

Cursillo de Matemáticas para Profesores Adjuntos en Santander

**Se considera necesaria la iniciación de la
Matemática Moderna en el Bachillerato**

Desde los primeros años podrían empezar a usarse la nueva
terminología y los nuevos símbolos

Visto el éxito alcanzado por las Reuniones de Catedráticos que, organizadas por el C. O. D., han venido realizándose durante los últimos años, se pensó en celebrar con análoga finalidad cursillos para Profesores adjuntos durante las vacaciones de verano en la Universidad Internacional "Menéndez Pelayo", de Santander.

A tal efecto la Sección de Matemática del C. O. D. organizó el de esta disciplina, que debía desarrollarse durante la segunda quincena de agosto, distribuido en dos Secciones:

Sección 1.—Por las mañanas, conferencias y lecciones de *Matemática moderna*.

Sección 2.—Por las tardes, conferencias y lecciones de carácter general sobre *Pedagogía de la Matemática en la Enseñanza Media*.

Los informes remitidos, por una parte, por D. José Royo López, como Delegado de la Comisión para el "Ensayo de la Matemática moderna", y por otra, por los Inspectores D. Francisco B. Cancho y D. Luciano Fernández Penedo, que dirigieron la segunda parte del cursillo, ponen de manifiesto el éxito alcanzado con esta reunión de Profesores, cuya eficacia, ya prevista, aconseja su repetición en años sucesivos.

DIRECTORES DEL CURSILLO Y ASISTENTES

Como anteriormente se indica, el Cursillo fue dirigido por D. José Royo López, D. Francisco Bernardo Cancho y D. Luciano Fernández Penedo. Los Profesores Adjuntos numerarios asistentes fueron:

Distrito de Barcelona: D. Rafael Romero Mercadal, del Instituto "Maragall", Licenciado en Ciencias Exactas, adjunto numerario Matemáticas; D. Pedro Castro, del Instituto de Tarragona, Licenciado en Ciencias Exactas, adjunto numerario Matemáticas; y D. Alfredo López Sierra, del "Ausias March", Licenciado en Ciencias Exactas, adjunto numerario Matemáticas.

Distrito de Granada: D.^a Prudencia Bárcena Teherán, del Instituto de Almería, Licenciada en Física y Químicas, adjunto numerario Matemáticas; y D.^a Aurora del Pozo Martínez, del Instituto de Granada (F.), adjunto numerario Matemáticas.

Distrito de Madrid: D.^a Amparo González Sabariego, del Instituto de Guadalajara, Licenciada en Ciencias Exactas y Química, adjunto numerario Matemáticas; D. Nemesio Rodríguez F., del "Cervantes", Licenciado en Ciencias Exactas, adjunto numerario Matemáticas; D. Antonio Rodríguez Socorro, del Instituto de Alcalá de Henares, Licenciado en Ciencias Exactas, adjunto numerario Matemáticas; y doña

María Luisa González Sabariego, del "I. la Católica", Licenciada en Físico-Matemáticas", adjunto numerario Matemáticas.

Distrito de Murcia: D. Pío Larrea Roldán, del Instituto de Murcia (M.), Licenciado en Ciencias Químicas, adjunto numerario Matemáticas; y D. Felipe Saura Hidalgo, del Instituto de Cartagena, Licenciado en Ciencias Exactas, encargado de cátedra.

Distrito de Criedo: D. Agustín Miguélez Posada, del Instituto de Astorga, Licenciado en Ciencias Químicas, adjunto numerario Matemáticas; D. Fernando de Cos Jáhatuy, idem id., Licenciado en Ciencias Exactas, adjunto numerario Matemáticas; y D. Demetrio Mato del Palacio, del Instituto de Ponferrada, Licenciado en Ciencias Químicas, adjunto numerario Matemáticas.

Distrito de Salamanca: D. Miguel Antonio Esteban, del Instituto de Cáceres, Licenciado en Ciencias Químicas, adjunto numerario Matemáticas; D.^a Pilar Martín Ruiz, del Instituto de Zamora, Licenciada en Ciencias Exactas, adjunto numerario Matemáticas; y D. José Manso Portero, del Instituto de Salamanca (M.), Licenciado en Ciencias Exactas, adjunto numerario Matemáticas.

Distrito de Santiago: D. Juan A. Villarguide Lourido, del Instituto de La Coruña (M.), Licenciado en Ciencias Exactas, adjunto numerario Matemáticas; doña María Luisa García Rodeja, del Instituto de Santiago (F.), Licenciada en Ciencias Exactas, adjunto numerario Matemáticas; y D.^a Concepción López Loje, del Instituto de Pontevedra, Licenciada en Ciencias Químicas, adjunto numerario Matemáticas.

