Cursillo para Profesores Auxiliares

Lecciones de Matemáticas

OPERACIONES CON NUMEROS NATURALES (*)

Por PEDRO ABELLANAS
(Catedrático de la Universidad de Madrid)

1. INTRODUCCION

Finalidad que nos proponemos.—Estudiar el número natural, tanto en cuanto se relaciona con su enseñanza en el primer curso de Bachillerato.

Punto de partida.—Admitimos que el muchacho de primer curso de Bachillerato conoce bastante sobre el número natural y sabe operar con él.

Posición didáctica.—Se adopta en lo que sigue la posición de aprovechar todos los conocimientos previos del alumno y, a partir de ellos, avanzar un poco más hacia una formulación un tanto más precisa de conceptos y relaciones. No se trata, por tanto, de una exposición científica del concepto de número natural, pero tampoco de una lección didáctica sobre el mismo. Lo que vamos a estudiar en estas cuatro lecciones necesitaría de uno a dos meses para su exposición a los alumnos.

2. OFICIOS DEL NUMERO NATURAL

El número natural tiene dos oficios: unas veces actúa como número cardinal y otras como número ordinal. Creemos necesario comenzar el estudio del número natural en primer curso del Bachillerato para analizar estas dos misiones del número natural. Pero para ello se hace preciso introducir unas ligeras ideas sobre conjunto de cosas materiales.

3. CONJUNTO DE COSAS MATERIALES

Ejemplos:

1. Los alumnos de la clase forman el *conjunto de los alumnos de la clase*. Cada alumno es un *elemento del conjunto*.
2. Las mesas de la clase forman el *conjunto de las mesas de la clase*. Cada mesa es un elemento del conjunto.

(*) Lección expuesta en el Cursillo de Matemáticas celebrado en 1962 para Profesores Auxiliares de Centros no oficiales.

3. Las tizas que están sobre la mesa forman el *conjunto de las tizas que están sobre la mesa.* Cada tiza de la mesa es un elemento del conjunto.
4. Juan, Luis y Enrique forman *un conjunto de niños.*
5. Un bosque es un conjunto de árboles. Cada árbol es un elemento del conjunto.
6. Un regimiento es un conjunto de soldados. Cada soldado es un elemento del conjunto.
7. Los alumnos de esta clase que tienen diez años de edad es un conjunto de alumnos.
8. Las casas de esta calle forman un conjunto. Cada casa es un elemento del conjunto.
9. Las casas de esta calle, cuyo número termina en 1, forman un conjunto.
10. Los alumnos de esta clase que se han sabido hoy la lección de gramática forman un conjunto.
11. Pónganse en pie los alumnos de esta clase que tienen diez años. Los alumnos de esta clase que están de pie forman un conjunto.

Los conjuntos se pueden definir nombrando o mostrando cada uno de sus elementos, o bien dando una propiedad que sea verificada sólo por los elementos del conjunto. En el ejemplo 4 se define un conjunto nombrando a cada elemento. En el ejemplo 7, dando una propiedad. (A los alumnos habría que ponerles suficiente número de ejemplos para que enunciaran el modo de definición de cada uno de ellos.)

Los elementos de un conjunto se dice que *pertenecen* al conjunto.

Un conjunto A se dice que es parte, o está contenido, o es subconjunto de otro conjunto C cuando todo elemento de A pertenece a C.

El conjunto del ejemplo 7 es parte del conjunto del ejemplo 1. El conjunto del ejemplo 9 es parte del conjunto del ejemplo 8. El conjunto del ejemplo 11 es parte del conjunto del ejemplo 7. El conjunto del ejemplo 6 es parte del conjunto del ejemplo 6.

Propiedades de la relación: ser parte.

1. Todo conjunto es parte de sí mismo.
2. Si el conjunto A es parte del conjunto B y si B es parte de C, se verifica que A es parte de C.

(Ejercitar al alumno en estas dos propiedades.)

Dos conjuntos son iguales cuando constan de los mismos elementos.

El conjunto del ejemplo 5 es igual al conjunto del ejemplo 5. El conjunto del ejemplo 11 es igual al conjunto del ejemplo 7. Etc.
Si el conjunto A es igual al conjunto B se verifica que A es parte de B y que B es parte de A. Si A es parte de B y B parte de A el conjunto A es igual a B. Por consiguiente:

Decir que $A = B$ equivale a decir que A es parte de B y que B es parte de A.

(Múltiples ejercicios para que el alumno demuestre la igualdad o desigualdad de dos conjuntos definidos por propiedades distintas.)

Propiedades de la igualdad de conjuntos.

1. Todo conjunto es igual a sí mismo.
2. Si A es igual a B, es B igual a A.
3. Si A es igual a B y B es igual a C, es A igual a C.

