La teoría de las probabilidades y la realidad

José BARRIO GUTIÉRREZ*

Para cualquiera que reflexione un poco todavía sigue teniendo plena validez lo que en cierta ocasión le dijo un amigo al gran matemático alemán Dirichlet: «En verdad que no entiendo, y por ello estoy cada vez más asombrado, lo que sucede con vosotros los matemáticos. Realizáis vuestros razonamientos y cálculos sin contar para nada con la realidad y, sin embargo, los resultados a los que llegáis tienen perfecta aplicación en lo real».

Y, en efecto, este fenómeno es algo enigmático. En el siglo pasado, por ejemplo, Cayley crea el cálculo de matrices y muchos años después, en nuestro siglo, Heisenberg descubre que tal cálculo es aplicable a la descripción del comportamiento de las partículas elementales. Algo análogo acontece con la geometría de Riemann y la teoría del espacio dentro de la relatividad generalizada.

Por supuesto que los filósofos intentaron ya desde antiguo resolver esta aparente paradoja. Desde el *Dios geometriza* de Platón hasta la *Crítica de la razón pura* de Kant –quizás el intento más serio de solucionar esta cuestión–, continuando con las teorías de Brunschwicg y de los filosófos neopositivistas, la aporética que podría sintetizarse en la expresión *realidad despreciada por, pero sumisa a la matemática* no ha dejado de interesar a las más ilustres mentes, hasta ahora sin una solución definitiva.

Las cuatro reglas cartesianas

Es probable que la disciplina matemática con mayor aplicabilidad a la realidad sea la teoría de probabilidades (y la estadística, muy vinculada a la primera). Desde que Pascal resolvió matemáticamente el problema de juego de dados planteado por el caballero de la Mère, la teoría de probabilidades se ha ido presentando como la rama de la matemática a la que están más sometidas las diversas parcelas de lo real. Poca aplicación tiene en psicología el análisis, pero mucha y fecunda las probabilidades y las estadística. Y algo análogo sucede en biología, en economía e incluso en ciencias que parecen tan alejadas de la matematización como pueda ser la historia.

Ahora bien, la aplicación de la teoría de las probabilidades a lo real presenta una serie de dificultades que la convierten en un arma de dos filos. De una parte es indudable la validez y la fecundidad de tal aplicación, pero de otra parte esta aplicación tiene que hacerse con gran cuidado, pues de otra forma, y éste es el objeto fundamental de nuestro trabajo, se originan errores que podríamos calificar como «de bulto».

Vamos a dividir nuestro estudio en dos partes. En la primera analizaremos los problemas que presenta la teoría de las probabilidades en sí misma considerada. En la segunda los que se derivan de su aplicación a la realidad.

Si en cualquier especulación matemática –y no matemática, por supuesto– es necesario seguir fielmente las cuatro famosas reglas cartesianas (criterio de evidencia, análisis, síntesis y frecuentes recapitulaciones), en el tratamiento de un problema de probabilidades es todavía más imperioso. Su incumplimiento ha conducido a innumerables errores. Ejemplificaremos con dos bien conocidos, pero muy ilustrativos.

Una moneda al aire y una paradoja

El primero es un problema bien sencillo hoy en día, pero no lo fue así en el siglo XVIII, cuando se le planteó a uno de los matemáticos más ilustres de su época, D'Alembert. Consistía en los siguiente: se lanza sucesivamente dos veces una moneda

* Catedrático de filosofía del I.B. «Ramiro de Maeztu». Madrid.

al aire: ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos una vez cara?. D'Alembert razonó de esta manera. Los casos posibles que pueden obtenerse al lanzar la moneda son tres: dos caras, dos cruces, una cara y una cruz; el número de casos favorables son dos; en consecuencia, la probabilidad es de 2/3.

