PROBLEMAS DE MATEMATICAS PARA EL CURSO PREUNIVERSITARIO (1957-58)

De acuerdo con lo determinado por el artículo 7.° del Decreto de 13 de septiembre de 1957, se propone, a continuación, la segunda serie de enunciados de problemas de Matemáticas, con lo que se completan los 500 señalados en este Curso para el Preuniversitario.

251

Con cierto número de cubos iguales se forma un cubo grande y sobran 159 de aquéllos.

Entonces se intenta formar otro cubo mayor, con un cubo más por arista, y se ve que harían falta 238 cubos más que los que se tienen.

Calcular este número.

252

Un número a y su logaritmo b en base c, cumplen las siguientes condiciones: son números naturales, siendo a mayor que 20.300, múltiplo de 8 y de 27, y si se divide por 5, da de resto 1; además, $a + b = 20.740$, se pide: hallar a, b y c.

253

25.—Explíquese en qué consiste una demostración matemática por el método de inducción. Seguidamente, demuéstrense por dicho método las identidades:

a) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots\ldots + (2n - 1) = n^2.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2 = \dfrac{1}{6}(2n+1)(n+1)n.$

c) $1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots\ldots + 2^n = 2^{n+1}.$

d) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}.$

254

Hallar el año del presente siglo, tal que, dividido en grupos de dos cifras, el m.c.m. de ambos grupos es 1.102, y el resto obtenido al dividir ambos grupos es 1.

255

Un número compuesto de tres cifras es igual a 26 veces la suma de sus cifras; éstas están en progresión aritmética; y si al número dado se le suman 396, resulta el mismo número invertido. ¿Cuál es el número?

256

Un número de seis cifras tiene 1 para primera cifra de la izquierda; si se coloca esta cifra la última de la derecha, el número que se obtiene es precisamente tres veces el número primitivo. ¿Cuál es dicho número?

257

Un depósito se llena por dos grifos A y B, y se desagua por otro C. Abiertos A y B, tarda tres horas en llenarse el depósito. Abiertos los tres, tarda cuatro horas, y abiertos A y C, tarda cinco horas. Hallar cuánto tardan en llenarlo A o B solos; cuanto tarda en vaciarse una vez lleno y abierto sólo C. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse abiertos B y C?

258

Una empresa de construcción da un trabajo por partes iguales a dos equipos de 20 obreros cada uno. Al cabo de cuarenta horas, el capataz observa que el primer equipo ha terminado su labor, en tanto que el segundo solamente ha realizado los 3/4 del suyo. Para que el trabajo quede concluído en las próximas diez horas, ¿cuántos obreros del primer equipo deben pasar a ayudar a los del segundo?

259

En un hotel consumen el vino de un tonel del siguiente modo:

El domingo consumen la cuarta parte del tonel. El lunes, los 2/7 del resto. El martes, los 3/10 de lo que queda. El miércoles, 1/3 de lo que queda. Finalmente, el jueves terminan los 140 litros que sobraban. ¿Qué capacidad tenía el tonel?

260

Calcular la arista del menor cubo en el que se pueden acoplar, sin dejar espacios vacíos, un número entero de ortoedros iguales cuyas dimensiones, expresadas en centímetros, son $C_{4;2}$, P_4 y el módulo del complejo, $8 - 6i$. ¿Cuántos ortoedros pueden acoplarse? ¿Cuál es el volumen de uno de ellos? ¿Cuál el del cubo?

261

Hallar el divisor y el cociente de una división sabiendo que el dividendo es 258.728 y que los restos sucesivos al efectuarla son 379, 480 y 392.

262

Un padre y dos hijos tienen ocupaciones tales que el primero no puede estar en casa más que cada quince días, uno de los hijos, cada diez, y el otro, cada doce. Por Navidad están juntos los tres. Indíquese la primera fecha en que vuelvan a coincidir los tres en casa.

263

Hallar dos números sabiendo que su m.c.m $= 864$ y la suma de sus cuadrados $= 55.872$.

264

Hallar la menor fracción decimal exacta que, dividida por cada una de las fracciones ordinarias $\frac{56272}{263775}$ y $\frac{9764}{36615}$, da cocientes exactos.

265

En una industria los gastos de producción se clasifican así:

1.° Importe del material = 60 por 100.

2.° Mano de obra = 30 por 100.

3.° Administración e impuestos = 10 por 100.

Los tres conceptos se encarecen respectivamente en el 75 por 100, 60 por 100 y 250 por 100.

¿En qué tanto por ciento queda recargada aquella producción primera?

266

Una palanca de primer género, formada por una barra de densidad lineal de 2 Kg/m., sostiene un peso de 48 Kg., aplicado a un extremo de la misma, distante un metro del fulcro. Calcular la longitud de la barra sabiendo que queda equilibrada por su propio peso.

267

Un testamento dispone que se repartan las 600.000 pesetas de la herencia en partes proporcionales a las edades de los tres herederos, que son, el día del fallecimiento: la de Antonio, siete años y nueve meses; Bernardo, seis años y un mes, y Carlos, dos años y cinco meses. Pero hay una cláusula adicional que dispone, además, que Carlos reciba exactamente la mitad que Antonio, por lo que se decide esperar a que sus respectivas edades permitan cumplir esta condición, sin dejar de cumplir las anteriores, y se pide:

1.° ¿Cuánto tiempo tendrá que transcurrir después del fallecimiento para que las edades respectivas permitan cumplir íntegramente todas las disposiciones testamentarias?

2.° ¿Cuánto corresponderá entonces a cada uno?

268

Un objeto se vende por más dinero que lo que costó. Hallar la relación entre la cantidad en que se vendió y la cantidad en que se compró, sabiendo que la diferencia entre el tanto por ciento de ganancia sobre el precio de compra y el tanto por ciento de ganancia sobre el de venta es 50/3.

269

Después de los exámenes, un profesor advierte que han sido aprobados el 20 por 100 de los alumnos matriculados, y que esto es el 25 por 100 de los alumnos examinados, ya que 35 alumnos no se presentaron a examen.

1.° Dígase cuántos alumnos aprobaron.

2.° Dividir un círculo en tres sectores de áreas proporcionales al número de alumnos no presentados, aprobados y suspensos, respectivamente. Se hará un croquis aproximado y se calculará hasta el minuto la amplitud de cada sector.

270

Una epidemia ataca a los habitantes de un país del siguiente modo: a los de las ciudades, el 20 por 100, y a los del campo, el 30 por 100, con relación a sus poblaciones respectivas; por otro lado, el número de atacados en la ciudad es el 60 por 100 del total de los atacados.

Se desea averiguar:

1.° El tanto por ciento de no atacados en las ciudades, relativamente al total de no atacados.

