El problema de los siete puentes de Königsberg

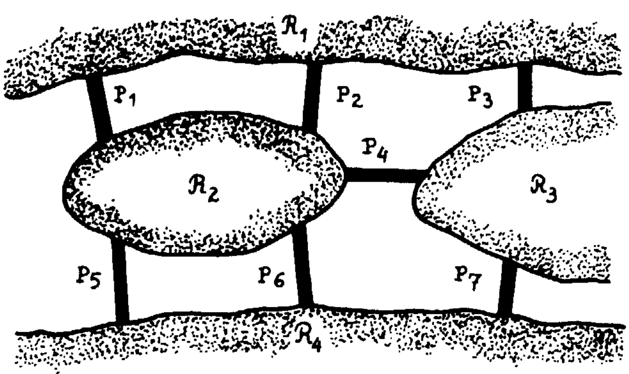
Vicente MEAVILLA SEGUÍ *

Convencidos de que el actual enfoque de la enseñanza de las matemáticas de B.U.P. tiene, tan sólo, por objetivo la formación de futuros matemáticos, y ante el peligro real de que gran número de muchachos –que inicialmente se pudieran sentir atraídos por esta disciplina– dirijan sus pasos hacia otros derroteros, escribimos este artículo con la esperanza de que pueda contribuir a la «desintoxicación algebraica» producida por la modernización (?) de la matemática.

Un problema de 1735

Hagamos notar que en todo lo que sigue seremos totalmente fieles al trabajo que, sobre el particular, escribió Leonhard Euler allá por el año 1735.

Nuestra aportación personal al estudio del problema es –por tanto– nula; nos hemos limitado a ser simples transmisores de uno de los muchos, y bellos, capítulos de la matemática que a lo largo de la historia se han hecho famosos.



En la figura 1 hemos esquematizado cuatro regiones: R_1, R_2, R_3, y R_4 comunicadas entre sí por siete puentes: p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 y p_7.

El interrogante que nos planteamos es el siguiente:

¿Es posible programar un paseo en el que crucemos una, y sólo una, vez por cada uno de los siete puentes?

Evidentemente, esta cuestión es un caso particular de un problema más general que podríamos enunciar en los términos:

«Dadas n regiones: R_1, R_2,..., R_n comunicadas entre sí por m puentes: p_1, p_2,...,p_m determinar si es (o no) posible, efectuar un trayecto en el que se pase una –y sólo una– vez, por cada uno de ellos».

Es natural que, desde una óptica matemática, resulte mucho más atrayente este último problema. En consecuencia, intentaremos –en principio– resolver el caso general y a continuación daremos una respuesta a la pregunta formulada en primer lugar.

Atacamos el problema

Iniciamos, sin más dilación, el ataque del tema que nos ocupa, dando una sencilla regla que nos permitirá simbolizar cualquier paseo realizado, haciendo uso (exclusivamente) de las letras subindicadas utilizadas para designar a cada una de las regiones implicadas en el problema que se considere.

En el «circuito» de la figura 2, hemos cruzado una sola vez por cada uno de los catorce puentes que enlazan siete regiones de un imaginario país.

* Profesor agregado de matemáticas del I.B. «José Ibáñez Martín» de Teruel.

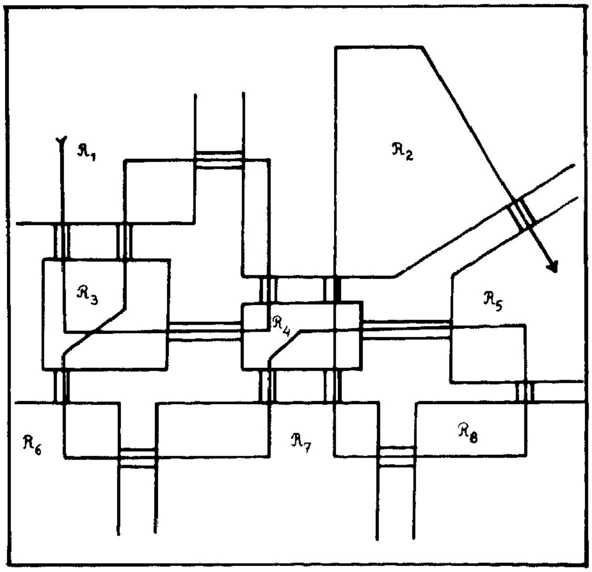


Figura 2

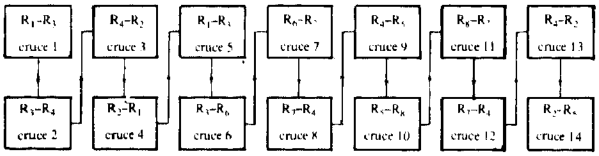
Admitiendo que la salida tuvo lugar de R_1, es obvio que la segunda zona visitada fue R_3. Podemos, pues, representar esta primera etapa de nuestro viaje por R_1–R_3 (donde el guión – señala que hemos cruzado por un puente). Desde R_3 pasamos a R_4, por tanto (siguiendo el mismo criterio que antes) escribimos R_3–R_4.