Distrito de Sevilla: D.^a María Teresa Melara Loreto, del Instituto de Huelva, Licenciada en Ciencias Químicas, adjunto numerario Matemáticas.

Distrito de Valencia: D. Eduardo Alberto García, del Instituto de Valencia (F.), Licenciado en Ciencias Químicas, adjunto numerario Matemáticas.

Distrito de Valladolid: D.^a Teresa Menéndez García, del Instituto de Bilbao (F.), Licenciada en Ciencias Físicas y Químicas, adjunto numerario Matemáticas; y D. Gonzalo Allo Gundín, del Instituto de Valladolid (M.), Licenciado en Ciencias Exactas, adjunto numerario Matemáticas.

Distrito de Zaragoza: D. Alfonso Faci Muñoz, del Instituto de Zaragoza (F.), Licenciado en Ciencias Exactas, adjunto numerario Matemáticas.

PROGRAMA El Cursillo, que comenzó el 10 de agosto y duró dos semanas, se dividió en dos Secciones. La primera, por las mañanas, de diez a doce; y la segunda, por las tardes, de cinco a siete. El programa general de las mismas fue el siguiente:

SECCIÓN PRIMERA:

Conferencias: 1) Conjuntos. 2) Grupos. 3) Anillas y cuerpos. 4) Topología de la recta.

Ocho lecciones de *Matemática moderna* de quinto curso, seguidas de los correspondientes coloquios.

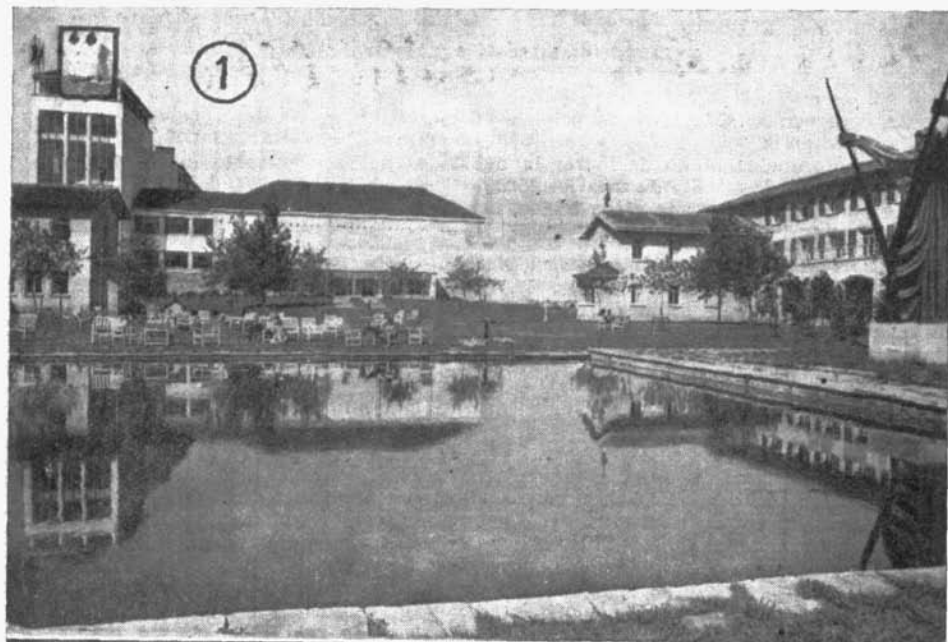
SECCIÓN SEGUNDA:

Primera semana.—1.^a conferencia: Didáctica de la Matemática: La preparación de las lecciones. Labor de los Seminarios.

2.^a conferencia: Metodología de las demostraciones y resolución de problemas en el análisis.

3.^a conferencia: El material didáctico para la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Media.

Segunda semana.—1.^a conferencia: La unidad didáctica. Su interpretación. Principales errores de los alumnos en las clases de Matemáticas, y modo de cortarlos.



CURSILLO DE MATEMATICAS EN SANTANDER: 1. Universidad Internacional de Las Llamas, donde se celebraron las sesiones.—2. Aspecto del aula durante una de las conferencias del Catedrático E. Hernández Alonso.

2.ª conferencia: Metodología para las demostraciones y resolución de problemas en la Geometría.

3.ª conferencia: Modo de lograr la debida atención y correcta expresión de los alumnos en el desarrollo de una lección.

Lecciones para ilustrar estos temas, explicadas por los cursillistas y seguidas de los correspondientes coloquios.