2.° La proporción en que ha sido invadida por la enfermedad el total de la población del país.

271

Hallar el verdadero valor o límite de la fracción para aquellos valores de x que la hagan indeterminada.

$$\frac{4x^3-17x^2+9x+18}{x^3-2x^2-9x+18}$$

272

¿Para qué valores de m puede descomponerse la expresión

$$y^2+2xy+2x+my-3$$

en un producto de dos factores que sean polinomios enteros?

273

Hallar la raíz cuadrada del polinomio $25x^4-20x^3+94x^2-36x+81$, sabiendo que es un cuadrado perfecto.

274

El radio de una esfera es igual, en centímetros, al verdadero valor de la fracción $\dfrac{x^2+3x-10}{-x^2+5x-6}$ para $x=2$.

¿Cuál será la altura del cilindro equivalente a esa esfera, si la sección por el eje da en el cilindro un cuadrado?

275

Dos automóviles salen del mismo punto y con igual dirección. El primero, a las ocho y con velocidad 2/5 de la del segundo, que sale a las diez horas cincuenta minutos. Después del encuentro continúan durante dos horas y media, y en este instante el segundo había adelantado al primero 30 kilómetros.

Se pide hallar:

1.° A qué hora se encontrarán, y

2.° Qué distancia total recorre cada uno.

276

Un peatón sale de la ciudad A para dirigirse a la ciudad B, situada a una distancia de 13.200 m. de la anterior. Al mismo tiempo, un vehículo sale de B en dirección a A. A los cuarenta y cuatro minutos se encuentran, y el vehículo llega a A ciento cinco minutos antes de que el peatón llegue a B. Se pide la velocidad, en metros por minuto, del peatón y del vehículo.

277

Una obra de excavación debería terminarse a los veinticuatro días, empleando 18 obreros, que trabajarán ocho horas diarias.

Al cabo de seis días faltan al trabajo ocho obreros, y al cabo de otros seis días los restantes obreros trabajan nueve horas y media diarias.

Se pregunta:

1.° El número de días de retraso en la terminación de la obra.

2.° Costo de la obra (la mano de obra) pagándose a 9 pesetas la hora y a 15 pesetas las horas extraordinarias (las que exceden de ocho diarias).

278

Un esquiador desciende en 1,5 minutos con una velocidad de 45 km./h. desde un punto A a otro B por una pista cuya pendiente es 0,3, y desde B asciende por otra que forma un ángulo de 30° con el plano horizontal, durante cinco minutos a una velocidad de 5 km./h., llegando hasta un punto C. Calcular la diferencia de altura entre los puntos A y C.

279

Dos automovilistas parten al mismo tiempo; el primero del punto A y el segundo de B, dirigiéndose uno hacia el otro. En su punto de encuentro C calculan que el primero ha recorrido 15 km. más que el segundo, y que el primero tardará cincuenta minutos en alcanzar B y el segundo una hora 52,5 minutos en alcanzar A. Calcular:

1.° Al cabo de cuánto tiempo tuvo lugar el encuentro.

2.° La velocidad en km./h. de cada automóvil.

3.° La distancia A B.

280

De tres barras de oro de leyes 0,900, 0,850 y 0,750 se toman:

1.° x kg. de la primera, y kg. de la segunda y z kg. de la tercera, formando una nueva barra de ley 0,800.

2.° y kg. de la primera, z kg. de la segunda y x kg. de la tercera, obteniéndose una nueva de ley 77/90.

3.° z kg. de la primera, x kg. de la segunda e y kg. de la tercera, dando una barra de ley 0,8444...

Hallar el peso que se toma de cada barra y la ley de la barra que se obtendría al fundir dichas partes, siendo x, y, z números naturales menores que 9.

281

Dos móviles, A y B, parten de un mismo punto M y se dirigen a otro punto N, distante del M 150 km. El móvil B sale media hora después que el A. Por ser mayor la velocidad de B, éste alcanza a A en un punto P del trayecto; siguen los dos hacia N, a donde llega B y sin detenerse regresa hacia M, encontrando de nuevo a A a 15 km. de N.; continúa B su camino, llegando a M hora y media después de la llegada de A a N. Hallar las velocidades de los dos móviles, sabiendo que son uniformes los movimientos de ambos, y calcular la distancia M P.

282

Un móvil con movimiento uniforme, cuya velocidad es de 5 metros por segundo, recorre la trayectoria rectilínea definida por la ecuación $y - x - 2 = 0$; se pide hallar:

1.° Las coordenadas del punto M posición ocupada por el móvil al cabo de cuatro segundos, siendo la posición inicial el punto de abscisa $x = 0$.

2.° Al llegar a M cambia de trayectoria, siguiendo una nueva, ortogonal a la anterior y ascendente. Determinar la posición del móvil a los ocho segundos de la salida inicial.

3.° Qué tiempo habrá transcurrido cuando el móvil se encuentre en la vertical de la posición inicial.

283

Dos móviles salen al mismo tiempo de un punto de una circunferencia de radio 500 m. Uno lleva la dirección de la tangente en dicho punto con velocidad de 20 m. por minuto, y el otro sigue la circunferencia con velocidad de 30 m. por minuto. Siendo el sentido inicial de marcha el mismo para los dos móviles, se pide hallar la distancia que les separa cuando ha transcurrido media hora desde su salida.

284

Se asegura que un esclavo predijo al Emperador Aureliano una gran victoria en Siria contra una mujer. En efecto, el Emperador venció a Zenobia, Reina de Palmira, y destruyó la ciudad. Hallar en qué año se hizo tal predicción, sabiendo que al dividirlo por 45 da un resto igual al cuadrado del cociente. (El Emperador Aureliano vivió entre el año 212 y el 275.)

285

Un tren debe ir de A al punto B con una velocidad de 64 km./h. Durante tres horas marcha a esta velocidad, hasta que un accidente le obliga a detenerse durante cincuenta minutos, y después a tomar otra vía que aumenta el trayecto en 31 km. Por otra parte, la velocidad horaria después del accidente se ha aumentado en 6 km., y finalmente, el retardo ocasionado ha sido de una hora cinco minutos. Hallar la distancia A B.

286

Un automóvil sale de A para ir a B, siguiendo un camino que comprende parte llana, subidas y descensos. Al marchar en el sentido A B, la longitud de las subidas es los 4/5 de la longitud de las **bajadas**. El vehículo lleva una velocidad de 40 km./h. en terreno llano, 25 km./h. subiendo pendientes y 50 km./h. en los descensos. Sabiendo que al volver de B a A tarda seis minutos más que en la ida, calcular el tiempo que invierte el automóvil para ir de A a B. La distancia A B es igual a 85 km.