Resulta evidente que el punto de llegada del primer sector coincide con el punto de partida del segundo; para señalar el trayecto total –recorrido hasta el momento– pondremos R_1–R_3–R_4 en vez de R_1–R_3R_3–R_4.

Procediendo de esta manera, no reviste dificultad alguna comprobar que el paseo descrito puede designarse por:

$$\begin{aligned}&R_1\text{–}R_3\text{–}R_4\text{–}R_2\text{–}R_1\text{–}R_3\text{–}R_6\text{–}\\&\text{–}R_7\text{–}R_4\text{–}R_5\text{–}R_8\text{–}R_7\text{–}R_4\text{–}R_2\text{–}R_5\end{aligned} \qquad (1)$$

Es claro que la secuencia (1) puede obtenerse a partir del siguiente esquema:



eliminando en cada cruce (salvo el último) la región de llegada y enlazando entre sí las «zonas residuales».

En otros términos:

A partir de 28 letras subindicadas (notemos que 28 es el doble del número de puentes) obtenemos, después de suprimir 13 de ellas (13 = número de puentes menos uno), la serie (1) integrada por 15 letras subindicadas (observemos que 15 coincide con el número de puentes aumentado en una unidad).

Apoyándonos en este resultado afirmamos:

Si existe un trayecto a través de m *puentes en el que crucemos una, y sólo una vez por cada uno de ellos, entonces la secuencia de letras subindicadas que lo caracteriza consta de:*

$$2m - (m - 1) = m + 1 \text{ elementos.}$$

Pasemos, acto seguido, a considerar una importante cuestión.

¿Es posible determinar el número de veces que una cierta letra subindicada R_i interviene en la «sucesión» que caracteriza un determinado circuito (en el que se cruza una –y sólo una– vez por cada puente), teniendo únicamente en cuenta el número de puentes que llegan (salen) a dicha región?

En el estudio de este problema distinguiremos dos posibilidades:

(A) El número de puentes que llegan a R_i es IMPAR

1.– Si a R_i llega un solo puente, no resulta difícil descubrir que dicha región puede ser punto de partida o punto de llegada del recorrido que estemos analizando (advirtamos que la conjunción *o* está tomada aquí en sentido excluyente).

En el primer caso obtendremos una sucesión del tipo:

$$R_i\text{–} \ldots\ldots$$

y en la segunda alternativa, la secuencia a la que llegaremos será de la forma:

$$\ldots\ldots \text{–}R_i$$

De cualquier manera, el número de veces que aparece R_i –al que a partir de ahora designaremos por $N(R_i)$– es igual a *uno*.

2.– Supongamos, ahora, que el número de puentes que llegan a R_i es tres. En esta situación, pueden presentarse las dos opciones que hemos representado en la figura 3.

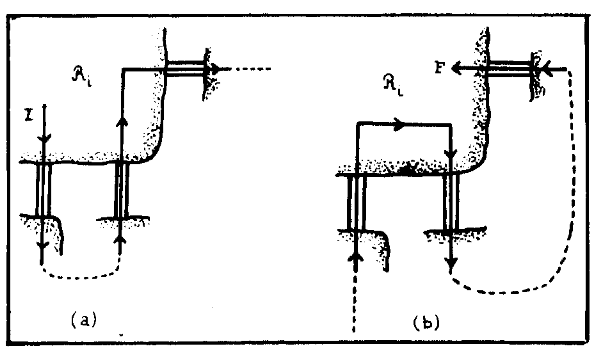


Figura 3

En el croquis (a) iniciamos (I) el recorrido en R_i y en el dibujo (b) finalizamos (F) el trayecto en R_i.

Con esto, las sucesiones que obtendremos tendrán la forma:

(a) R_i– ...... –R_i–......

(b) ...... –R_i– ...... –R_i

Por tanto, $N(R_i) = 2$.

3.– Consideremos, por último, el caso en que el número de puentes que «arriban» a R_i es cinco.

Caben aquí las dos alternativas siguientes:

– El punto de partida del recorrido es R_i (figura 4–a).