El razonamiento era erróneo, ya que el número de casos posibles es cuatro (cara-cara, cara-cruz, cruz-cara, cruz-cruz), por lo que la probabilidad pedida es de 3/4. El error de D'Alembert radicó en considerar como identificables, es decir, como el mismo, los casos cara-cruz y cruz-cara.

El segundo caso que vamos a estudiar es más complejo y es conocido con el nombre de *paradoja de Bertrand* (matemático francés del siglo pasado). La paradoja, tal como Bertrand la presentó a los matemáticos de su época, es la siguiente:

«Tomemos una circunferencia e inscribamos en ella un triángulo equilátero. Considerando todas las cuerdas del círculo, ¿cuál es la probabilidad de que una cuerda cualquiera tomada al azar sea más larga que el lado del triángulo inscrito?

Prontamente se halló la «solución» del problema: la probabilidad es de 1/2. El razonamiento que lleva a esta conclusión es éste (fig. 1).

El número de cuerdas comprendidas entre los arcos AB y CD (todas ellas más largas que el lado del triángulo) es igual al número de cuerdas comprendidas en el arco BD (todas ellas más cortas que el lado del triángulo). En consecuencia la probabilidad de que una cuerda sea mayor que el lado del triángulo es de 1/2.

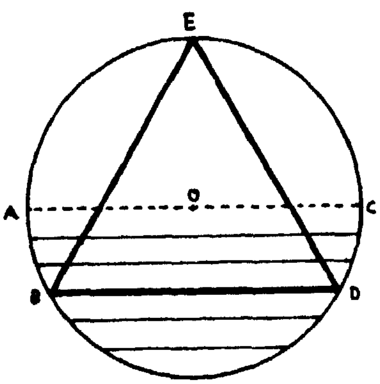


Fig. 1

La sorpresa de sus contemporáneos fue enorme cuando Bertrand demostró que la solución dada era una de las soluciones posibles, pero que había otras dos, en las que la probabilidad pedida era de 1/3 y de 1/4.

En la figura 2 se ve con toda claridad que las cuerdas comprendidas en ABC y en ADE son más cortas que el lado del triángulo, y dobles en número a las cuerdas comprendidas en ADB (más largas que el lado del triángulo). Por tanto la probabilidad es de 1/3.

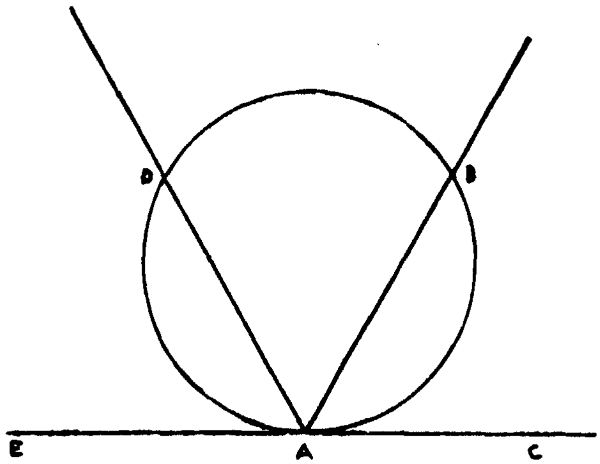


Fig. 2

$\widehat{BAC} = \widehat{DAB} = \widehat{DAE} = 60°$

De la misma manera en la figura 3 se observa como el número de cuerdas más cortas que el lado del triángulo es triple que el de cuerdas más largas siendo la probabilidad pedida de 1/4.

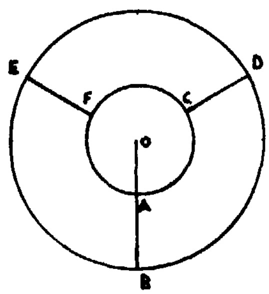


Fig.3

$OA = \frac{OB}{2}$

Área EFCD = Área CDAB =
Área ABEF = $\overline{OA}^2 = \frac{1}{4}\overline{OB}^2$

El problema bien planteado

Podría alguien preguntarse: ¿y cómo es posible que un problema matemático tenga tres soluciones? ¿no parece ésto romper la precisión y exactitud de la matemática?