287

Para trasladarse a un lugar determinado, unos excursionistas toman varios autobuses, con departamentos de 1.ª, de 2.ª y de 3.ª. En 2.ª van 64 viajeros más que en 1.ª, y en 3.ª, 166 más que en 2.ª. El importe de todos los billetes vendidos asciende a 669,60 pesetas. Los de 1.ª importan 163,20 pesetas menos que los de 2.ª, y éstos, 40,80 pesetas menos que los de 3.ª. Cada billete de 1.ª clase cuesta tanto como uno de 2.ª y otro de 3.ª juntos. Calcular el número de pasajeros de cada clase, y para cada una de éstas, el precio del billete.

288

Se considera la ecuación de segundo grado en x

$$(E) \quad x^2 + px + q = 0.$$

1.º Buscar la condición necesaria y suficiente a la cual deben satisfacer p y q para que esta ecuación tenga dos raíces x' y x'', en que la diferencia tenga un valor dado d.

2.º La condición precedente supuesta realizada, ¿cuál es, en función de d, el más pequeño valor que puede tomar el trinomio $x^2 + px + q$ cuando se hace variar x?

3.º Se supone que se tiene $x' - x'' = 1$ y $p + q = -1$. Calcular p y q y resolver la ecuación (E) correspondiente.

4.º Dando a p y q los valores encontrados en el 3.º, estudiar las variaciones de la función $y = x^2 + px + q$ y construir la curva representativa.

289

1.º Resolver la ecuación: $Z^4 + 2Z^2 + 1 = 0$.

2.º Escribir la ecuación de segundo grado cuyas raíces sean: $1 + i$ y $1 - i$.

3.º Hallar gráficamente el producto y el cociente de $1 + i$ y $1 - i$.

4.º Análogamente, construir la suma y la diferencia de los mismos números complejos.

290

En el extremo A de una carretera se encuentran tres personas, que disponen de una motocicleta en la que sólo pueden ir dos. Desean trasladarse al otro extremo B. Salen dos en la "moto", mientras la tercera sale andando. Llegada la "moto" a un cierto punto del camino, deja a una de las personas, que continúa el viaje andando, y regresa hasta encontrar a la tercera, a la que recoge para llevarla hasta B. De esta forma llegan las tres a B en el mismo momento, y el tiempo empleado habrá sido mínimo. Encontrar este tiempo y el camino recorrido por la "moto". Datos: distancia A B $= e$. Velocidad de la "moto" $= V_1$. Velocidad andando $= V_2$.

291

Hallar dos números tales que su diferencia, su producto y su cociente sean iguales entre sí.

292

Hallar dos números impares consecutivos, siendo la diferencia de sus cuartas potencias igual a 1.776; resolver la ecuación que resulte, teniendo en cuenta que una de sus raíces es un número natural menor que 10. Las otras dos raíces de la ecuación son imaginarias; hallarlas poniéndolas en forma binómica.

293

Hallar m y n para que las dos ecuaciones

$$(9m - 14)\,x^2 - (m + 1)\,x + 5 = 0$$
$$(5n + 1)\,x^2 - 3\,(n + 1)\,x + 20 = 0$$

tengan las mismas raíces.

Una vez halladas m y n, escribir la ecuación de 2.° grado que tenga por raíces las inversas de las raíces de las dadas.

294

Resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$x - 2y - 3z = 40$$
$$\log x + \log y - \log z = 2$$
$$\log x - \log y = 1$$

295

Un peatón tarda en ir de una población A a otra B doce horas. Otro peatón, que tarda en recorrer 24 km. nueve minutos treinta y seis segundos menos que el primero, sale a la vez que éste de un lugar C, distante de B 3 km. más que el A, y llega a la vez que él a B. Hallar la distancia que hay de A a B y las velocidades de los dos peatones.

296

Se sabe que $\cos^4 x = A \cos 4x + B \cos 2x + C$.

Dando a x tres valores distintos, resultan tres ecuaciones en A, B y C. Calcular los valores de estas tres letras incógnitas.

CURSILLO SOBRE DIDACTICA DE LA FISICA

Organizado por el C. O. D. se celebrará en Madrid, durante los días 3 al 8 de marzo, ambos inclusive, en los laboratorios del Instituto de Física Aplicada «LEONARDO TORRES QUEVEDO» (Serrano, 144), un cursillo sobre Didáctica de la Física experimental en el Bachillerato, destinado a los Profesores no oficiales de Física y Química.

El cursillo estará dirigido por doña Vicenta Arnal Yarza, Catedrática de Física y Química y Directora del Instituto «Beatriz Galindo», y don Eduardo del Arco Alvarez, Catedrático de Física y Química e Inspector Extraordinario de E. Media, con la colaboración del personal técnico del Instituto «Leonardo Torres Quevedo».

Las prácticas que realizarán todos y cada uno de los cursillistas serán las siguientes:

MECANICA.—1. Comprobación de la ley de Hooke.—2. Experiencias sobre composición de fuerzas, utilizando dinamómetros.—3. Comprobación de la ley de la palanca, utilizando dinamómetros.—4. Comprobación mediante el volante de Maxwell y mediante el péndulo de la transformación de la energía potencial en cinética.—5. Determinación de coeficientes de rozamiento.—6. Ley del plano inclinado.—7. Determinación de «g».—8. Inscripción de un movimiento parabólico de caída.—9. Conservación del impulso mecánico.—10. Medida de velocidades con un cronómetro.

FLUIDOS.—1. Estudio de la presión ejercida por un líquido, mediante la cápsula manométrica y mediante tubos provistos de opérculo.—2. Comprobación del principio de Arquimedes y de su inverso.—3. Comprobación de la Ley de Boyle.—4. Determinación de densidades de líquidos por el método de Hirn.

CALOR.—1. Comparar los calores específicos del aluminio y del plomo por la cantidad de hielo fundido.—2. Trazado de la curva de solidificación de la naftalina.—3. Determinación aproximada del equivalente calorífico del trabajo.—4. Comprobación de que el agua tiene su máxima densidad a 4° C.—5. Dilatación aparente de líquidos.—6. Dilatación de varillas metálicas.—7. Determinación del coeficiente de dilatación del aire.—8. Determinación de la humedad relativa del ambiente.—9. Determinación del equivalente en agua de un termo.—10. Determinación calorimétrica de la temperatura de una llama.—11. Determinación del calor latente de condensación del agua.—12. Determinación del calor de fusión del hielo.

ACUSTICA.—1. Experiencias sobre resonancia utilizando diapasones idénticos.—2. Experiencias sobre producción de pulsaciones.—3. Determinación de la longitud de onda de un sonido utilizando una probeta.—4. Experimento de Melde sobre producción de ondas estacionarias en la vibración de cuerdas.

