer una consulta, el libro estaba siendo utilizado por otro equipo. A la vista de este inconveniente surgió la pregunta natural: ¿es suficiente, para nuestro trabajo, un solo ejemplar del libro?

Evidentemente, en este caso, el inconveniente se evita comprando más ejemplares. Sin embargo, surgen las siguientes consideraciones:

1. El uso de los libros es temporal y no son necesarios con posterioridad.
2. El inconveniente es mínimo, pues el tiempo que se pierde consultando es muy pequeño y no afecta al trabajo.
3. El inconveniente no es significativo, pues surge en algunas, pocas, sesiones, pero no en todas.

Por tanto, es lícito preguntarse si es necesario comprar más libros, y si es así, ¿cuántos?

Con el fin de obtener la información necesaria para saber si basta un solo libro, sin agotar todas las sesiones de estudio, es necesario reproducir, bajo condiciones e hipótesis determinadas, el proceso de consulta. Es decir, construir un modelo aceptable de las sesiones de estudio típicas, de dos horas de duración, cinco equipos de trabajo y un solo libro de consulta, que permita simular cuantas sesiones fueran necesarias para obtener la suficiente información sobre el proceso.

En efecto, la simulación nos permite determinar, para un gran número de casos y en breve tiempo, el porcentaje de utilización del libro, el tiempo dedicado a consultas y el tiempo que se pierde en esperas para consultar, en total y por equipos.

### **Desarrollo**

Cada equipo lo representamos por una cartulina marcadas  $E_1, E_2, \dots, E_5$ , en total cinco cartulinas. Al dorso de cada una anotaremos cuando el equipo correspondiente tenga necesidad de efectuar una consulta, así como los momentos en que empieza y finaliza la consulta.

El libro se representa por una ficha L, que sirve, a la vez, para acumular información sobre las consultas realizadas.

El tiempo que dura la sesión de trabajo, dos horas, se subdivide en 24 períodos de 5 m.; cada uno de estos períodos de tiempo se simulan mediante una tarjeta; en total veinticuatro, numeradas del 1 al 24. Dos tarjetas más, una marcada con "0", para indicar que la sesión no ha comenzado, y otra, marcada con "25", en la que se pone "FINAL TIEMPO", para indicar que el proceso ha terminado. Las 26 tarjetas forman un paquete que denominamos "paquete de tiempos" o "paquete T".

El transcurso del tiempo, durante la sesión de trabajo, se simula al ir retirando las tarjetas del paquete T; comienza la sesión al retirar la tarjeta "cero" y finaliza cuando sólo queda la tarjeta "veinticinco", en la que aparece el "FINAL TIEMPO".

Repetimos: como cada tarjeta representa 5 m. de tiempo real, al retirar una tarjeta se simula que han transcurrido 5 m. de la sesión de trabajo. En cada uno de esos 5 m., uno, o varios, equipos de trabajo pueden, o no, tener necesidad de consultar el libro, que, a su vez, puede en este instante estar disponible u ocupado.

La frecuencia y duración de las consultas no son fijas y se establecen, generalmente, por observaciones previas en situaciones reales. En nuestro caso, las sesiones de estudio ya realizadas nos indican que, en media, cada equipo venía a realizar cuatro consultas en las dos horas de trabajo.

Por consiguiente, en cada período de 5 m. hay una posibilidad, sobre seis, de realizar consultas. En este caso, la probabilidad de consultas es  $1/6$  y se

los equipos tienen, o no, necesidad de consultar, la extracción de una bola puede simular mediante el lanzamiento de un dado. Convenimos en que si se obtiene "AS" se produce la necesidad de consulta, y no se produce en caso contrario.

Asimismo, las consultas son de duración variable, desde las breves para ver una cita o dato, hasta las que requieren leer todo un epígrafe; en cualquier caso, no solían presentarse consultas de duración inferior a 5 m., ni superior a 30 m. Para esta experiencia llegamos a establecer, como aceptable, la siguiente distribución de tiempo para la duración de las consultas en promedio:

- Dos consultas de 5 m.
- Tres consultas de 10 m.
- Tres consultas de 15 m.
- Dos consultas de 20 m.
- Una de 25 m.
- Una de 30 m.

Esta distribución se puede materializar mediante una bolsa, en la que introducimos 12 bolas o discos numerados: dos ellos con el número 1, tres con el número 2, tres con el número 3, dos con el número 4, uno con el 5 y otro con el 6, que nos indican en cada caso cuantos períodos de 5 m. se han empleado en realizar la consulta.

La simulación de la duración de la consulta consiste en elegir una bola al azar, de entre las doce de la bolsa, y el número escrito en la misma nos indica el tiempo, en períodos de 5 m., que ha durado la consulta realizada.

Si en un instante dado, indicado por la tarjeta superior del paquete de tiempos, un equipo tiene necesidad de consultar, puede empezar la consulta si en ese instante el libro está disponible, o ponerse en espera para consultar cuando el libro esté ocupado. Los equipos en espera para consultar forman una "fila de espera" o "cola".

La fila de espera se simula colocando una a continuación de otra las cartulinas que representan los equipos que necesitan la consulta. El hecho de que el libro esté ocupado lo indicamos colocando encima de la ficha L, la cartulina del equipo que consulta. Un equipo o está trabajando, o está consultando, o está en espera para consultar.

Cuando un equipo que está consultando finaliza su consulta, vuelve a su posición de trabajo y su lugar lo ocupa el primero de la fila de espera, si lo hay.