4. EL NUMERO CARDINAL

Cuando el número natural se emplea para contar los elementos de un conjunto desempeña el oficio de número cardinal.

Análisis de la operación de contar.—Queremos contar el conjunto formado por los coches que pasan por delante de nuestra ventana en diez segundos. Pasa un coche y levantamos un dedo de la mano; pasa otro coche y levantamos otro dedo, etc. Al cabo de diez segundos tenemos tantos dedos levantados cuantos coches han pasado. El conjunto formado por nuestros dedos levantados sirve para contar el número de elementos del conjunto formado por los coches que han pasado por delante de nuestra ventana en diez segundos. Análogamente, para contar el número de naranjas de un frutero podemos proceder así: se toma una naranja y se levanta un dedo de la mano; se toma otra y se levanta otro dedo, etc. El número de dedos levantados al final sirve para contar las naranjas del frutero. De estos y cualquier otro ejemplo se deduce que la operación de contar consiste en formar pares con elementos de dos conjuntos: el conjunto que se quiere contar y el conjunto que se toma como patrón para contar. En los ejemplos anteriores el conjunto patrón está formado por los dedos de las manos. Estos pares se forman teniendo en cuenta las dos condiciones siguientes: *a)* Cada elemento del conjunto que se desea contar figura una vez, y sólo una, en los pares que se forman. *b)* En los pares que se han formado no figura dos veces ningún elemento del conjunto patrón.

Para contar conjuntos con muchos elementos se hace necesario disponer de un conjunto patrón con tantos elementos como se deseen, de aquí la necesidad y utilidad del conjunto de los números naturales. Este conjunto sirve para contar los elementos de cualquier otro conjunto.

El conjunto de los números naturales tienen una propiedad importante que permite simplificar la operación de contar. Esta propiedad es la de ser un conjunto, cuyos elementos están dados en un cierto orden:

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, \qquad [1]$$

esto permite representar cualquier subconjunto formado por todos los números naturales que preceden a uno de ellos por este número. Así, el número 5 puede servir para representar al conjunto formado por los números 1, 2, 3, 4, 5. Aprovechando esta representación, puede asignarse a cada conjunto de cosas un número único, que se llama su número cardinal. Para ello se procede del siguiente modo: se forma un par con cada elemento del conjunto que se desee contar y un número natural, de modo que:

a) Cada elemento del conjunto que se va a contar figure una vez en un par, y sólo una.

b) No figura repetido ningún número natural.

c) Si figura en un par un número natural figuran en otros pares todos los números naturales que le preceden. El número así obtenido para representar al conjunto de los números naturales que figuran en los pares no depende del criterio seguido en la formación de los pares, siempre que se cumplan las condiciones anteriores, y se llama *número cardinal del conjunto.*

5. EL NUMERO ORDINAL

El conjunto de los números naturales está dado en un cierto orden. Esto se expresa diciendo que dicho *conjunto está ordenado.* El número natural 3 se dice que es *menor que* el número 5, o que *precede* al número 5, porque está escrito en la sucesión [1] de los números naturales antes que el 5. Esto se expresa escribiendo:

$$3 < 5.$$

Por consiguiente, la ordenación del conjunto de los números naturales es consecuencia de poderse escribir estos números en la forma [1]. Vamos a analizar las propiedades que se deducen de poderse escribir los números naturales en la forma [1], que reciben el nombre de

Propiedades de la ordenación de números naturales.

1.° Dados dos números naturales distintos uno de ellos precede al otro.

2.° Propiedad transitiva. Si 5 precede a 7 y éste precede a 9, se verifica que 5 precede a 9.

3.° Si un número precede o es igual a otro y al mismo tiempo le sigue o es igual a él, ambos números son iguales.

4.° El número uno precede a todos los restantes.

5.° Dado un número natural arbitrario existe uno que le sigue inmediatamente, esto quiere decir que entre ellos no existe ningún otro número natural.

Como consecuencia de estas propiedades de la ordenación de los números naturales se pueden emplear estos números para ordenar conjuntos. La operación de ordenar un conjunto consiste en formar pares entre los elementos del conjunto y los números naturales, de modo que se cumplan las condiciones *a)*, *b)* y *c)* del número 4. El número que forma par con un elemento del conjunto se llama *número ordinal de dicho elemento en el conjunto* respecto de la ordenación dada. Aquí, la diferencia del caso del número cardinal de un conjunto, es esencial la forma de efectuar los apareamientos de los elementos del conjunto con los números naturales. A cada posible apareamiento le corresponde una ordenación del conjunto y a apareamientos distintos, ordenaciones distintas. Como consecuencia del apareamiento entre los elementos del conjunto y los números naturales obtenido, cumpliéndose las condiciones *a)*, *b)* y *c)* del número anterior, se pueden trasladar las propiedades 1.°-5.° de la ordenación de los números naturales a cualquier otro conjunto. Cuando tal se ha hecho, es decir, cuando se han formado los pares entre el conjunto dado y el conjunto de los números naturales de modo que se cumplan las condiciones *a)*, *b)* y *c)*, se dice que *se ha ordenado el conjunto dado.*