OPTICA.—1. Sobre la reflexión en espejos planos y esféricos.—2. Sobre las leyes de la refracción.—3. Sobre la reflexión total y el ángulo límite.—4. Sobre el ángulo de mínima desviación en un prisma.—5. Sobre el paso de la luz a través de lentes.—6. Descomposición de la luz blanca y recomposición de ésta a partir de su espectro.—7. Observación de fenómenos de difracción y de interferencias luminosas.—8. Polarización de la luz mediante láminas de polaroide.

ELECTRICIDAD.—Ley de Ohm: caída de potencial, influencia de la sección y longitud de un conductor en su resistencia; resistividad. Potenciómetro. Efecto de Joule. Amperímetro térmico. Asociación de resistencias. Resistencia de contacto.

Experimento de Oersted. Acciones entre imanes y corrientes. Inducción electromagnética. Ley de Lenz. Anillo de Thompson. Transformador. Horno de inducción. Carrete de Rumkoff. Influencia del núcleo en el transformador. Péndulo de Waltenhofen.

Autoinducción: extracorrientes. Timbre; relais. Amperímetro de imán móvil. Galvanómetro de cuadro móvil.

Alternador. Magneto. Conmutador de delgas. Alternador con excitación independiente. Alternador con inducido fijo. Dínamo de excitación independiente. Dínamo excitación en serie. Motor de corriente continua. Motor en serie; ídem en derivación. Motor de corriente alterna con colector.

Descarga disruptiva. Pararrayos de cuernos. Arco eléctrico.

Prácticas sobre corrientes alternas. Determinación de la frecuencia de una corriente alterna.

Se darán también varias lecciones sobre el automóvil, en el Salón del Automóvil del «Instituto «Ramiro de Maeztu».

El C. O. D. otorgará a los cursillistas un certificado de asistencia.

La matrícula se limita a 25 cursillistas. La solicitud de inscripción debe dirigirse al señor Director del C. O. D. (Avenida de América, 2, planta 16) antes del día 1 de marzo.

La tasa de inscripción será de 500 pesetas.

El cursillo comenzará el día 3, a las diez de la mañana, en el Instituto «Torres Quevedo» (Serrano, 144).

297

Las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1$$

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=5$$

$$\frac{x}{10}-\frac{y}{8}+\frac{z}{6}=1$$

son, en metros, las longitudes de los tres lados de un triángulo. Hallar:

1.° La naturaleza del triángulo.
2.° Su área.
3.° El radio del círculo circunscrito.

298

Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, calcular el valor de la expresión $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

299

Calcular la derivada de la función $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ para $x=m$, siendo m el valor que hay que dar en la ecuación $2x^2+(m-1)\,x-(2m+3)=0$ para que sus raíces x_1 y x_2 verifiquen la relación $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{2}{5}$.

300

Sean α y β las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Calcular en función racional de a, b y c las siguientes expresiones:

a) $\alpha^2+\beta^2$.

b) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$.

c) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$.

301

Dada la ecuación $x^2-\dfrac{5m+1}{2}x+2m^2-6=0$, se pide:

1.° Calcular el valor de m, con la condición de que una de las raíces más el triplo de la otra sea igual a -24.

2.° Los valores de m para los cuales dicha ecuación tenga raíces imaginarias.

3.° Los valores de m para los cuales la ecuación tenga sus dos raíces iguales y de signo contrario.

302

Resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 + b - a^3 + b^2 + a^4 + b^3 - a^5 + b^4 + a^6 + b^5 - \ldots\ldots = 0{,}75. \\ \dfrac{b}{1-b} = 7/12. \end{array}\right.$$

303

Se sabe que para un cierto valor de a una raíz de la ecuación $a x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$ es i^{-66}. Hallar dicho valor de a y las otras dos raíces de la ecuación.

304

Las ecuaciones $x^2 - 5ax + 6 = 0$; $x^2 + ax - 12 = 0$; para un determinado valor de a tienen una raíz común. Hallar, previo cálculo de dicho valor de a, dicha solución común.

305

Un reloj se adelanta cuatro minutos en doce horas, y otro se retrasa cuatro minutos en veinticuatro horas; se les regula el lunes a mediodía. Determinar la hora indicada por cada uno cuando el uno lleve sobre el otro una ventaja de 16 m. 30 s. ¿Qué día ocurrió ello? (Al decir "se les regula" quiere decirse que el lunes al mediodía se les pone en hora.)

306

1.° Obtener una fórmula general que permita averiguar cómodamente cuándo el horario y el minutero de un reloj forman ángulo recto.

2.° Comprobar la fórmula para las *nueve* horas y para las *tres* horas.

307

Dos personas van a cazar. Cada uno mató de cada disparo tantos pájaros como disparos hizo en la jornada.

El primero hizo dos disparos más que el segundo.

El segundo mató 24 pájaros menos que el primero.

¿Cuántos pájaros mató cada cazador?

308

Dos poblaciones A y B distan 90 km. De A parten al mismo tiempo para B un peatón y un auto con un viajero. En un punto intermedio C se apea el viajero y continúa andando a pie. El auto retrocede para recoger al peatón, y llegan al mismo tiempo a B el auto y el viajero que se apeó. Velocidad media del auto, 60 km./h. Velocidad media de los caminantes, 5 km./h. Hallar el tiempo que duró el viaje y el tiempo que anduvo cada caminante. Efectuar también una interpretación gráfica del problema.

309

Determinar los volúmenes de dos líquidos a mezclar cuyas densidades respectivas son de 1,026 y 0,856, sabiendo que si se mezclan resulta un volumen de 12 litros, con una densidad de conjunto de 0,954. Existe en la mezcla una contracción de volumen de 10 por 100.

310

Discutir el sistema

$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{aligned}$$

según los diferentes valores de a y b.

311

El capital de una Compañía está constituído por 20.000 obligaciones de 100 pesetas nominales, que dan un interés nominal del 4 por 100, y se cotizan al cambio de 90, y 10.000 acciones de 500 pesetas. ¿Cuáles han sido los beneficios de la Sociedad en un ejercicio económico, si las acciones obtienen un dividendo que supone un interés nominal igual a los $\frac{12}{5}$ del interés efectivo obtenido por los obligacionistas?

312

Sobre uno de los lados de un ángulo $\widehat{LOM}$, de 30° se toma un punto L a una distancia de 20 m. del vértice. El punto L se proyecta sobre el lado OM en un punto L_1; L_1 se proyecta sobre OL en L_2 y así se continúa indefinidamente, obteniéndose una línea quebrada de infinitos lados. Se pide: 1.º Calcular la suma de los ocho primeros lados de la quebrada; 2.º El límite de la suma de los n primeros lados, cuando n tiende a infinito; 3.º Cuál es el primer lado de la quebrada cuya longitud sea inferior a 6 m.