SECCION PRIMERA Profesorado: Director de la Sección, D. José Royo López. Profesores: D. Francisco Marcos de Lanuza, D. Eulogio Hernández Alonso, D. Julio García Pradillo y D. Enrique de Juan Hernández.

Cursillistas: Veintidós Profesores adjuntos numerarios y un Profesor adjunto interino, seleccionados por el Centro de Orientación Didáctica. Además acudieron la Srta. Feliciano Florencio Sabaté y D. Florencio Pérez Edreida, Profesores adjuntos interinos de los Institutos de Ceuta y La Coruña (masculino), respectivamente. También asistió la Profesora argentina Srta. Sarha Pupato Bourget, del Instituto "Santa Felicitas" (Escuela Normal), de Buenos Aires.

La conferencia inaugural estuvo a cargo del Director, D. José Royo, así como los coloquios que hubo. La labor normal diaria se dividía en dos partes: conferencias sobre puntos fundamentales del Algebra moderna y explicación comentada, con coloquio subsiguiente, de los folletos del C. O. D. para quinto curso.

El Sr. Royo inaugura el curso haciendo un boceto histórico del desarrollo de la Matemática, recalcando a nuestros efectos la trascendencia de la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grados y el establecimiento de los números complejos que no tienen, podríamos decir, existencia real, sino que se presentan como un conjunto de elementos que verifican en sus operaciones las propiedades conmutativa, asociativa, existencia de elementos neutros, elementos inversos..., en fin, lo que nos conduciría al nuevo concepto de estructura de la Matemática moderna. Pero estas ideas eran demasiado avanzadas para su tiempo y hubieron de germinar ocultas durante los siglos XVIII y XIX para desembocar en el gran movimiento axiomático de Hilbert.

Hace ver cómo desde los griegos hasta el principio de nuestro siglo la Matemática ha tenido un desarrollo radial: Aritmética, Geometría, Algebra, Análisis—si bien la Geometría Analítica establece el primer puente de enlace—, pero esta diversidad de materias diferentemente tratadas, hasta el extremo de parecer por su aparente heterogeneidad ciencias distintas, va, desde un punto de vista epistemológico, contra la unidad de nuestra ciencia, y por otra parte el desarrollo gigantesco que la Matemática ha alcanzado y lo que de ella exige el avance meteórico de la Ciencia teórica y sobre todo la técnica, necesita de un nuevo esquema en sus métodos de exposición y en el modo de adquirir los conocimientos matemáticos, siento Steinitz primero y el equipo Bourbaki después, los iniciadores de esta nueva dirección. Por ello, conviene antes de iniciar los estudios superiores reconstruir el conjunto de los conocimientos matemáticos adquiridos en el curso de los estudios elementales, despojándolo en su desarrollo lógico, como diría Félix, de su carácter sensorial justificado por la necesidad de la experiencia física o de la intuición espacial para la captación primitiva de los conceptos.

El Profesor MARCOS DE LANUZA dio cinco conferencias en este Cursillo con el siguiente temario:

Conjuntos.—Generalidades.—Igualdad.—Conjunto complementario.—Implicación. Unión e intersección de conjuntos.—Dualidad respecto de la complementación.

Operaciones.—Concepto.—Leyes asociativa y conmutativa.—Elementos regulares. Elemento neutro.—Elementos simétricos.

Anillos.—Simetrización de una ley asociativa y conmutativa: Aplicación a los números enteros.—Concepto y propiedades de anillos: Divisores de cero.—El anillo de los números enteros.

Divisibilidad en el anillo de los números enteros. Clases de restos.

Divisibilidad en anillos.—Concepto de ideal.—Múltiplos y divisores.—Dominios de factorización única.—Dominios euclídeos.

De estas conferencias fueron, las unas, al nivel del auditorio, constituido por los Profesores Adjuntos de Instituto, y las otras, como lección modelo de la Enseñanza Media, ampliando los conceptos en ellas expuestos con comentarios didácticos.

El Profesor HERNÁNDEZ ALONSO dio cuatro conferencias, unas de tipo magistral y otras como ampliación al estudio de los apuntes del Centro de Orientación Didáctica, publicados por la Dirección General de Enseñanza Media.

La primera versó sobre correspondencia entre conjuntos. A partir de la definición de producto de conjuntos y de conceptos de correspondencia directa e inversa, se llega al estudio de las *aplicaciones*, insistiendo en las *biyecciones*.

En la segunda se ocupó de *relaciones binarias*, atendiendo a las propiedades fundamentales que pueden tener para llegar a las relaciones de equivalencia y de orden, terminando con los conceptos de *clases de equivalencia* y *conjunto cociente*.