Las propiedades 1.°-5.° de los números naturales es preciso que las vaya obteniendo el alumno guiado por el profesor. Una vez conseguido esto, sería conveniente hacerle ver que las mismas propiedades son válidas en cualquier conjunto ordenado. Para ello hay que presentarle varios ejemplos:

a) Los alumnos de la clase puestos en fila.
b) Las páginas de un libro.
c) Los nombres de una guía telefónica.
d) Los días de la semana.
e) Los actos realizados por una persona en un día.
f) Los puntos de una recta.
g) Los puntos de una circunferencia.
h) Los pueblos situados sobre una determinada carretera.

Con estos ejemplos y otros se hará observar que se pueden definir ordenaciones que no cumplen todas las propiedades anteriores. Así sucede en los ejemplos *f)* y *g)*. Conviene acostumbrarlos a distinguir en diversos ejemplos si se verifican o no las propiedades de la ordenación de números naturales.

La relación entre los números cardinales y los ordinales viene dada por la siguiente propiedad, que conviene que verifique el alumno en algunas experiencias.

El número cardinal de un conjunto de cosas es igual al número ordinal de su último elemento.

6. SISTEMA DE NUMERACION DECIMAL

Para representar los números naturales se emplean unos signos en la representación gráfica y unas palabras en la representación oral. Ante la imposibilidad práctica de representar cada número por un signo o una palabra distinta se ha ideado crear un reducido número de signos y de palabras y unas reglas de composición mediante las cuales se puede representar cualquier número natural, por lo menos dentro de los límites exigidos por las necesidades del hombre. Al conjunto formado por los signos y sus reglas de composición se le llama *sistema de numeración gráfica,* y al conjunto formado por las palabras y su regla de composición, *sistema de numeración oral.*

Los signos empleados en la numeración escrita, llamados *cifras,* son los siguientes:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.$$

Los primeros números naturales son:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; \qquad [1]$$

el número natural siguiente al representado por la cifra 9 se representa por 10 y las siguientes a éste se representan por el par de cifras que se obtienen al ir sustituyendo la cifra 0 por cada una de las cifras [1] y en el mismo orden en que allí figuran:

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. [2]

El número siguiente al 19 se representa por 20 y se repite el mismo proceso anterior, y así se sigue hasta obtener el número representado por 99. A éste sigue el representado por 100. A éste siguen los números representados por las cifras que se obtienen al sustituir el par de cifras 00 por los pares 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, y a partir de aquí se sustituyen los números obtenidos a partir de [2].

Este proceso puede dar lugar a un análisis de tipo general por parte del alumno, que puede desarrollarse mediante varios ejemplos del siguiente tipo:

a)	Escribir	el	número	siguiente	al	número	378992
b)	"	"	"	"	"	"	378349
c)	"	"	"	"	"	"	378399
d)	"	"	"	"	"	"	378909
e)	"	"	"	"	"	"	378999
f)	"	"	"	"	"	"	379999
g)	"	"	"	"	"	"	399999
h)	"	"	"	"	"	"	999999

Conviene realizar ejercicios análogos haciendo escribir el número precedente a números de las siguientes formas:

235742, 235741, 235740, 235700, 235000, 230000, 200000, 100000.

Después de ellos convendría hacerles enunciar la regla general de formación gráfica de los números naturales.

En la nomenclatura oral se introducen las siguientes denominaciones: los números 10, 100, 1000, 10000, ..., se denominan diez, cien, mil, diez mil, ..., con lo que el número 378992 puede representarse oralmente así: 3 cien miles, 7 diez miles, 8 miles, 9 cientos, 9 dieces (o decenas), 2. Esto se abrevia diciendo: trescientos setenta y ocho mil novecientos noventa y dos.

Ejercicios.—Escribir gráficamente los siguientes números: treinta (o tres decenas); once decenas; veinte decenas; doscientos sesenta y cinco (o, equivalente: dos cientos, seis decenas, cinco); catorce cientos; treinta y dos cientos; cuarenta y tres millares.

Leer según la terminología usual los siguientes números: veinte decenas; treinta y cuatro cientos; ciento catorce cientos; etc.

Al número uno se le llama unidad simple; al número 10 unidad de primer orden, al 100 unidad de segundo orden; ...; al 1 seguio de diez ceros: unidad de décimo orden, etc.

Todo número se puede representar mediante un número de unidades de diversos órdenes y se puede conseguir que el número de unidades de cada uno de los órdenes sea inferior a 10.