El que así preguntase tendría toda la razón: un problema matemático con pluralidad de soluciones pondría en entredicho la exactitud de esta ciencia, *pero siempre que el problema esté bien planteado*. El de Bertrand era un problema mal planteado (por supuesto que Bertrand lo hizo así conscientemente), y un problema mal planteado es un pseudoproblema, por lo que admite ninguna, una o múltiples soluciones. De una proposición falsa puede concluirse cualquier cosa *(ex falso omne sequitur)*, dicen los lógicos. Y un problema mal planteado puede hacerse equivalente a una proposición falsa.

Para evitar llegar a conclusiones erróneas o perderse en disquisiciones estériles, nunca se hará bastante hincapié en este hecho: antes de intentar resolver un problema hay que cerciorarse de que es un problema bien planteado y no un pseudoproblema.

Como ilustración analizaremos dos ejemplos. Uno de ellos es el formulado en los siguientes términos:

¿«Qué sucede cuando una fuerza irresistible se encuentra con un cuerpo inamovible»? (que sepamos, este problema fue planteado por Adán Parvipontano, pensador del siglo XIII). Las especulaciones que pueden derivarse de esta cuestión son infinitas, como las arenas del mar (de hecho así sucedió en los finales de la Edad Media, en la que esta cuestión sólo fue superada por la siguiente: *utrum chimaera, bombinans in vacuo, secundas intentiones comedere possit* –hacemos observar a los filósofos que lean estas páginas que el «comedere» no puede traducirse por «comer», sino por «vomitar», dada la presencia de las «segundas intenciones»–). En realidad nos encontramos ante un problema mal formulado, ya que encierra en su formulación una «contradictio in terminis» o, si se prefiere, un «sin sentido semántico». «Fuerza irresistible» es aquella a la que no puede oponerse cuerpo alguno; «cuerpo inamovible» es el que se opone a toda fuerza. En consecuencia lo que dice el problema es: ¿qué sucede cuando una fuerza que puede mover cualquier cuerpo se encuentra con un cuerpo que no puede ser movido? O dicho en otros términos, que sucede con la conjunción p y $\bar{p}$ ($p \wedge \bar{p}$). Pues sucede que es una contradicción.

El rostro limpio y el rostro sucio

El ejemplo más bello y preciso de pseudoproblema, de problema mal planteado, lo hemos encontrado en la *Mishná* (por si alguien no lo recuerda, diremos que la *Mishná* es una de las dos partes en que se divide el *Talmud;* la otra parte es la *Guemará*). Está expuesto en uno de los *haggadot* y se presenta como un problema planteado por un rabino a un «goy», con objeto de que éste comprenda como es el razonamiento talmúdico. Lo expondremos en forma de diálogo:

Rabino: Dos hombres caminan por un sendero; es verano, mediodía, el calor es intenso; la marcha es penosa y ardua, pero al fin llegan ante una fuente de cristalina agua; uno de los caminantes tiene el rostro sucio de polvo, el otro no. ¿Cuál de los dos se lavará el rostro en el agua de la fuente?

Goy: La cuestión es muy fácil. El que tiene el rostro sucio.

Rabino: No, no es así. Has razonado muy mal. Reflexiona.

Goy: ¡Ah, ya caigo! Se lava el rostro el que lo tiene limpio. En efecto, el que lo tiene sucio no ve su rostro, sino el de su compañero, y al observar que éste lo tiene limpio, cree que así sucede con el suyo y no se lava. Por el contrario, el que lo tiene limpio ve que el de su compañero está sucio, cree que el suyo también lo está y se lava.

Rabino: Sigues sin comprender nada. ¿Cómo es posible que si dos hombres van por el mismo camino, a la misma hora, durante el mismo tiempo, lleguen al final de su marcha el uno con el rostro limpio y el otro con el rostro sucio?