313

Estudiar las variaciones de la función $y = \frac{x^2}{4} + 2x$ y trazar la curva (C) representando estas variaciones.

Demostrar que la recta (r) de ecuación $y = \frac{3x}{4}$ encuentra a la curva (C) en el origen de las coordenadas y en un punto A, del que se calculará las coordenadas.

Determinar la pendiente, después las ecuaciones de las tangentes a la curva (C) en los puntos O y A.

Calcular las coordenadas del punto B donde se cortan las tangentes en O y A a la curva (C). Demostrar que la Mediana BM del triángulo ABO es paralela al eje $y'y$.

314

Calcular el logaritmo de

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+3}{5n^2-4} \qquad \binom{6}{3}$$

sabiendo que log. 2 = 0,301030.

315

Deducir la fórmula que nos permita calcular el logaritmo en base a de un número cualquiera cuando se dispone de una tabla de logaritmos en base b.

Aplicación: Utilizando una tabla de logaritmos decimales calcular el logaritmo en base 20 del número 300.

316

Hallar el logaritmo decimal del verdadero valor de

$$\frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2-2x-3}$$

para $x = 3$ sabiendo que log. 2 = 0,301030.

317

Resolver el sistema

$\frac{1}{2} \log (x - y) = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 \ldots$

$\frac{1}{3} (\log x - \log y) = 1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 \ldots$

318

Uniendo los centros de las caras de un tetraedro regular se tiene otro también regular. Si se hace lo mismo en éste y se continúa indefinidamente la operación, hallar la suma de los volúmenes así obtenidos, siendo 1 m. la arista del 1.º

319

Si la suma de n medios aritméticos entre 1 y 19 es a la suma de los $(n-2)$ primeros términos, como *5* es a *3*, hallar el número de términos de la progresión.

320

Sabiendo que los tres primeros términos de una progresión geométrica son:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \quad \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$$

1.º Hallar la razón.
2.º Hallar la suma de los cuatro primeros términos.

321

Dos progresiones geométricas tienen como primer término a. El tercer término de la primera y el quinto de la segunda son iguales a b.

Demostrar que el término a_{n+1} de la primera es igual al a'_{2n+1} de la segunda.

322

1.º Hallar los logaritmos de $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n^m}$ en el sistema de base n.

2.º Hallar sin tablas el logaritmo de 256 en el sistema de base 4.

3.º Sin tablas, hallar la característica del logaritmo de 714 en el sistema de base 5.

323

Un comerciante gana en un primer año 1/6 de su capital; en el segundo, 1/6 del capital que tiene al finalizar el primer año; en el tercer año gana 1/5 del capital que tiene al finalizar el segundo. En estas condiciones reúne un capital de 90.000 pesetas. Calcular el capital inicial.

324

Una persona tiene 150.000 pesetas de capital, que coloca al 5 por 100 a interés simple. Cada año exige que le sean entregadas, además de los intereses, 1.000 pesetas. Al cabo de veinte años, ¿cuánto habrá cobrado de intereses?

325

Escribir una progresión aritmética creciente, sabiendo:
1.º Que la suma de sus términos es 627.
2.º El último término es el producto del primero por 10.
3.º Los términos segundo, quinto y undécimo son tres términos consecutivos de una progresión aritmética.

326

La suma de cinco números en progresión por diferencia es 45; la de sus inversos es $\frac{136}{180}$. Escribirla.

327

El producto de los términos extremos de una progresión geométrica de seis términos es la base del sistema de logaritmos en el cual el de tres es $-\frac{1}{3}$, y la suma del tercero y cuarto es el límite de $\frac{(2x^2+1)\,(2x^2-1)}{(3x^2+1)^2}$ cuando x tiende a infinito. Escribir la progresión.

328

El capital de una Compañía está constituído por 10.000 acciones de 100 pesetas nominales, que producen un 5 por 100 de interés, y 15.000 acciones de 500 pesetas nominales. Los beneficios repartidos en un año han sido 800.000 pesetas. Si las obligaciones se cotizan al cambio de 80 y las acciones al de 150. ¿qué es más ventajoso poseer, acciones u obligaciones?

329

Los términos extremos de una progresión aritmética son las raíces de la ecuación $2x^2+5x-7=0$, y el número de términos, la raíz admisible de la ecuación $V_{x,2}-C_{x,2}=45$. Calcular la suma de la progresión.

330

Para obtener un préstamo bancario se ha depositado un cierto número de títulos de 500 pesetas nominales, que se cotizan al cambio de 120. Por haber descendido la cotización a 105 ha habido necesidad de depositar 10 títulos más. ¿Cuántos se depositaron primitivamente?

331

Una esfera rueda sobre un plano de 54 metros de longitud y recorre en el primer segundo 1,5 metros; en el segundo, 4,5; en el tercero, 7,5, etc. ¿Cuánto tiempo rueda dicha esfera? ¿Cuántos metros recorre en el último segundo?

332

Desarrollar y ordenar, según las potencias decrecientes de x, los polinomios $(x-1)^2$, $x(x-1)^2$.

Determinar a y b de forma que el polinomio $(x-1)^2\,(ax+b)$, desarrollado y ordenado siguiendo las potencias decrecientes de x, se escriba: x^3-3x+2.

Estudiar las variaciones de las dos funciones de la variable x:

$$y_1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

y construir las curvas representativas (C_1) y (C_2) de estas dos funciones. Demostrar que el punto A, de abscisa 1 y de ordenada 1, es común a estas dos curvas. Calcular el coeficiente angular de la tangente en A a la curva (C_1) y el coeficiente angular de la tangente en A a la curva (C_2).

Dibujar las dos curvas referidas a los mismos ejes de las coordenadas.

Demostrar que las curvas (C_1) y (C_2) tienen un punto común B y uno solo, distinto de A, calculando las coordenadas del punto B.

333

Hallar la suma de n sumandos: $1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots\ldots + \overbrace{11\ldots1}^{n}$.

334

Siendo $A = \log \sqrt[3]{\left(\frac{1}{36}\right)^{-2}}$ en el sistema de base 6; B = valor que hace real la expresión $\frac{3+4i}{1-Bi}$; C = coeficiente del término central del desarrollo de $(a+b)^4$.

Calcular: $+\sqrt{\frac{A-B}{C}}$.

335

Se tienen tres números a, b y c en progresión geométrica. Se aumenta b en 8 y se deja invariables a y c, con lo que se obtiene una progresión aritmética. Si de estos nuevos tres números sólo varía c al aumentarlo en 64, la progresión aritmética que se tenía se convierte en una nueva progresión geométrica. Se pide calcular a, b y c.