La tercera lección fue una conferencia sobre teoría de grupos, con los siguientes apartados: concepto de grupo, axiomas que lo definen, grupos finitos e infinitos, grupos abelianos, grupos de transformación, teorema de Cayley, isomorfismo, subgrupos y homomorfismos, y grupos de sustituciones.

La última conferencia fue una lección original sobre los conceptos clásicos de la teoría combinatoria a través del aspecto moderno de correspondencia entre conjuntos, obteniendo de una manera sencilla las variaciones ordinarias y con repetición, las permutaciones y las propiedades de los números combinatorios.

El Profesor GARCÍA PRADILLO intervino en seis lecciones, tratando de los números racionales, llegando a la conclusión de poseer estructura de cuerpo. Hizo también un esquema-resumen de los conceptos hasta entonces considerados: conjuntos, operaciones con ellos, relaciones binarias, operaciones internas, grupos, anillos, cuerpos, isomorfismos, etc. Explicó también los vectores libres de una recta, llegando a ver que dicho conjunto tenía la estructura de espacio vectorial respecto a la edición y multiplicación por un número racional. Estudió, asimismo, los vectores libres de un plano e introdujo las coordenadas de vectores y de puntos en el plano, deduciendo las diversas formas de la ecuación de la recta. Finalmente dio una conferencia exponiendo consideraciones, originales algunas, acerca del papel de los conjuntos sobre las diversas partes del entramado matemático: conceptos primitivos, postulados, definiciones, clasificaciones y teoremas, conferencia que tituló: "Panorama conjuntista de la Matemática elemental".

El Profesor DE JUAN dio cuatro conferencias sobre los siguientes temas:

Polinomios y fracciones algebraicas.—Estudio topológico de Q .—Sucesiones de Cauchy.—El número real.—Estudio topológico de R .

En la primera conferencia expuso las propiedades algebraicas de los polinomios sin atribuirles el carácter de función, introduciendo el concepto de "polinomio en una indeterminada" sobre un anillo de integridad A , para estudiar seguidamente una operación interna, la adición; y otra externa, la multiplicación por un elemento de A . Estas operaciones, cuando A es un cuerpo, proporcionan al conjunto de los polinomios una estructura de espacio vectorial.

La multiplicación se introduce como nueva ley de composición sobre el conjunto de los polinomios, asociativa y distributiva con relación a la adición. De este modo el conjunto de polinomios adquiere estructura de anillo conmutativo con elemento neutro para la multiplicación y sin divisores de cero; es decir, es un dominio de integridad.

Estudia, asimismo, la división de polinomios ordenados y mediante la consideración de pares de polinomios y la introducción de una relación de equivalencia establece el concepto de fracción algebraica.

La segunda conferencia comienza con el concepto de sucesiones de números racionales convergentes hacia un número racional, el cual permite establecer las primeras propiedades de límites de sucesiones y el cálculo con límites, quedando de este modo definida una topología sobre el cuerpo Q de los números racionales.

En la tercera conferencia, y mediante la introducción de las condiciones de Cauchy, establece las sucesiones racionales que les satisfacen, sean o no convergentes en Q , y se denominan sucesiones de Cauchy. Mediante la introducción de la adición y de la multiplicación se proporcionan al conjunto de sucesiones de Cauchy, estructura de anillo conmutativo. Hace también, con vistas a la introducción de la estructura de cuerpo, un estudio especial de las sucesiones de números racionales convergentes hacia cero. Establece una relación de equivalencia que permite efectuar una partición del conjunto de dichas sucesiones en clases de equivalencia. Sobre este conjunto cociente se define una adición o una multiplicación que proporcionan al mismo la estructura del cuerpo, obteniéndose así el conjunto de números reales R .

Las nociones de orden y de valor absoluto se extienden fácilmente a R , lo cual permite establecer una topología, es decir, una noción de límite. El cuerpo de los números reales provisto de la noción de límite recibe el nombre de recta topológica o de recta numérica.

Termina la exposición de estas conferencias aludiendo a la cosecha de importantes propiedades que derivan de la teoría, estableciendo además el enlace con otros métodos clásicos de introducción del número real, como es la de las sucesiones monótonas continuas de números racionales.

Después de terminadas las conferencias, se abrió coloquio, dirigido por el señor Royo, sobre los siguientes temas, por él propuestos: ¿Es asequible la Matemática moderna, e interesa su estudio a los alumnos de Bachillerato? ¿Cómo formar al Profesorado para este menester? ¿Cómo exponérsela a los alumnos?