Esperamos que se recoja toda la finura, elegancia y enorme profundidad de este *haggadot.* Es indudablemente un problema mal planteado o, si se quiere, con un planteamiento imposible. Su única solución es que no hay solución o, si se quiere, que hay que replantearse el problema variando sus datos.

Con todo lo dicho se pone de relieve la dificultad intrínseca que encierra el cálculo de probabilidades.

La imprecisión es peor que el error

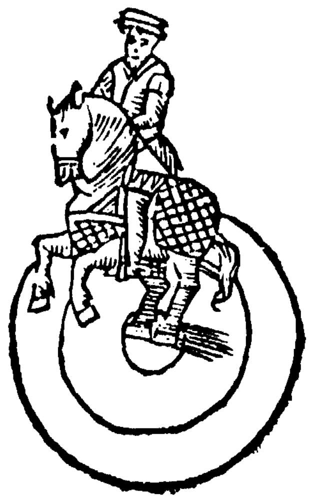
Pero estas dificultades se incrementan *usque ad coelum* al intentar aplicar dicho cálculo a los fenómenos reales. La razón fundamental de este incremento radica en que los fenómenos de la realidad difícilmente son equiposibles, tal como en principio se exige en la teoría de probabilidades. La consideración de que fenómenos no equiposibles son equiposibles ha sido fuente de continuos errores, errores cometidos por autores de primera fila.

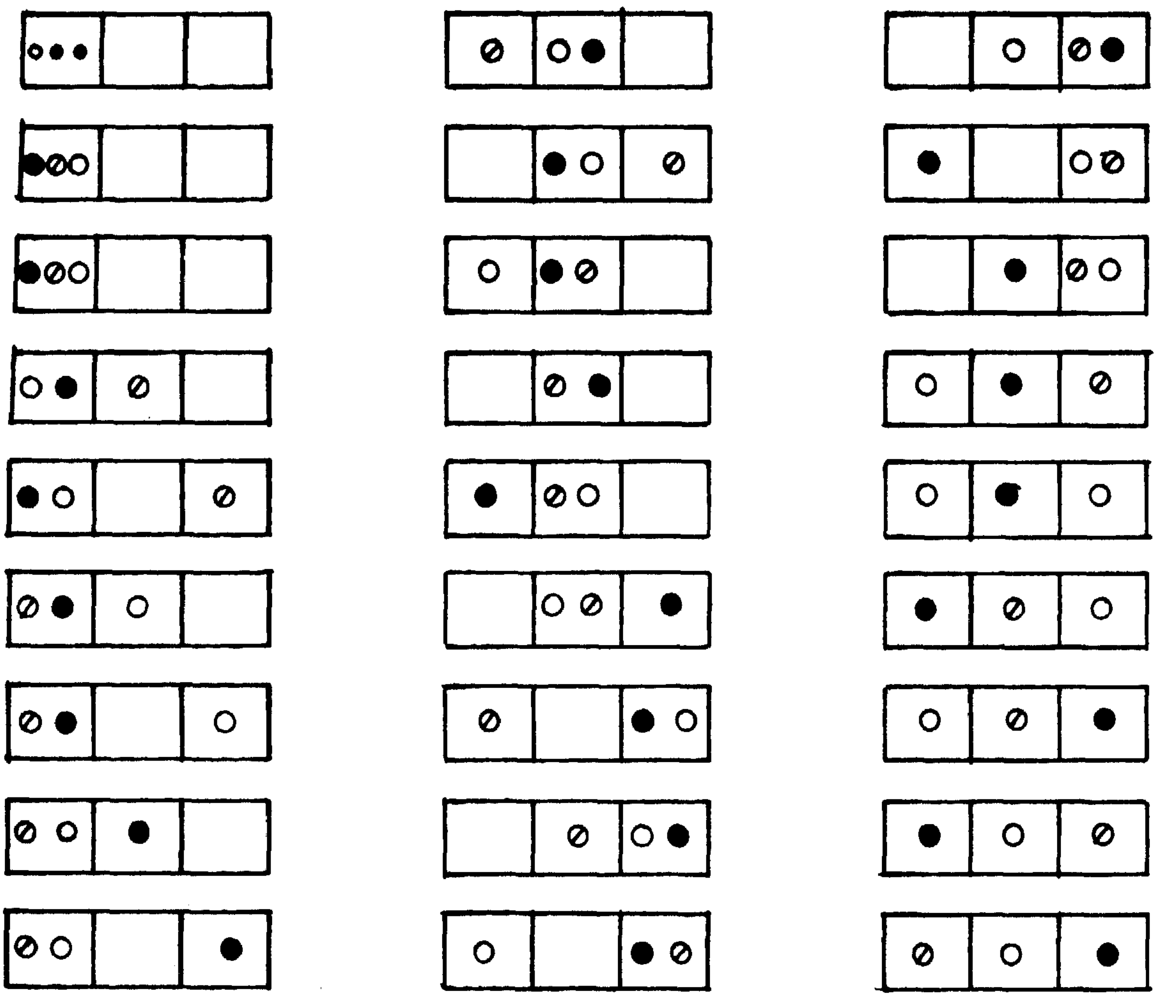
La falsa equiposibilidad de los sucesos o fenómenos se suele introducir de dos formas. A veces se realiza mediante el establecimiento de un enunciado incompleto, preteriendo factores fundamentales en el problema, lo que conduce inevitablemente al error o, al menos, a la imprecisión, y no olvidemos que, como dijo Lord Kelvin, «en la Ciencia, la imprecisión es peor que el error».