– El trayecto no se inicia en R_i (figura 4–b).

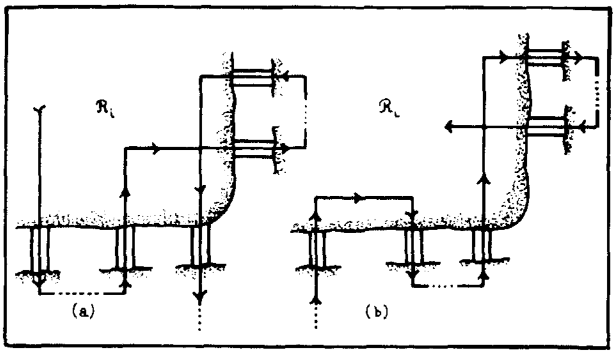


Figura 4

Las sucesiones obtenidas serán de la forma:

(a) R_i– .... –R_i– .... –R_i–....

(b) .... –R_i– .... –R_i– .... –R_i

Luego, $N(R_i) = 3$.

Apoyándonos en los resultados obtenidos en los tres ejemplos anteriores, es fácil pasar al caso general.

Afirmamos:

Si el número de puentes que llegan a R_i es p (siendo p impar), entonces

$$N(R_i) = (p + 1)/2$$

(B) El número de puentes que llegan a R_i es PAR

1.– Admitamos que a la región R_i llegan dos puentes.

Es trivial que pueden ocurrir los dos hechos siguientes:

– El recorrido empieza en R_i (figura 5–a).

– El trayecto no empieza en R_i (figura 5–b).

En la primera situación, la secuencia que nos caracteriza el circuito tendrá la forma:

(a) R_i– .... –R_i

mientras que si se da la segunda circunstancia llegaremos a una sucesión del tipo:

(b) ...... –R_i– ......

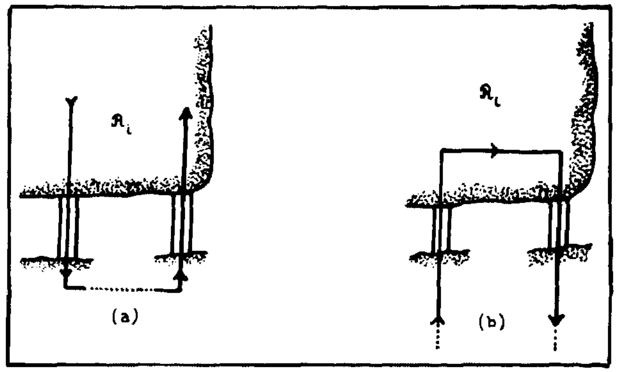


Figura 5

Entonces:

– Si el recorrido comienza en R_i, $N(R_i) = 2$.

– Si el trayecto no se inicia en R_i, $N(R_i) = 1$.

2.– Supongamos que el número de puentes que llegan a R_i es cuatro. También en este caso pueden darse las dos opciones vistas en el ejemplo anterior.

Si R_i es punto de partida del recorrido, los «pasos» por los cuatro puentes que confluyen en esta región están esquematizados en la figura 6.

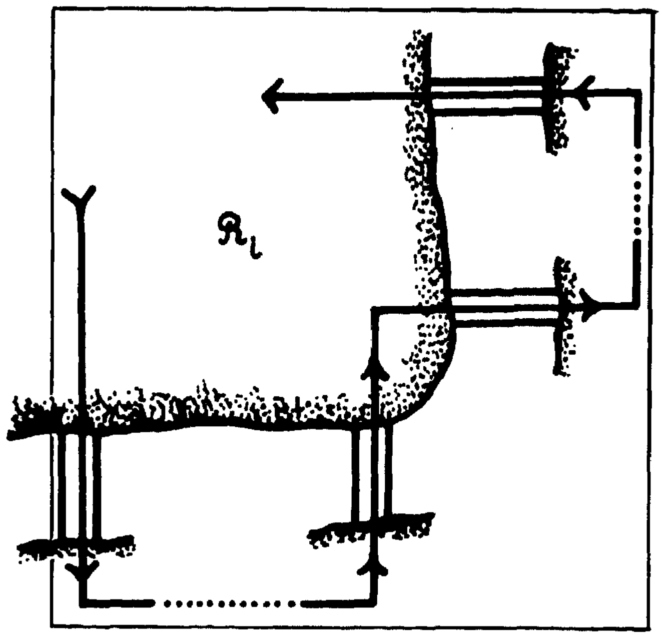


Figura 6

Por tanto, la sucesión que obtendremos será de la forma:

R_i– ...... –R_i– ...... –R_i

Si el trayecto no comienza en R_i (ver figura 7), entonces vendrá caracterizado por una secuencia del tipo:

...... –R_i– ...... –R_i– ......