La discusión fue muy interesante, no solamente por las ideas que se expusieron, sino porque tomaron parte en ella casi todos los cursillistas, acordando elevar a la Comisión encargada del ensayo de la enseñanza de la Matemática moderna las siguientes sugerencias:

a) Necesidad de esta enseñanza, no solamente por exigirle el avance de la Matemática, sino porque, explicándose ya en el Curso Selectivo, es necesaria su iniciación en el Bachillerato. Debe comenzarse a partir de quinto curso, simultáneamente con la clásica, si bien sería de desear que desde el principio del Bachillerato empezara a usarse la nueva terminología y los nuevos símbolos.

b) Continuar en años sucesivos los cursillos, siendo de desear que para comentar los nuevos folletos en preparación para el sexto curso volvieran los mismos cursillistas.

c) Reeditar los actuales fascículos y repetirlos con mayor profusión.

d) Envío de libros de Matemática moderna: textos escolares y obras para el Profesorado.

e) Autorizar mayor número de cátedras para hacer el ensayo.

El Director del Cursillo hizo constar el máximo interés puesto por todos: Profesores y cursillistas. Los Profesores mostraron su profundo conocimiento de las cuestiones, expusieron con toda claridad que les pidieron e intervinieron con toda objetividad en las discusiones siguientes. En cuanto a los cursillistas, siguieron con toda atención las conferencias, tomaron parte todos en los coloquios y demostraron conocer el tema de antemano, lo que permitió un mayor avance.

A la última sesión asistió el Director del Centro de Orientación Didáctica, señor De la Fuente, quien intervino en la discusión y aclaró las cuestiones que para un mejoramiento de la didáctica se le propusieron.

SECCION SEGUNDA Comprendió conferencias y lecciones de carácter general, desarrolladas en sesiones de tarde. Fue Director de esta Sección en la primera semana el Inspector D. Francisco Bernardo Cancho; y en la segunda, el también Inspector D. Luciano Fernández Penedo.

Las sesiones dirigidas por el Inspector de Enseñanza Media D. FRANCISCO BERNARDO CANCHO, comprendieron del 16 al 22. En las mismas se trataron temas relacionados con la Metodología y Didáctica de la Matemática en el Bachillerato. Asimismo se dedicó una tarde a los Seminarios Didácticos en los Institutos de Enseñanza Media, alguna otra a consideraciones sobre problemas de análisis y temas de interés en este grado de enseñanza desde el punto de vista didáctico. Pareció conveniente la intervención de algunos cursillistas mediante la explicación de lecciones, que sirvieron de base para suscitar temas y cuestiones de interés didáctico. En estas lecciones intervinieron los cursillistas D. Antonio Rodríguez Socorro, con la lección de cuarto curso "La ecuación de segundo grado"; D.^a Aurora del Pozo Martínez, con la lección de segundo curso "Cuadriláteros"; y D. Felipe Saura, con la lección de quinto curso "El concepto de derivada". Previamente a estas lecciones el Sr. Bernardo Cancho explicó una lección sobre "Introducción de concepto de límite", para sexto curso, que, asimismo, sirvió de base para sugerir cuestiones de índole metodológica.

La segunda semana, del 23 al 30, a cargo del Inspector D. LUCIANO FERNÁNDEZ PENEDO, comenzó con el estudio de "La unidad didáctica". Se estudió haciendo un análisis de las probables causas que influyeron en el ánimo del legislador para implantar este sistema con carácter preceptivo para todos los Centros de Enseñanza Media, al mismo tiempo que las principales características de tal régimen docente.

Se expuso—a través de la amplia experiencia que proporciona la Inspección—la acogida diversa que tuvieron las unidades didácticas por parte del Profesorado, señalando los motivos y causas justificativas de las distintas actitudes, haciendo resaltar lo que tenían de común.

Se comentó comparativamente el desarrollo de la unidad didáctica en diversas disciplinas, para llegar a la conclusión de no poder supeditar a un mismo denominador de tiempo y distribución de actividades al conjunto heterogéneo de asignaturas que constituyen nuestro Bachillerato, cada una de las cuales tiene características y metodología propias.

Centrando el tema sobre la disciplina de Matemáticas, se analizó cada curso en función de la edad de los escolares y de las peculiaridades que presentan las diversas teorías que constituyen los programas actuales.

Con un criterio amplio, sin rígidas limitaciones de tiempo, siendo los propios alumnos quienes indirectamente señalan la norma a seguir en cada momento, la unidad didáctica es una clase activa, donde se realiza toda labor conducente a la formación matemática de los alumnos, sin deberes escolares para hacer en casa, sin repasos ni complementos de ningún género.