7. ADICION.

Reunión de conjuntos.—Dados dos conjuntos A y B se llama *reunión*, y se representa por $A \cup B$, al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B.

Esta operación se aclarará mediante los correspondientes ejemplos:

a) El conjunto formado por todas las páginas de un libro es reunión del conjunto de las 50 primeras y del conjunto de las restantes.

b) El conjunto formado por todas las páginas de un libro es reunión del conjunto de las 50 primeras y del conjunto formado por las siguientes a las 20.ª

c) ¿Es el conjunto de todos los triángulos rectángulos reunión de los triángulos rectángulos con un ángulo inferior a 45° y de los triángulos rectángulos con un ángulo inferior a 30°? ¿Por qué?

d) ¿Es el conjunto reunión del conjunto formado por los alumnos de esta clase con puntuación superior a 4 con el conjunto de los alumnos con puntuación inferior a 6, igual al conjunto de alumnos de la clase? ¿Por qué? Análogamente, ¿es el conjunto de alumnos de esta clase igual a la reunión del conjunto de alumnos de puntuación inferior a 5 y del conjunto de alumnos de puntuación superior a 5?

Propiedades de la operación reunión:

EJERCICIOS.—¿Es el conjunto del ejercicio a) igual al conjunto reunión de la página que sigue a la página 50.ª y del conjunto formado por las 50 primeras páginas?

¿Es el conjunto reunión del conjunto formado por la reunión del conjunto de los alumnos de esa clase de calificación inferior a 4 con el conjunto de los alumnos de calificación comprendida entre 3 y 6 con el conjunto formado por los alumnos de calificación superior a 5 igual al conjunto reunión del conjunto de los alumnos de calificación inferior a 4 con el conjunto formado por la reunión del conjunto de alumnos de nota comprendida entre 3 y 6 y el conjunto de los alumnos de calificación superior a 5?

Mediante ejercicios del tipo anterior se pueden precisar las siguientes propiedades de la operación reunión:

Propiedad conmutativa: Si A y B son dos conjuntos:

$$A \cup B = B \cup A$$

Propiedad asociativa: Si A, B y C son tres conjuntos:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Dos conjuntos se llaman *disjuntos cuando* no poseen ningún elemento común.

Adición de números naturales.—Dados dos números naturales, por ejemplo 3 y 5, se determina un conjunto A, cuyo número cardinal sea 3 y otro B, cuyo número cardinal sea 5, disjunto con A. Al número cardinal correspondiente al conjunto $A \cup B$ se le llama *suma* de 3 y 5, y se representa por $3 + 5$.

Mediante ejemplos convenientes se comprobará la *uniformidad* de esta operación; esto es, que no depende de los conjuntos A y B, elegidos, siempre que se cumplan las condiciones de la definición anterior. Conviene observar el siguiente esquema de la definición de adición:

$$(3,\ 5) \longrightarrow (A,\ B) \longrightarrow A \cup B \longrightarrow 3 + 5.$$

Las propiedades conmutativa y asociativa de la reunión de conjuntos dan lugar, en virtud de la uniformidad, a las siguientes:

Propiedad conmutativa de la adición: $3 + 5 = 5 + 3$.

Propiedad asociativa de la adición: $(3 + 5) + 1 = 3 + (5 + 1)$.

En efecto: $5 + 3$ es el número cardinal de $B \cup A = A \cup B$; luego $5 + 3 = 3 + 5$. Análogamente, si C es un conjunto disjunto con el conjunto $A \cup B$ y de número cardinal uno, se verifica que C es también disjunto con B y que A es disjunto con $B \cup C$; luego $3 + (5 + 1)$ es el número cardinal de $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, que forma el número cardinal $(3 + 5) + 1$.

Con la definición anterior de adición se puede realizar la adición de dos números cualesquiera y se puede hacer que el alumno construya, apoyándose en la definición, la tabla de sumar. Conviene hacerle notar al alumno que si bien la definición anterior permite sumar dos números cualesquiera, el procedimiento es largo cuando se trata de dos números algo grandes, por lo que conviene buscar otro procedimiento más rápido. En el caso de sumandos de una sola cifra basta disponer de la tabla de sumar. Si se trata de números de varias cifras se puede reducir el problema al caso de una única cifra.