Con esto, llegamos a las dos conclusiones:

– Si el recorrido comienza en R_i, entonces $N(R_i) = 3$.

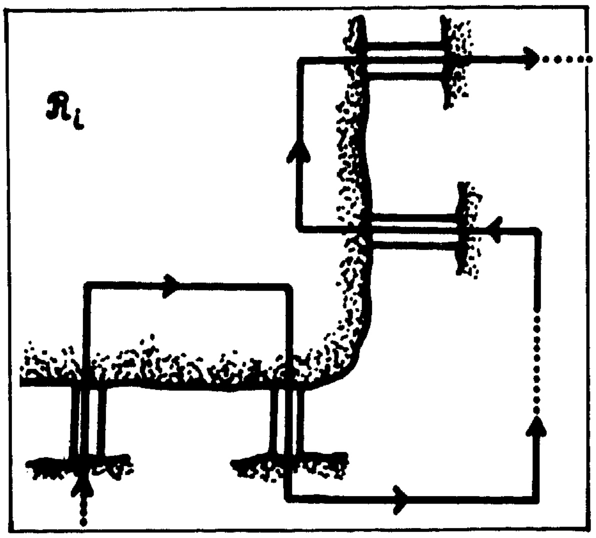


Figura 7

– Si el trayecto no se inicia en R_i, entonces $N(R_i) = 2$.

Considerando las dos situaciones precedentes no es difícil deducir que: Si el número de puentes que llegan a R_i es p (siendo p par), entonces:

– $N(R_i) = (p/2)+1$ si el recorrido comienza en R_i.

– $N(R_i) = p/2$ si el trayecto no se inicia en R_i.

Ya podemos resolver cualquier problema

Estamos, ya, en condiciones de resolver cualquier problema que se nos pueda presentar.

Sean n regiones: $R_1, R_2, \ldots, R_n$ enlazadas por m puentes: $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Si existe un «circuito» en el que pasemos una –y sólo una– vez por cada uno de ellos, la sucesión que lo caracterice deberá constar de m + 1 letras subindicadas.

Indiquemos por $n_p(R_1), n_p(R_2), \ldots, n_p(R_n)$ el número de puentes que llegan, respectivamente, a las regiones $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

A partir de estos datos calculemos $N(R_1)$, $N(R_2), \ldots, N(R_n)$, advirtiendo que si $n_p(R_i)$, siendo i un elemento del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$, es par consideraremos que de R_i no comienza el recorrido (más adelante se verá el motivo de esta elección).

Con esta información, confeccionamos la siguiente tabla:

R_i	$n_p(R_i)$	$N(R_i)$
R_1	$n_p(R_1)$	$N(R_1)$
R_2	$n_p(R_2)$	$N(R_2)$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
R_n	$n_p(R_n)$	$N(R_n)$

Teniendo presente que en el cómputo de puentes, efectuado en la segunda columna, hemos contado dos veces cada uno de ellos (debido a que un mismo puente llega, evidentemente, a dos regiones distintas), es obvio que la suma de todos los elementos de dicha columna es un número par, igual al doble del número total de puentes.

En consecuencia:

El número de zonas a las que llegan un número impar de puentes es par.

Apoyándonos en este resultado, consideremos las dos situaciones siguientes:

(a) Supongamos que el número de regiones en las que «desembocan» un número impar de puentes es DOS. Sin perder generalidad podemos admitir que dichas zonas son R_1 y R_2.

Con estas premisas obtendremos una tabla como la de la figura 8.

R_i	$n_p(R_i)$	$N(R_i)$
R_1	$2x+1$	$x+1$
R_2	$2y+1$	$y+1$
R_3	$2z$	z
.	.	.
.	.	.
R_n	$2t$	t

Figura 8

Observemos que la suma de todos los elementos de la segunda columna es:

$$2(x+y+z+\ldots+t+1) = 2m$$

siendo m el número total de puentes. Es decir:

$$m = x+y+z+\ldots+t+1$$

Por otra parte, la suma de todos los números de la tercera columna es:

$$x+y+z+\ldots+t+2 = m+1$$

En consecuencia, podemos formar una sucesión de m + 1 letras subindicadas, que nos caracterizará un trayecto en el que, tomando como punto de partida la región R_1 (o la R_2), se cruza una –y sólo una– vez por cada uno de los m puentes.