Otro de los temas tratados se refería a "Los errores sistemáticos que cometen los alumnos de Matemáticas y la falta de precisión en el lenguaje".

Estos errores, que en principio pueden ser clasificados en dos grandes grupos según su procedencia, fueron estudiados detenidamente. Los errores que proceden de una enseñanza anterior defectuosa son concretos y perfectamente reconocibles, y por tanto pueden corregirse mejorando esa enseñanza. Con ejemplos diversos se concretó el origen de tales errores, señalando el camino conducente a su desaparición.

El otro grupo de errores, que suelen hacer su aparición entre el segundo y el tercer curso del Bachillerato, debidos en gran parte a la natural desatención de los alumnos, significa una falta de madurez para que puedan desarrollar un pro-

grama superior a la capacidad media de alumnos tan jóvenes. Tales errores proceden de ciertas raíces que fueron comentadas ampliamente, recomendando la insistencia del Profesorado sobre la claridad de algunos conceptos, que además deben ser aludidos en todas las ocasiones posibles.

Las sesiones dedicadas a metodología de las demostraciones y de los problemas geométricos se desarrollaron tomando como punto de partida el pensamiento racionalista de los griegos para ir señalando la evolución de tal pensamiento hasta el concepto actual de la Matemática.

La clasificación de las demostraciones en constructivas e indirectas permitieron hacer una crítica del principio de inducción completa y de la reducción al absurdo, así como el valor del principio general de reciprocidad. Se estudió la reacción de los alumnos ante diversos tipos de demostración, al tener en cuenta su edad mental, especialmente tomando algunas aplicaciones geométricas del teorema de Bolzano para fundamentar demostraciones de existencia no constructivas.

Con una alusión a los problemas clásicos, se fijó la restricción de utilizar solamente la regla y compás en construcciones geométricas, estudiando el papel que desempeña cada uno de estos instrumentos, basándose en los conceptos de "cuerpo" y "cuerpo ampliado". Se estableció el carácter trascendente del problema de la cuadratura del círculo y el carácter algebraico de duplicar el cubo o trisecar el ángulo.

Se habló del papel educativo que las construcciones geométricas juegan en el Bachillerato, presentadas como problemas de "feliz idea", y de la sistematización de los diversos métodos de resolución de tales problemas.

Todas estas sesiones fueron seguidas de amplios y animados coloquios, interviniendo los cursillistas para exponer distintos puntos de vista basados en sus experiencias profesionales.

Observaciones y notas a un Cursillo

Por ANTONIO RODRIGUEZ SOCORRO

EN mayo de 1963 convocó el Centro de Orientación Didáctica de la Dirección General de Enseñanza Media un Cursillo de Matemáticas para Profesores adjuntos, en Santander. Hizo gran impacto en el Profesorado y las peticiones fueron numerosas, siendo seleccionados los arriba transcritos. El Cursillo no podía ser más interesante.

Se desarrolló a diario en cuatro sesiones, dos por la mañana y otras dos por la tarde. En los intervalos entre clases y comidas había tiempo suficiente para estudio, paseo y baños en las estupendas playas santanderinas, aparte de tener tiempo para asistir a espectáculos grandiosos, como el XII Festival Internacional de Santander. En los días festivos, en grupos recorriamos toda la bahía de la provincia; por un lado, Isla, Noja, Santoña y Laredo, y por el otro, Suances, Santillana del Mar (monumento nacional, con su célebre Colegiata y su incomparable Claustro románico); visita inolvidable a las Cuevas de Altamira, con su gran sala de pinturas, llamada por J. Dechelette "la Capilla Sixtina del arte cuaternario", y que ha servido en más de una ocasión a grandes geómetras para la introducción del espacio y el dibujo geométrico en la Matemática (*). Hacia el centro, recorrimos

(*) Véase el libro citado al final en la bibliografía con el número 12, donde se dice: «hemos querido exponer todo esto, que tan dejado parece de las Matemáticas, para haceros comprender que ciertamente no ha sido el dibujo geométrico el que ha señalado los inicios del arte pictórico. Antes nació el dibujo espontáneo, el que reproduce lo que se ve, lo que se siente, la vida cotidiana».

el cauce del Deva, por estrechos acantilados, llegando a los valles de Liébana, ante los Picos de Europa. ¡Qué maravilla geométrica! Allí reverenciamos la reliquia de Santo Toribio de Astorga, el mayor fragmento de la Santa Cruz del Señor que existe hoy. Visitamos Potes y disfrutamos, en plena camaradería, de tanta belleza natural.