Otras veces la falacia está en la aplicación de la teoría de las probabilidades a sucesos que se presentan como equiposibles cuando, en realidad, son radicalmente no equiposibles.

Veamos algún ejemplo de uno y otro caso.

Planteemos el siguiente problema: ¿de qué forma pueden situarse tres seres en tres lugares distintos? A efectos de una mayor clarificación, vamos a representar los seres por bolas y los lugares por cajas. El problema parece de fácil solución: la teoría combinatoria nos dice que pueden distribuirse de 27 maneras distintas, que quedarían representadas tal como se ve en la figura que sigue (por supuesto, cada una de las distribuciones no tiene la misma probabilidad):





Sin embargo la solución dada es falsa por ser incompleta, ya que el problema propuesto admite tres soluciones, según los seres que se consideren.

A escala macroscópica, incluido el nivel molecular, en el que los seres tienen *existencia identificable* y se aplica la estadística de Gibbs-Boltzmann, la solución que hemos ofrecido es correcta.

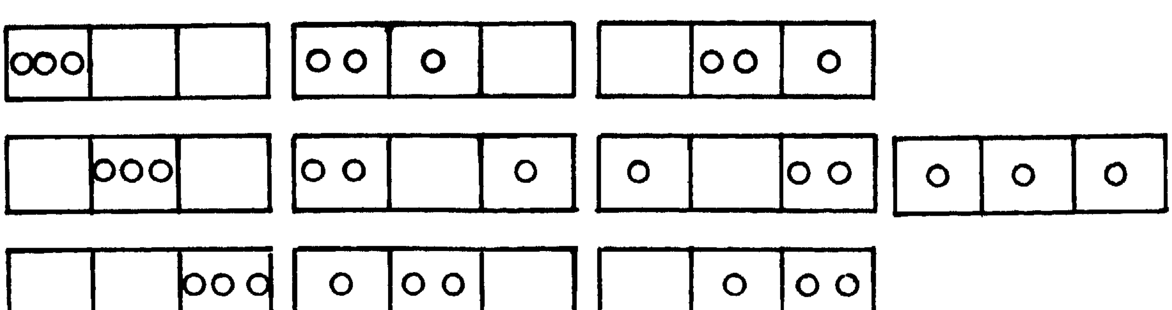
El extraño caso de las partículas elementales

Pero acontece de modo distinto a escala de partículas elementales, donde la citada estadística ya no es aplicable. A dicha escala las partículas tienen *existencia, pero no existencia identificable,* lo que automáticamente impide que se las pueda aplicar los principios de la estadística Gibbs-Boltzmann.