336

La suma de los términos de una progresión geométrica es 728; dos términos consecutivos son 18 y 54, y el número de términos es 6.

Calcular el primero y el sexto términos, y la razón.

Dichos términos son, respectivamente, las coordenadas de un punto de la gráfica de una función exponencial cuya base quiere hallarse. Determínese dicha base.

337

La suma de los seis términos centrales de una progresión aritmética creciente de 16 términos es 141, y el producto de sus extremos es 46. Escribir la progresión.

338

En una progresión geométrica de cinco términos el último es doble del tercero, y el producto de todos es igual a $4\sqrt{2}$. Formar la progresión.

339

Sin emplear tablas de logaritmos, resolver la ecuación:

$$3 \log x - \log 32 = 2 \log \frac{x}{2}.$$

340

Sabiendo que $\log x = 2 + \frac{1}{2} (\log 18 + \log 8 - 2 \log 25)$, hallar el valor de x, sin emplear tablas.

341

Hallar una progresión aritmética tal que la suma de sus n primeros términos sea igual a: $n(3n + 1)$.

342

Hallar el tanto por ciento a que hay que colocar un capital, a interés compuesto, para que, al cabo de tres años, quede multiplicado por 27/8.

Otro capital se coloca durante tres años, a interés compuesto, a un tanto por ciento igual a la décima parte del obtenido en la parte anterior y se convierte en 663.550,65 pesetas. Determinar el capital.

343

Siendo $\log 2 = 0{,}30103$; $\log 3 = 0{,}47712$ y $\log e = 0{,}43429$, calcular el logaritmo neperiano de 648.

344

Desde un punto A situado sobre uno de los lados de un ángulo de 30° a 10 cm. del vértice, se traza una perpendicular al otro lado al que corta en B; desde B, una perpendicular al primer lado al que corta en A_1; desde éste, otra al segundo lado que es cortado en B_1, y así sucesivamente. Calcular la longitud de la poligonal indefinida A B A_1 B_1 ......

345

Se han de pagar 60.000 pesetas dentro de ocho meses, pero por disponer de dinero se pagan a los dos meses 15.000 pesetas y tres semanas después 20.000 pesetas. Si el descuento por pago anticipado es del 4 por 100, ¿cuánto ha de pagarse al cumplirse el plazo de ocho meses?

346

Dados los números complejos $(2, -1)$ y $(2, -4)$, hallar:

1.° Otro número complejo cuyo afijo forme con los de los dos números complejos dados un triángulo equilátero.

2.° Hallar el área de dicho triángulo.

3.° Hallar el volumen de un tetraedro regular cuyas caras sean iguales a dicho triángulo equilátero.

347

Dados los dos complejos $\alpha = (6,5)$ y $\beta = (1,1)$:

1.° Representar, en el plano complejo, los afijos de los complejos $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ y $\alpha : \beta$.

2.° Obtener el complejo cuyo afijo es el centro de gravedad del triángulo formado por aquellos tres puntos.

3.° Hallar las tres raíces cúbicas de β.

348

Cada uno de los lados de un triángulo equilátero se divide en tres partes iguales. Demostrar que por los tres pares de puntos de división interiores a los lados pasa una circunferencia, del círculo de la cual se pide el área, sabiendo que la del triángulo es 3 dm².

Si se toma como origen de coordenadas el centro del círculo y como ejes de coordenadas la paralela por el centro a la base del triángulo, como eje X y la perpendicular como eje Y, expresar los números complejos cuyos afijos son los puntos de división citados y las vértices del triángulo.

349

Considérese el cuadrilátero A, B, C, D, formado por los afijos de los números complejos z, z^2, z^3 y z^4, siendo $z = 1 + i$.

Calcular:

1.º La longitud de los lados.
2.º El área del cuadrilátero.
3.º Los valores de n para que z^n sea real y positivo.

350

Hallar las tres raíces cúbicas de -125.

Los afijos de estas raíces forman un triángulo equilátero. Hallar el volumen del tetraedro regular cuyas caras sean triángulos iguales a aquél.

351

La diferencia de dos números complejos vale 1, el módulo del minuendo es $4\sqrt{2}$ y el del sustraendo 5. Hallar los dos números complejos.

Hay dos soluciones; los cuatro afijos de las dos soluciones forman un cuadrilátero. ¿Qué clase de cuadrilátero es? Determinar los lados del mismo.

352

Hacer la multiplicación de los números complejos $(A + Bi) \times (C + Di)$, siendo:

$A = \text{Log}_{\sqrt{2}}\, 0{,}5$.

B = La característica del logaritmo decimal de 0,0732.

C = La fracción generatriz del número decimal periódico mixto 1,1666 ...

D = La probabilidad de que al lanzar tres monedas simultáneamente resulten las tres caras.

353

Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son: A y B, los que tienen como afijos las raíces de la ecuación $4x^2 - 24x + 85 = 0$, y C el correspondiente al complejo de módulo 8 y argumento 330º. Calcular el afijo del cuarto vértice.

354

Calcular y construir con regla y compás las raíces cuartas del complejo $-2 + 2\sqrt{3}\, i$.

355

Demostrar que si dos fracciones tienen sus numeradores y denominadores conjugados, ambas son conjugadas.

356

Un obrero cobra diariamente 47,50 pesetas, más 0,50 pesetas por la primera docena de objetos fabricados, una peseta por la segunda, 1,50 por la tercera, etc. A un destajista se le pagan tres pesetas por la primera docena de las entregadas en un día, cuatro pesetas por la segunda, cinco pesetas por la tercera, y así sucesivamente. Se pide:

a) Expresar lo que cobra en total por día el obrero en función del número de docenas fabricadas.

b) Lo mismo para el destajista, y

c) Cuántas docenas han de fabricar en un día cualquiera de ellos para cobrar igual que el otro.

357

Dada la función $y = ln \dfrac{x-1}{x+1}$, se pide hallar:

1.º Los intervalos de valores de x para los cuales la función está definida.
2.º Su derivada primera.
3.º Comprobar que dentro de los intervalos hallados en la pregunta primera la función es siempre creciente.
4.º Hallar las ecuaciones de las asíntotas a la curva representada por dicha función.
5.º Dibujar la curva.

358

Dada la función $y = lx$, sus derivadas sucesivas siguen una ley de formación muy sencilla. Siguiéndola, obtener la derivada enésima. Halladas y', y'' e y''', obtener $y' + y'' - y'''$. Se considera la función $y =$ al numerador de $y' + y'' - y'''$, y se pide: Hallar la tangente del ángulo que forman las dos tangentes a la curva representación de la función anterior, en los puntos en que ella corta el eje de las x.