Puede estar orgulloso el Centro de Orientación Didáctica, porque no sólo hemos aprendido Álgebra moderna, sino a entendernos entre sí todo el cuerpo de Profesores de Enseñanza Media.

Para ordenar ideas a otros compañeros, lectores habituales de la Revista ENSEÑANZA MEDIA, queremos dar—a modo de guión—un resumen de nuestras notas, sin precisar muchas veces los Profesores que desarrollaron las distintas cuestiones de la Matemática actual, porque unas y otras se entrelazaron entre sí. De esta suerte las presentamos, dentro de lo posible, dentro del grupo más homogéneo.

El Director del Cursillo, Catedrático D. José Royo, dio la primera alocución, acerca de la historia del Álgebra moderna: establece los entes matemáticos, axiomatiza, habla de la fecundidad en tiempos de los faraones, preponderancia griega, cultura india y la invasión de los árabes, llevando por el Mediterráneo la existencia de las cifras actuales; analiza el Renacimiento en Italia, con la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado; Vieta, Descartes, que simbolizan el cálculo literal; simultáneamente, Raimundo Lulio lo da a conocer; Steiner, en 1910, crea la Matemática moderna con una gran Memoria, llegando al grupo Buorbaki, que, por los avances de la técnica, establecen las estructuras y por abstracción los modelos, que no dejan de ser más que estructuras satisfechas con isomorfismos.

Elementos de la teoría de conjuntos.—La base fundamental de la Matemática moderna es el estudio de los conjuntos; como lo es de la Estadística.

Se estudiaron las propiedades y las relaciones de equivalencia. Se caracterizaron los subconjuntos y las relaciones de inclusión. Se desarrollaron las operaciones con conjuntos, unión e intersección, recalando sus aplicaciones aritméticas del m. c. d. y m. c. m. y su aplicación al cálculo de probabilidades. Se estudió su introducción en el primer curso de Bachillerato.

Correspondencia entre conjuntos.—Se estudió el producto de conjuntos y la correspondencia entre dos conjuntos con acertados ejemplos. Se hizo una introducción a las aplicaciones, y con ello a las funciones uniformes. Se establecieron las aplicaciones inyectiva, exhaustiva y biyectiva y las inversas.

Relaciones binarias.—Se analizaron las tres propiedades: reflexiva, transitiva y antisimétrica, como relaciones de orden. Definido un conjunto con una operación se le nombra como estructura. Se analizan las leyes de las operaciones directas y se definen los elementos regulares, importante para la ley de simplificación de productos y para la formación de conjuntos estables, puesto que todo elemento simetrizable es regular.

Operaciones.—Propiedades generales de las leyes de composición: asociativa, conmutativa y existencia del elemento neutro.

El número natural.—Se analizaron diversas opiniones y el poco acuerdo entre ellas para fundamentar el número natural. Se dio la forma de poder enseñarla en primer curso de Bachillerato, acompañándolo de las propiedades de ordenación, ordenación total, elemento siguiente, primer elemento y que todo conjunto parcial tiene primer elemento. Haciendo ver las relaciones de equivalencia y la coordinación de conjuntos queda ya expedito para alumnos de los primeros cursos. Se hace una introducción a los sistemas de numeración y la forma natural en que aparecieron, con ejemplos concluyentes y fáciles de introducir en el primer curso. Se desarrolló con ejemplos el principio de inducción completa, recalando la relación de los elementos con los conjuntos.

Combinatoria.—Intentándolo como aplicación de las aplicaciones, llegándose a resultados sugestivos.

El número entero.—Se definen como claves de equivalencia, formando el conjunto Z . Los números enteros forman un ANILLO (respecto de la suma y respecto del producto tienen la propiedad asociativa, distributiva y forman grupo abeliano). Se define el dominio de integridad diciendo que es un anillo conmutativo con unidad y que no tenga divisores de cero. Se estudia la divisibilidad en anillos de números enteros y se generalizan. Se estudian los ideales y los dominios de factorización única y euclídeos.

El número racional.—Se analizan los conjuntos de fracciones como clases de equivalencia y se representan gráficamente en un plano de ejes cartesianos ortogonales como rectas que pasan por el origen.

Se llega al concepto de CUERPO, estableciendo las leyes que corresponden a la adición y a la multiplicación como operaciones internas, existencia de elemento opuesto y recíproco (simétrico).