En efecto, supongamos que se trata de sumar el número 734 con el número 97. Sea A un conjunto formado por 734 dados y B otro conjunto, disjunto con el anterior, formado por 97 dados. A la expresión $734 = (7$ c., 3 d., 4 u.) se le puede hacer comprender una descomposición de A en 7 subconjuntos A′ de una centena cada uno, de 3 subconjuntos A″ de una decena y de otro conjunto A‴ formado por 4 dados, de modo que $A = 7\,A' \cup 3\,A'' \cup A'''$, en donde un número delante de un conjunto significa la reunión de tantos conjuntos del mismo número cardinal que el conjunto A′ y disjunto entre sí como indica dicho número. Análogamente al núm. $97 = (9$ d., 7 u.) se le puede hacer corresponder la siguiente descomposición de B:

$$B = 9\,B' \cup B'',$$

en donde cada B está formado por 10 dados y B″ por 7 dados. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (7A' \cup 3A'' \cup A''') \cup (9B' \cup B'') \\ &= 7\,A' \cup [(3A'' \cup A''') \cup (9B' \cup B'')] \\ &= 7\,A' \cup [(3A'' \cup 9B') \cup (A''' \cup B'')] \end{aligned}$$

Al conjunto 7 A′ le corresponde el número cardinal 7 c. Al conjunto $3\,A'' \cup 9\,B'$ le corresponde el número cardinal $(3+9)$ d y al conjunto $A''' \cup B''$ le corresponde el número cardinal $(4+7)$ a. Ahora bien, todas estas adiciones que aquí figuran son de sumandos de una sola cifra, que figura en la tabla de sumar; luego, conociendo dicha tabla se puede poner:

$$\begin{aligned} 734 + 97 &= \text{número cardinal } (A \cup B). \\ &= \text{número cardinal } (7\,A' \cup [(3A'' \cup 9B') \cup (A''' \cup B'')] \\ &= (7c,\ 12d,\ 11u) = (8c,\ 3d,\ 1u) = 831. \end{aligned}$$

De aquí puede obtener el niño la regla de sumar que conoce.

En virtud de la propiedad asociativa se puede convenir en escribir una suma de varios sumandos sin paréntesis:

$$5 + (3 + 6) = (5 + 3) + 6 = 5 + 3 + 6.$$

De la descomposición del conjunto A, cuyo número cardinal es 734 en 7 A′ 3 A″ A‴ y de la definición de adición y del convenio que acaban de efectuar se deduce:

$$734 = 700 + 30 + 4,$$

a una expresión tal como la anterior se le llama descomposición polinómica del número 734.

Ejercitando al alumno en descomposición polinómica.

La regla anterior de adición se puede escribir ahora del siguiente modo:

$$\begin{aligned} 734 + 97 &= (700 + 30 + 4) + (90 + 7) = 700 + (30 + 90) + (4 + 7). \\ &= 700 + 120 + 11 = 700 + (100 + 20) + (10 + 1). \\ &= (700 + 100) + (20 + 10) + 1 = 800 + 30 + 1 = 831. \end{aligned}$$

De aquí resulta inmediatamente la disposición práctica de la adición:

$$\begin{array}{r} 734 \\ +\ \ 97 \\ \hline 831 \end{array}$$

8. SUSTRACCION

Definición de sustracción.—Escribir:

$$3 + 4 = 7 \qquad [1]$$

es equivalente a escribir:

$$7 - 4 = 3 \qquad \text{o} \qquad 7 - 3 = 4. \qquad [2]$$

En la primera igualdad [2] al 7 se le llama minuendo, al 4 sustraendo y al 3 diferencia.

El alumno deberá ejercitarse en pasar de una igualdad del tipo de las [1] y [2] a las otras dos. Creemos indispensable no continuar la lección hasta que todos los alumnos se hayan familiarizado con la equivalencia de las relaciones [1] y [2]. A continuación se les podrá decir que la operación que consiste en hallar la diferencia cuando se conocen el minuendo y el sustraendo se llama *sustracción*. En este momento se les puede hacer que hallen varias diferencias y que justifiquen por qué el número hallado es la diferencia. Finalmente, se les puede hacer hallar la condición necesaria y suficiente para que la sustracción sea posible.

Una vez que no ofrezca ninguna dificultad el paso de una a las otras dos de las tres igualdades equivalentes:

$$a + b = c, \qquad c - a = b, \qquad c - b = a \qquad [3]$$

se podrá intentar que el alumno traduzca a palabras la definición de sustracción. No interesa que retenga de memoria la definición oral.

Como ejercicio se le puede hacer construir una tabla de restar y hacerle notar su diferencia con una tabla de sumar, como consecuencia de la no conmutatividad.