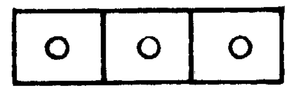
Todavía más, dentro de las partículas elementales hay que distinguir entre los bosones (regidos por la estadística de Bose-Einstein) y los fermiones (regulados por la estadística de Fermi-Dirac). El criterio diferenciador fundamental entre unos y otros radica en que los primeros no tienen ninguna acción mutua y varios de ellos pueden encontrarse en el mismo estado (este es el caso, entre otros, de los fotones); los segundos pueden interaccionarse y dos de ellos no pueden encontrarse simultáneamente en el mismo estado (caso de los diversos electrones de un átomo, que no pueden tener iguales todos sus números cuánticos).

Pues bien, en el problema que nos habíamos propuesto, además de la solución ya avanzada, caben otras dos, según tratemos con bosones o fermiones.

En el supuesto de distribuir tres fotones entre tres estados, las posibles distribuciones, al no ser los fotones discernibles por no tener existencia identificable, son 10:



Si se trata de fermiones –por ejemplo, de electrones de un mismo átomo– al ser seres sin existencia identificable y además no poder encontrarse dos de ellos en el mismo estado, las posibles distribuciones se reducen a una sola:



De todo lo dicho se ve con claridad que el problema, tal como había sido planteado al principio: ¿de qué forma pueden situarse tres seres en tres lugares distintos? es un problema mal formulado, ya que su enunciado es imcompleto. Su correcta formulación exigiría determinar qué tipos de seres son, si macroscópicos, bosones o fermiones.

Pero la causa más corrriente de una incorrecta aplicación de la teoría de las probabilidades a la realidad se cifra en la inadecuada consideración de sucesos como equiposibles, cuando en modo alguno lo son.

Soluciones de principiante

Fijémonos en un problema «abstracto» y elemental de probabilidades: ¿cuál es la probabilidad de que al tirar un dado salga el número 5?. Un principiante sabe que la probabilidad es de 1/6.

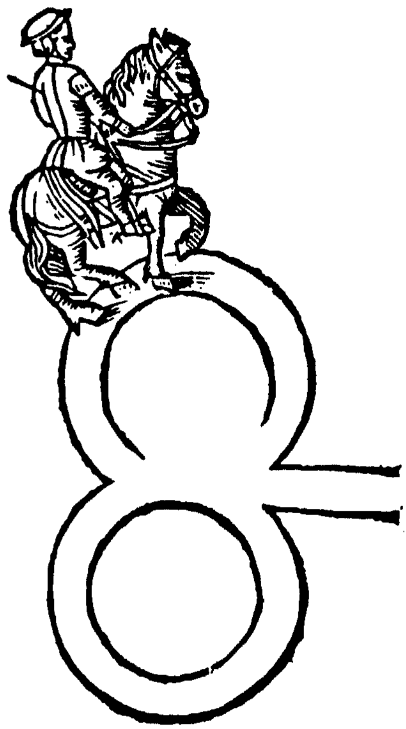
Planteemos ahora este otro: en una fiesta de sociedad hay cuatro muchachas, llamadas *Hybris, Moira, Acribeia* y *Shangri-la,* y yo tengo que elegir a una; ¿cuál es la probabilidad de que la muchacha elegida sea Hybris? La respuestas del principiante sería que de 1/4, ya que hay cuatro casos posibles y uno favorable. Con lo que cometería un craso error, ya que la probabilidad es de 0 (la probabilidad del suceso imposible).