**Nota:** Podría ocurrir que un equipo necesitase consultar cuando se acaba el tiempo de simulación. En este supuesto hay dos opciones, como ocurre en las situaciones reales: o prolongamos la sesión hasta que el equipo interesado acabe la consulta o, por el contrario, al finalizar el tiempo de trabajo, se suspende toda actividad y lo que quede pendiente se deja para la próxima

sesión. Cualquiera de las opciones es válida, pero es conveniente, para la uniformidad de los cálculos, fijar una de ellas de antemano.

El proceso comienza poniendo el paquete T en cero, es decir, ordenadas las 26 tarjetas de menor a mayor numeración; se colocan los equipos en "posición" de trabajo y el libro en situación de "disponible". Se inicia la simulación al retirar la tarjeta 0, y comenzar a contar los 5 m. simbolizados por la tarjeta 1; durante estos 5 m. vemos, mediante lanzamientos del dado, si los equipos tienen, o no, necesidad de consultar. La extracción de una bola de la bolsa nos simula la posible duración de la consulta.

En el dorso de las cartulinas E de los equipos se anota: momento en que se produce la necesidad de consulta, principio de la consulta (T), duración de la consulta (D), fin de la consulta  $F = T + D$ . También se anotan los períodos de espera, los cuales vienen dados por la diferencia entre el principio de la consulta y el momento en que se produjo la necesidad de consultar.

En la ficha L del libro se anota: principio y final de las consultas y duración de las mismas (diferencia entre los valores anteriores).

Con ello tenemos:

1. El tiempo de espera para cada equipo.
2. La duración total de las consultas realizadas.
3. El tiempo de espera total.
4. El tiempo de utilización del libro.
5. Los porcentajes correspondientes de utilización del libro, del tiempo dedicado a esperar por equipos, del tiempo empleado en consultas y, para el control, el porcentaje de tiempo en que los equipos están trabajando.

El análisis del proceso permite confeccionar el correspondiente programa mediante el listado de los pasos sucesivos y las instrucciones a ejecutar en cada caso.

Asimismo, es conveniente realizar el organigrama para hacerse una idea global del proceso.

(Para información más completa y ejemplos de resultados obtenidos puede consultarse: "La simulación de modelos", *Revista de Bachillerato*, cuaderno monográfico, núm. 5, Madrid, 1980).

## Conclusión

Hemos visto que parte de la actividad docente y de las obligaciones del profesorado, si se hacen sistemática y metódicamente, pueden traducirse en tareas de investigación de resultados aplicables en el aula.

Por supuesto, que la labor de investigación del profesor de Bachillerato no tiene por qué limitarse al tipo aquí descrito; si alguien puede hacer al-

guna otra, mejor que mejor. Simplemente, se trata de ver que la investigación activa es posible y desde luego deseable.

En resumen, sería interesante lograr que los profesores de Enseñanza Secundaria compaginasen docencia e investigación, consiguiendo que los institutos y seminarios fueran auténticos lugares de discusión y experimentación didáctica de donde surgieran las diversas sugerencias para la mejora de la enseñanza.

## VIAJE CULTURAL CURSILLO DE FRANCÉS

*En l'Alliance Française de PARIS*

DOS SEMANAS VERANO 1985

- Del 30 de junio al 13 de julio inclusive.
- Del 16 de julio al 29 de julio inclusive.
- Del 16 de agosto al 29 de agosto inclusive.
- Del 1 de agosto al 29 de agosto inclusive.

- Apartamentos-estudio *duplex* con baño y cocina.
- Residencias con restaurante y baño en las habitaciones.
- Viajes en tren, avión o autocar con TV-Video y aire acond.
- Dos horas diarias de clase. Certificado de Asistencia.
- Visitas y excursiones culturales. Librito con resúmenes.
- Viaje acompañado por catedráticos y agregados de francés.
- Se admiten cursillistas (seis niveles) y no cursillistas.
- Prestigioso seguro médico Europ Assistance para todos.

**PRECIO: Desde 38.900 ptas., que incluye viajes y pensión completa en París y en ruta.**

**SALIDAS:** A - Sevilla, Córdoba, MADRID, Burgos, S. Sebastián.  
B - Murcia, Alicante, Valencia... BARCELONA.

### INFORMES E INSCRIPCIONES:

**Dirección central: ALICANTE. Subdirección: SEVILLA.**

ALICANTE	: Joaquín García. Teléfonos (965) 20 55 98 y 65 34 69 Cayetano Ubeda. Teléfono (965) 28 19 48
SEVILLA	: Mercedes Pérez. Teléfonos (954) 38 52 94 y 42 03 77
MADRID	: Magdalena Matilla. Teléfono (91) 638 08 80 Rosa Domínguez. Teléfono (91) 254 82 96
BARCELONA	: Magdalena Fernández. Teléfono (93) 220 13 26
CANARIAS	: Soledad Esparza. Teléfono (928) 23 08 07 Elvira Gómez. Teléfono (922) 27 40 03
LEÓN	: Sofía Aller. Teléfono (987) 23 00 06
MURCIA	: María Dolores García. Teléfono (968) 24 52 03
SAN SEBASTIAN	: Maite Sansous. Teléfono (943) 64 28 45
TARRAGONA	: Oscar Segarra. Teléfono (977) 62 00 00
VALENCIA	: Pepita Bartual. Teléfono (96) 326 94 55
VIGO	: María Araceli Cabido. Teléfono (986) 42 02 12
ZARAGOZA	: Francisco Sánchez. Teléfono (976) 49 33 20

Organización Técnica: GAT 503