Un trabajo útil puede ser el hacerle obtener la regla usual de la sustracción de números de varias cifras. Esto se conseguirá con varios ejemplos del siguiente tipo:

1.° Calcular 147 — 24. Esto se puede escribir en la forma siguiente:

$$147 - 24 = (1c,\ 4d,\ 7u) - (2d,\ 4u) = (*\,c,\ *\,d,\ *\,u), \qquad [4]$$

en donde tenemos que averiguar cuántas centenas, cuántas decenas y cuántas unidades debe haber en el último miembro. En virtud de la definición [4] equivale a:

$$\begin{aligned}(1c,\ 4d,\ 7u) &= (2d,\ 4u) + (*\,c,\ *\,d,\ *\,u)\\ &= (*\,c,\ (2 + *)\,d,\ (4 + *)\,u),\end{aligned}$$

por consiguiente:

$$1c = *\,c, \qquad 4d = (2 + *)\,d, \qquad 7u = (4 + *)\,u,$$

y la tabla de restar nos proporciona inmediatamente que

$$*\,c = 1c, \qquad *\,d = 2d, \qquad *\,u = 3u,$$

luego:

$$147 - 24 = (1c,\ 2d,\ 3u) = 123.$$

2.° Calcular 147 — 53:

$$147 - 53 = (1c,\ 4d,\ 7u) - (5d,\ 3u) = (*\,c,\ *\,d,\ *\,u),$$

de donde, por la definición de sustracción:

$$(1c,\ 4d,\ 7u) = (5d,\ 3u) + (*\,c,\ *\,d,\ *\,u) = (*\,c,\ (5 + *)\,d,\ (3 + *)\,u).$$

Como la sustracción 4 — 5 no puede efectuarse, conviene escribir el primer miembro de la siguiente forma:

$$(1c,\ 4d,\ 7u) = (14d,\ 7u),$$

con lo que se reduce el problema al caso anterior.

9. PROPIEDADES DE SUMAS Y DIFERENCIAS

I. $(9 - 5) + 5 = 9.$

La igualdad anterior puede comprobarse directamente efectuando las operaciones del primer miembro. Convendrá repetir esta comprobación en varios ejemplos.

Conviene ahora hacer notar al alumno que puede probarse la igualdad I sin necesidad de efectuar las operaciones, sin más que recordar la definición de sustracción, ya que según ésta la igualdad I es equivalente a la

$$9 - 5 = 9 - 5,$$

que es evidente.

II. $(9 + 5) - 5 = 9.$

Para establecer esta igualdad se seguirá el mismo método que con la anterior.

III. $(9 + 5) - 3 = 9 + (5 - 3).$

En primer lugar, se comprobará la igualdad efectuando las operaciones en varios ejemplos. A continuación se hará recordar que la igualdad III es equivalente a la igualdad:

$$9 + 5 = [9 + (5 - 3)] + 3 = 9 + [(5 - 3) + 3] = 9 + 5,$$

que es evidente.

IV. $9 - (2 + 3) = (9 - 2) - 3.$

Después de comprobarla en varios ejemplos se hará ver que es equivalente a la siguiente:

$$\begin{aligned} 9 &= [(9 - 2) - 3] + (2 + 3) = (2 + 3) + [(9 - 2) - 3] \underset{\text{por III}}{=} \\ &\underset{\text{por III}}{=} [(2 + 3) + (9 - 2)] - 3. \\ &= [(9 - 2) + (2 + 3)] - 3 = [[(9 - 2) + 2] + 3] - 3 = \\ &= (9 + 3) - 3 = 9, \end{aligned}$$

que es evidente.

V. $(9 - 5) + (7 - 1) = (9 + 7) - (5 + 1).$

En efecto, por la igualdad IV:

$$\begin{aligned} (9 + 7) - (5 + 1) &= [(9 + 7) - 5] - 1 \underset{\text{por III}}{=} [(9 - 5) + 7] - 1 \underset{\text{por III}}{=} \\ &\underset{\text{por III}}{=} (9 - 5) + (7 - 1). \end{aligned}$$

VI. $8 - (7 - 3) = (8 + 3) - 7.$

En efecto, por la definición de sustracción, esta igualdad es equivalente a:

$$8 = [(8+3)-7]+(7-3) \underset{\text{por V}}{=} [(8+3)+7]-(7+3) = \\ = [8+(7+3)]-(7+3) = 8.$$

VII. $(8-2)-(7-3) = (8+3)-(2+7)$.

En efecto, en virtud de VI:

$$(8-2)-(7-3) = [(8-2)+3]-7 \underset{\text{por III}}{=} [(8+3)-2]-7 = \\ = (8+3)-(2+7).$$

No interesa que el profesor reproduzca las anteriores demostraciones, únicamente que guíe al alumno para que éste obtenga dichas demostraciones u otras equivalentes. Es necesario que el profesor prepare una colección de ejercicios convenientemente sistematizados para que el alumno se familiarice con el juego de paréntesis.