359

Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $y = x^5 - 5x$.

Representarla gráficamente, dibujando especialmente las tangentes en los puntos notables y de corte con los ejes.

360

Hallar los valores de a, b, c en el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ si se verifica $P(1) = 4$, $P'(1) = 8$, $P(2) + 15 \; P(0) = 0$.

361

¿Cuál es el menor valor absoluto que puede tomar $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$?

362

La suma de los cuatro términos centrales de una progresión aritmética de ocho términos es 70. El producto del primero y último es 196. Determinar la progresión.

363

Construir la curva definida por la función $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, determinando previamente:

1.º Los puntos en que la curva corta el eje de abscisas.
2.º Las ecuaciones de las tangentes en dichos puntos.
3.º Los intervalos del eje de abscisas en los cuales la función es creciente o decreciente.
4.º Los intervalos del eje de abscisas en los cuales la curva dirige la concavidad hacia arriba o hacia abajo.

364

Un espejo plano que tenía forma de un cuadrado de 80 cm. de lado se ha roto por una esquina según una recta. Uno de los trozos tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 40 y 32 cm. Se pide:

1.º Hallar las dimensiones del espejo rectangular de área máxima que se puede recortar del otro trozo, de modo que los bordes del nuevo espejo sean paralelos a los del primitivo.
2.º Calcular dicha área máxima.

365

La base de un triángulo isósceles mide $2a$ cm. y la altura h cm. Determinar un punto sobre esta altura, tal que la suma de sus distancias a los tres vértices sea mínima. (Elíjase un sistema conveniente de ejes coordenados.)

Aplicación para los siguientes valores numéricos; $2a = 12$ cm.; $h = 5$ cm.

366

Encontrar las coordenadas del punto de intersección de ordenada positiva de las curvas de ecuaciones $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y^2 = \frac{16}{3}x$ y la tangente del ángulo que forman las tangentes a dichas curvas en el citado punto.

367

Calcular el ángulo que forman las tangentes a la curva de ecuación $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$ en sus puntos de intersección con el eje de abscisas y el área del triángulo formado por dichas tangentes y la que tiene la curva paralela al citado eje.

368

Dada la función $y = x^4 - 18x^2 + 32$, determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, y hallar la ecuación de la tangente a la curva correspondiente en uno de los puntos de inflexión.

369

Dada la función $y = \mathrm{L}\,(1 + x)$, se pide:

1.º Hallar su función inversa.

2.º La derivada de orden 50 de y respecto de x.

370

Dada la función $y = -\dfrac{4}{3}x^3 + 9x + 2$, hallar:

1.º Sus máximos y mínimos.

2.º Los intervalos en los que es creciente.

3.º Los intervalos en los que es decreciente.

4.º Su representación gráfica.

371

Calcular la derivada de la función $y = \sqrt[3]{2x + 1}$ para $x = \mathrm{A}$, siendo:

A = Logaritmo neperiano de B, y

$$\mathrm{B} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

372

Hallar: 1.º La derivada simplificada de la función $y = \dfrac{\mathrm{tg}^2 x + 1}{\mathrm{tg}^2 x - 1}$, poniendo el resultado obtenido en función de la tangente.

2.º La derivada simplificada de la función $y = \dfrac{1}{\cos 2x}$, poniendo el resultado en función de la tangente.

373

Las rectas $y = -4x + 3$ e $y = 2(x - 3)$ son tangentes a la curva $y = x^2 - 4x + 3$.

Hallar las coordenadas de los puntos de contacto, la longitud de la cuerda de los contactos y la tangente del ángulo formado por dichas dos rectas.

374

Hallar el volumen del cono de revolución de máximo volumen, inscrito en una esfera de radio 1,5 m.

375

Hallar el punto de inflexión de la curva $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ y escribir la ecuación de la tangente en dicho punto.

376

Dada la función $y = \sqrt{x^2 - a}$, que pasa por el punto (4,0), determinar:

1.º El valor de a.

2.º Las ecuaciones de las tangentes en los puntos de abscisa: $x = 5$.

3.º El área del triángulo formado por dichas tangentes y el eje de ordenadas.

4.º El volumen del cuerpo engendrado por dicho triángulo al girar alrededor del eje de abscisas.

377

El polinomio $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ se anula para $x = -2$, toma el valor 65 para $x = 3$ y presenta un mínimo para $x = -1$. Determinar:

1.º Los valores de los coeficientes a, b, c.

2.º Resolver la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

3.º Representar la función $y = x^3 + ax^2 + bx + c$.

378

Se tienen las curvas cuyas ecuaciones son $y = 2 + 4x - 3x^2$, $y = \dfrac{2 - 3x}{1 + 2x}$.

Determinar:

1.º Abscisas de los puntos comunes a aquéllas.

2.º Ecuaciones de las tangentes a dichas curvas en algún punto común.

3.º Tangente trigonométrica del ángulo determinado por dichas tangentes geométricas.

379

Estudiar la variación de la función $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ y construir la curva C representada por dicha ecuación, supuesto que x e y son coordenadas cartesianas.

Sea $y = mx$ una recta r.

Se pide:

1.º ¿Para qué valores de m corta r a C en dos puntos?

2.º ¿Para qué valores es r tangente a C?

3.º ¿Para qué valores no corta r a C?

380

Se tiene la ecuación $y = 2x^3 - 3x^2$, y se pide:

1.º Expresiones de y' e y''.

2.º Intervalos de crecimiento y decrecimiento de y.

3.º Máximos y mínimos de y.

4.º Intervalos de concavidad y convexidad de la curva dada por aquella ecuación; punto de inflexión.

5.º Representación gráfica de dicha curva.

381

Determinar un polinomio $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con las siguientes condiciones:

1.ª Se anula para $x = 0$.

2.ª Toma el valor $\dfrac{5}{6}$ para $x = 1$.

3.ª Pasa por un máximo para $x = 1$.

4.ª Pasa por un mínimo para $x = 2$.

382

1.º Calcular los límites de la expresión de término general:

$$a_n = \frac{(n-1)^3 - (1-n)^3}{3n^3 - 2n - 1}:$$

a) Para $n = \infty$.

b) Para $n = 1$.

2.º Obtener el valor de a_{101}.

383

Hallar el límite $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \dots\dots + n}{3n^2}$.

384

Simplificar $\dfrac{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}{x^4-2x^3+x^2}$ y hallar su límite para $x=\infty$; $x=0$; $x=1$.

385

De una baraja de 40 cartas tomamos cuatro al azar. Se pide:

1.º Probabilidad de que esas cartas sean una de cada palo.

2.º Probabilidad de que dos sean de oros y las otras dos de espadas.

3.º Probabilidad de que dos sean reyes y las otras dos caballos.