Notemos que si el «circuito» se iniciase en una cualquiera de las zonas con un número par de puentes (por ejemplo R_3), entonces la suma de los miembros de la tercera columna sería:

$$x+y+z+\ldots+t+3 = m+2$$

ya que, en esta situación, $N(R_3) = z+1$.

Con esto, la secuencia que determinaría el paseo tendría m + 2 letras subindicadas, lo cual es imposible.

En definitiva:

Si el número de las regiones a las que afluyen un número impar de puentes es DOS, existe algún trayecto (cuyo comienzo tiene lugar en una de dichas zonas) en el que se pasa una, y sólo una, vez por cada uno de los m puentes.

(b) Admitamos, ahora, que el número de comarcas con un número impar de puentes es CUATRO. Sin pérdida de generalidad, supongamos que dichas regiones son: R_1, R_2, R_3 y R_4.

Confeccionaremos, con estos datos, la siguiente tabla:

R_i	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	. . .	R_n
$n_p(R_i)$	$2x+1$	$2y+1$	$2z+1$	$2t+1$	$2u$	. . .	
$N(R_i)$	$x+1$	$y+1$	$z+1$	$t+1$	u	. . .	

La suma de todos los elementos de la segunda fila es, ciertamente:

$$2(x+y+z+t+u+\ldots+v+2)=2m$$

Por tanto:

$$m=x+y+z+t+u+\ldots+v+2$$

Además, la suma de todos los miembros de la tercera fila es:

$$x+y+z+t+u+\ldots+v+4=m+2$$

De aquí deducimos, fácilmente, que en este caso es imposible formar una sucesión de $m+1$ letras subindicadas. Consecuentemente:

Si el número de las regiones con un número impar de puentes es CUATRO, entonces no existe recorrido alguno en el que se pase una, y sólo una vez por cada uno de los m puentes.

Al mismo resultado llegaríamos si el número de regiones con un número impar de puentes fuese un número par mayor que cuatro.

Analicemos, por último, la situación en la que a todas las regiones implicadas en el problema llegan un número par de puentes.

Resulta evidente que, en tales circunstancias, llegaremos a una tabla tal como la de la figura 9.

R_i	$n_p(R_i)$	$N(R_i)$
R_1	$2x$	x
R_2	$2y$	y
R_3	$2z$	z
.	.	.
.	.	.
.	.	.
R_n	$2v$	v

Figura 9

La suma de todos los elementos de la segunda columna es:

$$2(x + y + z + \ldots + v) = 2m$$

Luego:

$$m = x + y + z + \ldots + v$$

Teniendo en cuenta que cualquier recorrido empieza, aquí, en una región con un número par de puentes (por ejemplo R_1) es obvio que la suma de todos los miembros de la tercera columna es:

$$(x + 1) + y + z + \ldots + v = m + 1$$

Por tanto:

Si a todas las regiones llegan un número par de puentes, entonces existe algún recorrido que, empezando por una cualquiera de estas zonas, cruza una –y sólo una– vez por cada uno de los m puentes.

Volvamos a la pregunta inicial

Volvamos, tal como prometimos, a la pregunta formulada al comienzo de este trabajo.

¿Hay algún trayecto en el que se pase una sola vez por cada uno de los siete puentes de la figura 1?

No se requiere mucha agudeza visual para descubrir que el número de regiones a las que llegan un número impar de puentes es cuatro. Entonces, en virtud del resultado obtenido en (b), no es posible efectuar un paseo que cumpla estas condiciones.

Sin embargo, apoyándonos en el último caso estudiado, no reviste dificultad «descubrir» que existe un recorrido en el que se pasa dos veces por cada uno de los siete puentes de Königsberg (ver figura 10).

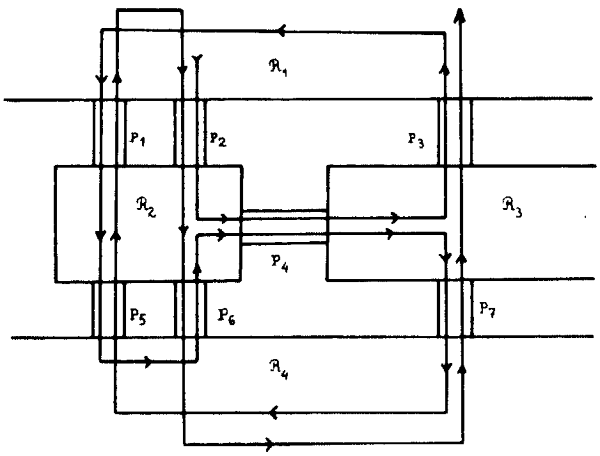


Figura 10