10. MULTIPLICACION

En muchas ocasiones se presentan sumas con todos sus sumandos iguales. Ejemplos: ¿Cuánto gana un obrero a la semana si su jornal es de 120 ptas.? ¿Cuántos kilómetros recorre un tren en 5 horas si cada hora recorre 70 km.? ¿Cuánto costarán 5 kg. de azúcar si el precio del kg. es de 22 ptas.?, etc. Una vez que el alumno se haya convencido de la gran frecuencia con que aparecen sumas con todos sus sumandos iguales se le puede hacer ver la conveniencia de emplear una notación abreviada para tales sumas y la utilidad de establecer el siguiente convenio:

$$4+4+4 = 4 \times 3 = 12. \qquad [1]$$

Al número 4 del segundo miembro, que es el sumando que se repite en la suma, se le llama multiplicando, y al número 3, que indica el número de veces que el sumando se repite, se le llama multiplicador, y a la suma, 12 en el ejemplo [1], se le llama producto.

Ejercicios para expresar sumas de sumandos iguales en fórma de producto y viceversa. Asegurada la comprensión de la primera igualdad [1] se puede hacer que el alumno exprese en lenguaje ordinario la definición de multiplicación.

OBSERVACIÓN.—Como la adición es siempre posible, también lo es la multiplicación.

Propiedades de la multiplicación.

1.° *Propiedades distributivas:*

a) $(5+7) \times 3 = 5 \times 3 + 3 \times 3$.
b) $7 \times (2+3) = (7 \times 2) + 7 \times 3$.

Demostración de *a)*:

$$
\begin{aligned}
(5+7)\times 3 &= (5+7)+(5+7)+(5+7)= \\
&= (5+5+5)+(7+7+7)=(5\times 3)+(7\times 3).
\end{aligned}
$$

Demostración de *b)*:

$$
\begin{aligned}
7\times(2+3) &= 7\times 5 = 7+7+7+7+7= \\
&= (7+7)+(7+7+7)=(7\times 2)+(7\times 3).
\end{aligned}
$$

Consecuencia de la propiedad distributiva.

En primer lugar, se hará construir al alumno una tabla de Pitágoras. Se le hará obtener ahora, como aplicación de la propiedad distributiva, la regla de multiplicación de números de varias cifras, que él conoce, mediante ejercicios del siguiente tipo:

$$
\begin{array}{ll}
 & 254\times 32 = (200+50+4)\times 32 = (200\times 32)+(50\times 32)+(4\times 32) \\
= & [200\times(32+2)]+[50\times(30+2)]+[4\times(30+2)] \\
= & (200\times 30)+(200\times 2)+(50\times 30)+(50\times 2)+(4\times 30)+(4\times 2) \\
= & [(200\times 2)+(50\times 2)+(4\times 2)]+[(200\times 30)+(50\times 30)+(4\times 30)] \\
= & \begin{array}{r} 4\times 2 \\ +\ 50\times 2 \\ +\ 200\times 2 \\ +\ 4\times 30 \\ +\ 50\times 30 \\ +\ 200\times 30 \end{array} \\
= & \begin{array}{r} (200\times 2)+(50\times 2)+4\times 2 \\ +\ (200\times 30)+(50\times 30)+4\times 30 \end{array} \\
= & \begin{array}{r} 400+100+8 \\ +\ 6000+1500+120 \end{array} \\
= & \begin{array}{r} 508 \\ +\ 7620 \\ \hline 8128 \end{array}
\end{array}
$$

2.° *Propiedad asociativa.*—Como el producto de dos números es siempre otro número, se podrá a su vez multiplicar éste por un tercer número. Para expresar que el producto $(3\times 4)\times 2$. Por consiguiente, se verifica la siguiente igualdad:

$$(3\times 4)\times 2 = 12\times 2. \qquad [2]$$

Análogamente se podrá multiplicar 3 por el número $4\times 2 = 8$; esto se escribe:

$$3\times(4\times 2) = 3\times 8. \qquad [3]$$

Se comprueba, efectuando las operaciones, que los segundos miembros de [2] y [3] son iguales, luego también lo son los primeros. Pero esto se puede obtener directamente, sin necesidad de efectuar las operaciones:

$$(3 \times 4) \times 2 = (3 \times 4) + (3 \times 4) = 3 \times (4 + 4) = 3 \times (4 \times 2). \qquad [4]$$

La igualdad formada por el primero y el último miembro de [4] se conoce con el nombre de *propiedad asociativa de la multiplicación.* En virtud de ella se establece el siguiente convenio:

$$3 \times 4 \times 2 = (3 \times 4) \times 2 = 3 \times (4 \times 2),$$

con lo que queda definido el producto de más de dos factores.

3.° *Propiedad conmutativa:*

$$5 \times 3 = 3 \times 5.$$

Demostración:

$$5 \times 3 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \times 3.$$

Consecuencia:

Propiedad distributiva respecto de la diferencia.