Polinomios y fracciones algebraicas.—Parece más didáctico explicar primero polinomios y más tarde encontrar las estructuras, y como en cuarto curso se conoce el esquema de la regla de Ruffini, se puede considerar para aprovechar ese modo de proceder trabajando con polinomios. Se establece la estructura de espacio vectorial.

La recta vectorial.—Se establecen en las transformaciones geométricas relaciones de congruencia, dando lugar a relaciones de equivalencia. Se estudia el sentido de la recta y los vectores y sus operaciones. Se recalca la utilidad de este instrumento de cálculo.

1) **El plano vectorial.**—Se estudian la dirección y el sentido de las rectas en el plano y la equivalencia de vectores, la igualdad de vectores, la dependencia lineal de vectores, analizando las condiciones necesarias y suficientes; se analizan las dimensiones de un vector y el cambio de base.

2) **El plano afín.**—Se estudian: Coordenadas de un punto, ecuación vectorial de la recta; determinación de rectas e intersección de las mismas y la ecuación general de la recta.

Y se entra de lleno en la topología de la recta con el concepto de límite. Se establece la condición de Cauchy relativa a sucesiones:

$$|r_p - r_q| < \varepsilon \quad \text{con} \quad p \geq A \quad q \geq A$$

y se llega a la estructura de CUERPO de los números reales, que es completo.

Como complemento a los temas generales del Cursillo se realizaron coloquios dirigidos por los Inspectores de Enseñanza Media D. Francisco Bernardo Cancho y D. Luciano Fernández Penedo, con los temas siguientes:

Seminarios didácticos, con el objeto de preparar las clases y graduar la enseñanza de las Matemáticas.

La Metodología en los problemas de la Matemática, tendiendo a seleccionar, jerarquizar y ordenar, y más tarde abstraer, sedimentar y sugerir a los alumnos soluciones a dichos problemas.

Los modelos en Matemáticas.

Introducción al conjunto de límite.

Unidades didácticas: "la clase", dividida en tres tercios, explicación y discusión.

Principales errores de los alumnos de Matemáticas y forma de evitarlos. Se citan los más usuales en los seis cursos normales de Bachillerato.

Metodología de las demostraciones en Geometría: Síntesis histórica. Demostraciones directas (constructivas) e indirectas (de existencia). El método de inducción

completa aplicado en Geometría. El método de reducción al absurdo. Problemas geométricos resueltos, en general, trasladándolo a problema algebraico en un sistema de coordenadas. Estudio general de los tres famosos problemas de duplicación del cubo, trisección de un ángulo y cuadratura del círculo.

BIBLIOGRAFIA (empleada por el conjunto de cursillistas)

1. *Matemática moderna*, 15 capítulos. Preparados por el Centro de Orientación Didáctica y publicados por la Dirección General de Enseñanza Media.
2. *Programme moderne de Mathématiques pour l'enseignement secondaire*. Publicado por la O. E. C. E. París.
3. *L'enseignement des Mathématiques*. J. PIAGET, E. W. BETH, J. DIEUDONNÉ, A. LICHNEROWICZ, G. CHOQUET, C. GATTEGNO. Delachaux et Niestlé. Suiza, 1960.
4. *Algebra moderna*. G. BIRCHOFF y S. MACLANE. Edit. Teide. Barcelona.
5. *Leçons d'Algèbre moderne*. A. LENTIN et J. RIVAUD. Edit. Vuibert.
6. *Éléments d'Algèbre moderne*. A. LENTIN et J. RIVAUD. Edit. Vuibert.
7. *Matemática moderna*. Enseñanza elemental. LUCIENNE FELIX. Dirección General de Enseñanza Media. Madrid.
8. *Matemáticas generales: Algèbre, Analyse*. C. PISOR et M. ZAMANSKY. Editorial Dunod. París.
9. *¿Qué es la Matemática?* R. COURANT y H. ROBBINS. Edit. Aguilar, 1955.
10. Obras completas del maestro D. PEDRO PUIG ADAM.
11. *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*. F. ENRIQUES. Zanichelli.
12. *Geometria intuitiva*. EMMA CASTELNUOVO. Edit. Labor, S. A. Traducida por nuestro compañero R. Romero Mercadal.

CURSO PREUNIVERSITARIO 1963-64

Decreto de Ordenación del Preuniversitario y Programas para el Curso 1963-64, con orientaciones metodológicas y bibliográficas 22 ptas.

Temas de las Pruebas de Madurez propuestos en las convocatorias de junio y septiembre de 1963 30 ptas.

PUBLICACIONES DE LA REVISTA "ENSEÑANZA MEDIA"

Atocha, 81, 2.º

MADRID-12