La causa del error está en considerar los cuatro sucesos (elegir a *Hybris*, elegir a *Moira*, elegir a *Acríbeia* y elegir a *Shangri-la*) equiposibles. Pero, en tal situación, yo no dudaría un segundo en elegir a *Shangri-la*. El suceso «elegir a *Shangri-la*» tiene probabilidad 1 (probabilidad del suceso seguro), por lo que todos los demás sucesos (sucesos contrarios al seguro) son imposibles (probabilidad 0).

No es igual operar con un aséptico dato que con acontecimientos reales. La realidad es mucho más complicada de manejar que los entes abstractos de la matemática.

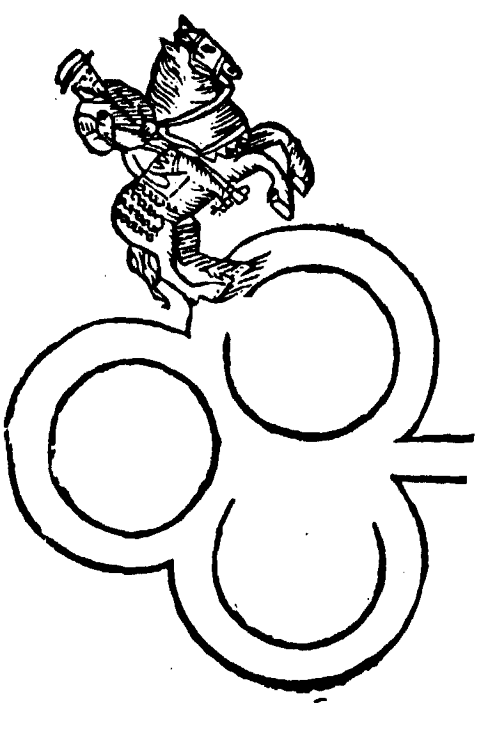
Un error semejante, aunque no derivado del olvido de las pulsiones humanas como el anterior, sino de la preterición de la naturaleza de los átomos sería el siguiente:

En un recipiente tenemos 8 átomos de oxígeno y 16 de hidrógeno; ¿cuál es la probabilidad de que, si se unen en grupos de tres, se obtenga la unión de un átomo de 0 con dos de H? Sobre la base de considerar todas las diversas uniones equiposibles la respuesta sería que la probabilidad pedida es escasa. Todos sabemos lo absurdo de tal solución, absurdo que se deriva de no haber tenido en cuenta la estructura de la capa electrónica externa de los átomos respectivos.



El evolucionismo y la glicocola

El lector podrá pensar que un disparate del calibre del anteriormente analizado no puede cometerse. Nada más lejos de la verdad, como ahora veremos.



Pocas teorías (quizás con la excepción del heliocentrismo) han sido tan polemizadas como la teoría de la evolución. Aún hoy día la polémica resurge de vez en cuando, aunque con poco éxito (recordemos el caso de Gehlen). Por otro lado, un cuidadoso rastreo permite descubrir curiosos restos de la oposición antievolucionista, siendo uno de los más llamativos la ley del estado de Tennesse, en U.S.A., que prohíbe enseñar la teoría de la evolución (la ley, por supuesto está en desuso, pero todavía fue aplicada en el famoso caso de Scopes).

De entre las innumerables objeciones al evolucionismo una de las más extendidas ha sido la basada en la teoría de las probabilidades. Uno de sus expositores, quizás el más brillante, fue Lecomte de Noüy. Su argumentación se cifraba en sostener que, dados los innumerables componentes del ojo humano, la probabilidad de que se integrasen al azar en la forma correcta, es decir, para formar tal ojo, era prácticamente despreciable. Con mayor razón habría que despreciar la probabilidad de la constitución de todo un organismo más complejo.

Modernamente se aplicó este argumento a, por ejemplo, la síntesis de cualquier aminoácido, cuya polimeración constituye las proteínas, los «ladrillos» del organismo viviente. Consideremos uno de estos aminoácidos, muy sencillo, la glicocola, cuya fórmula es H_2NCH_2COOH.