De $8 = (8 - 3) + 3$ se deduce:

$$8 \times 5 = [(8 - 3) + 3] \times 5 = [(8 - 3) \times 5] + (3 \times 5),$$

lo que es equivalente, por la definición de sustracción, a:

$$(8 - 3) \times 5 = (8 \times 5) - (3 \times 5).$$

Se hace necesario al llegar a este punto ejercitar al alumno en el manejo de estas propiedades mediante la correspondiente colección de ejercicios bien graduados.

11. DIVISION EXACTA

Convenimos en que las tres igualdades siguientes son equivalentes:

$$8 = 4 \times 2, \qquad 8 : 4 = 2, \qquad 8 : 2 = 4. \qquad [1]$$

Al número 8, en la segunda igualdad, se le llama dividendo; al 4, divisor, y al 2, cociente. Como en el caso de la sustracción, es necesario que el alumno se adiestre en escribir las tres igualdades [1] cuando se da una de ellas. De la definición [1] se deduce que si se verifica la primera igualdad se puede decir que 4 y 2 son divisores de 8. La operación que consiste en hallar el cociente cuando se dan el dividendo y el divisor se llama *división exacta*. Conviene ahora hacer notar al alumno que esta operación no es siempre posible.

La división exacta permite resolver, cuando ello es posible, el siguiente problema típico: "Dado un conjunto de cosas, descomponerlo en reunión de un número dado de subconjuntos disjuntos que tengan todos el mismo número de cosas." Este problema es equivalente a este otro: "¿Cuántas veces se puede restar de un número dado otro número hasta llegar a obtener una diferencia nula?" Conviene hacer ver al alumno la equivalencia de estos dos problemas con el de la división exacta.

Conviene que el alumno exprese verbalmente la definición de división exacta.

Propiedades de la división exacta.

Propiedad distributiva:

a) Respecto de la adición: De la definición se deduce que:

$$(8 : 2) \times 2 = 8 \quad \text{y} \quad (12 : 2) \times 2 = 12,$$

de donde,

$$(8 : 2) \times 2 + (12 : 2) \times 2 = 8 + 12,$$

y, por la propiedad distributiva de la multiplicación:

$$(8 : 2 + 12 : 2) \times 2 = 8 + 12,$$

lo que, en virtud de la definición de división, significa que:

$$(8 + 12) : 2 = 8 : 2 + 12 : 2.$$

b) Respecto de la sustracción. Restando las igualdades anteriores:

$$12 - 8 = (12 : 2) \times 2 - (8 : 2) \times 2 = (12 : 2 - 8 : 2) \times 2,$$

lo que es equivalente a:

$$(12 - 8) : 2 = 12 : 2 - 8 : 2.$$

Producto de dividendo o divisor por un número.—De $8 = 4 \times 2$ se deduce que

$$8 \times 3 = (4 \times 2) \times 3 = 4 \times (2 \times 3) = (4 \times 3) \times 2.$$

Después de poner varios ejercicios análogos se conducirá al alumno a que formule estas propiedades.

12. DIVISION ENTERA

La división exacta no puede realizarse siempre; lo mismo ocurre, por tanto, con los problemas equivalentes enunciados anteriormente. Ahora bien, estos problemas se pueden transformar en otros que tengan solución. Por ejemplo, el primero se puede transformar en el siguiente: "Dado un conjunto de cosas, descomponerlo en reunión de un número dado de subconjunto que tengan todos el mismo número de cosas y de otro subconjunto." Ejemplo:

El conjunto dado tiene 14 cosas y se quiere descomponer en tres subconjuntos con igual número de cosas más otro subconjunto. Son soluciones posibles las siguientes:

$$\begin{aligned} 14 &= 0 + 0 + 0 + 14, \\ 14 &= 1 + 1 + 1 + 11, \\ 14 &= 2 + 2 + 2 + 8, \\ 14 &= 3 + 3 + 3 + 5, \\ 14 &= 4 + 4 + 4 + 2. \end{aligned}$$

Para obtener una solución única basta modificar el enunciado del problema del siguiente modo: Descomponer 14 en 4 sumandos, tales que los 3 primeros y el tercero sea inferior a 3. En estas condiciones la única solución es la última, que puede escribirse así:

$$14 = 3 \times 4 + 2.$$

A toda descomposición de un número en estas condiciones se le llama división entera; al número que se descompone se le llama dividendo; al número de sumandos iguales, divisor; al sumando que se repite, cociente, y al sumando inferior al divisor se le llama resto.

Como resumen de varios ejercicios se llegará a enunciar la siguiente

DEFINICIÓN.—Dados dos números, llamados dividendo y divisor, se llama división entera a la operación que consiste en hallar otros dos, llamados cociente y resto, tales que se cumplan las dos condiciones siguientes:

$$\text{Dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente} + \text{resto},$$
$$\text{resto} < \text{divisor}.$$

Un buen ejercicio será deducir a partir de esta definición la regla práctica de la división entera de dos números.