¿Cómo poder admitir que, al azar, se hayan unido sus componentes para constituir tal glicocola en un momento determinado de la historia del universo? La probabilidad es tan pequeña que es despreciable. Y no digamos nada si luego pasamos a considerar la probabilidad de que entre dos aminoácidos se realizase el enlace peptídico, es decir la unión mediante un enlace amida entre el grupo carboxilo de un aminoácido y el amino de otro. Y después habrá que considerar la probabilidad de que el dipéptido así formado siguiese el proceso de polimerización para constituir una proteína etc. etc.

Tal forma de razonar es equiparable a la que vimos en los dos ejemplos anteriores, el de la fiesta de sociedad y el de la unión de átomos de O e H. Su error está en considerar equiparables todas las posibles uniones teóricas, y evidentemente no es así. Y la mejor prueba la dio Stanley Miller al sintetizar en el laboratorio aminoácidos con facilidad y rapidez.

Vida en la constelación de la Ballena

Naturalmente que de todo lo visto no hay que sacar la conclusión de que la teoría de las probabilidades no es aplicable a lo real. Todo lo contrario, la realidad está regulada por ella. Lo que sí hay que tener muy en cuenta es la complejidad de la aplicación de esta rama de la matemática a los fenómenos reales.

En la actualidad los fenómenos del universo tienen que ser interpretados en términos de probabilidad y estadística, más que de absoluta certeza.

¿Es posible que si yo lleno un vaso de agua y lo dejo sobre la mesa suceda que, en un momento cualquiera, la masa de agua se divida en dos mitades, una de las cuales se congele y la otra se ponga a hervir? Es posible, si bien la probabilidad es tan pequeña que no vale la pena hacer el experimento y mirar al vaso fijamente para ver cuando ocurre (este curioso suceso se conoce con el nombre de la *marmita de Jeans;* para acelerar su realización y hacerla factible en la práctica necesitaríamos de la intervención del famoso *demonio de Maxwell*).

Si lanzamos un partícula alfa a través de una masa de nitrógeno, ¿se transformará un átomo de N en H? La respuesta no puede ser taxativa, sí o no. Lo único que se puede afirmar es que hay una probabilidad p de que tal suceso ocurra, probabilidad que puede ser calculada.

Dicho en otras palabras, los fenómenos naturales se presentan como fenómenos de probabilidad, que en unos casos será altísima (lo que equivale a la certeza práctica de su realización) y en otros bajísima (lo que equivale a la certeza práctica de su no realización).

La célebre frase de Gibbon, «la historia es una ciencia de mera probabilidad» es hoy día también aplicable a las ciencias de la naturaleza.

Para terminar, vamos a proponer al lector lo que podría denominarse «la paradoja de la existencia de vida en el planeta de *tau Ceti* (tau de la Ballena)»

¿Cuál es la probabilidad de que en un planeta de la estrella *tau* de la constelación de la Ballena exista vida?

Planteémonos la probabilidad de que *no* exista ninguna forma de vida:

1. Probabilidad de que no exista un caballo: (dado que no tenemos dato alguno para decidir, estimamos equiposibles la existencia de un caballo en *tau Ceti*): 1/2
2. Probabilidad de que no exista un león: 1/2
3. Probabilidad de que no exista un tigre: 1/2

n) Probabilidad de que no exista un ornitorrinco: 1/2

Probabilidad P (N) de que no exista *ninguna* de las *n* formas de vida $P(N) = P(1).\ P(2).\ P(3) \ldots\ldots P(n) = \frac{1}{2^n}$

Probabilidad de que exista *alguna* de esas formas de vida (suceso contrario al anterior)

$$P(\tilde{N}) = 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Probabilidad que, prácticamente, equivale a la certeza, ya que *n* es enormemente elevado.

¡¡Luego es seguro que hay vida en un planeta de *tau Ceti*!!