4.º Probabilidad de que ninguna de ellas sea de oros.

386

Con las cifras 6, 7, 8 y 9:

1.º ¿Cuántos números de seis cifras pueden formarse?

2.º Hallar la suma de todos ellos.

3.º Hallar la suma de todos los que terminan en 6.

387

En un circuito, en el que por determinado punto sólo pueden pasar tres coches a la vez, se celebra una carrera, en la que toman parte cinco coches. ¿De cuántas maneras distintas podrán pasar los coches por el citado punto?

388

Colocadas en orden alfabético todas las permutaciones de *a b c d e f g*, se desea saber el lugar que ocupa la permutación *c g a d b e f*.

389

Hallar el cociente de los términos 8.º y 5.º del desarrollo $(\sqrt[4]{3}-x^3)^{21}$

390

1.º Calcular el número de diagonales de un polígono convexo de n lados.

2.º Calcular el número de puntos de intersección de estas diagonales supuestas prolongadas indefinidamente y que no concurran tres en un mismo punto que no sea vértice.

391

Demostrar que, dadas tres cifras a, b, c:

1.º La suma de los números obtenidos formando las variaciones binarias es múltiplo de 22.

2.º La suma de los números obtenidos formando las variaciones ternarias con repetición es múltiplo de 37.

392

Escribir el término independiente de x en el desarrollo de

$$\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$$

393

Dados n puntos en el espacio, de los que se supone que no hay tres en línea recta, ni cuatro en un mismo plano. Se consideran las rectas que resultan de unirlos de dos en dos (cada recta es un grupo de dos puntos) y los planos que se obtienen al considerar cada tres (cada plano es un grupo de tres puntos), se pide:

1.º Hallar el número de rectas y de planos obtenidos al tomar los n puntos dados, de dos en dos, o de tres en tres, respectivamente.

2.º Hallar el número n, para que el número de planos sea igual al de rectas.

3.º Si se ordenan los n puntos, y se unen, el primero con el segundo, éste con el tercero, el tercero con el cuarto, etc.; el último con el primero resulta una figura que podemos llamar polígono, cuyos lados son los segmentos anteriores; los demás segmentos que los unen se llaman diagonales. Hallar el número de éstas.

4.º Hallar n, para que el número de diagonales sea doble que el de lados.

394

Dado un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de radio r, se pide:

1.º Valores del lado l_n y del perímetro p_n en función de r y n;

2.º Límite de p_n cuando $n \to \infty$ (r, constante).

395

El perímetro de un rombo es 60 cm. y su área es 120 cm^2.

Se pide calcular:

1.º El lado.

2.º Las diagonales.

3.º El radio de la circunferencia cirscunscrita.

4.º Los cosenos de los ángulos de dicho rombo.

396

Sobre cada lado del triángulo equilátero de lado igual a 1 dm. se construye al exterior un cuadrado. Uniendo convenientemente los vértices de estos tres cuadrados, se tiene un exágono, y se pide:

1.º Comprobar que dicho exágono es equiángulo.
2.º Calcular el área de dicho exágono.
3.º Los valores de los lados de dicho exágono.

397

Se tiene un polígono convexo de n lados y se pide:

1.º Suma de sus ángulos expresada en grados.
2.º Valor del ángulo, supuesto que dicho polígono es regular.
3.º Valores posibles de n a fin de que la graduación de dicho ángulo sea un divisor del ángulo completo.

398

Se tiene un triángulo isósceles de 64 cm. de perímetro. Sabiendo que uno de los lados iguales excede en 8 cm. a la base. Se pide calcular:

1.º Las longitudes de cada uno de sus tres lados.
2.º El área del triángulo.
3.º El volumen del tetraedro obtenido tomando el cuarto vértice sobre una perpendicular al plano de la figura que pase por uno de los vértices de la base y dista 6 cm. de dicho plano.
4.º Las ecuaciones de los lados iguales tomando como eje de abscisas la base, y como eje de ordenadas la altura.

399

El rombo R tiene por lado l, y es semejante al rombo R', cuyo lado es l'. La razón de semejanza vale $l'/l = \sqrt{3}$, el área de R' es igual a 400 m², y uno de los ángulos de éste vale 60º. Hallar: 1.º El lado l. 2.º Las diagonales de ambos rombos. 3.º El radio del círculo inscrito a R. 4.º Los dos segmentos en que el punto de contacto del círculo inscrito a R divide al lado.

400

Los lados de un ángulo tienen por medidas:

$$x^2 + x + 1,\ 2x + 1,\ x^2 - 1$$

Calcular el valor del coseno del ángulo opuesto al primer lado.

401

En un triángulo, un lado es doble de otro, y el ángulo comprendido entre ambos vale 60º. Calcular los otros dos ángulos.

402

En un triángulo isósceles, los dos lados iguales suman 50 cm. y la proyección de la base sobre uno de ellos mide 8 cm. Calcular la longitud de dicha base.

403

Los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia, que pasan por un punto fijo de la misma, engendran una línea. Determinar dicha línea.

404

Hallar el lado, la apotema y el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio r.

405

Dos circunferencias O y O' son tangentes exteriores, sus radios miden $3r$ y r, respectivamente, y su punto de contacto es A.

Se traza una tangente común exterior, sean B y C los puntos de contacto. Hallar el área del triángulo mixtilíneo ABC, limitado por la tangente común BC, y los arcos de circunferencia AB y AC.

406

En un triángulo rectángulo, un cateto b mide $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$ cm., y la hipotenusa $a = 10$ cm. Se pide:

1. La medida del otro cateto y del área del triángulo ABC.
2. El volumen del cuerpo engendrado al girar dicho triángulo alrededor de la hipotenusa.
3. Las medidas de la hipotenusa y de los catetos de un triángulo A'B'C' de área 6 cm²., semejante con el A B C.

407

Los ángulos del cuadrilátero ABCD están representados por

$A = 2x + 10^\circ \qquad B = 7x - 10^\circ \qquad C = 5x + 10^\circ \qquad D = x + 50^\circ$

Se pide:

1. Determinar cuánto vale x y cuánto mide cada uno de los ángulos del cuadrilátero.
2. Clasificar dicho cuadrilátero.
3. Reducir el valor de x a radianes, y
4. **Calcular sin tablas, para dicho valor de x, el de la expresión**

$$\operatorname{tg} 3x - \cos \frac{3x}{2}.$$

408

Determinar los siguientes lugares geométricos:

1. Lugar geométrico de las rectas paralelas a una recta dada y equidistantes de esa recta.
2. Lugar geométrico de los puntos del espacio que distan 6 cm. de un punto fijo y 8 cms. de otro punto también fijo, siendo 10 cms. la distancia entre los dos puntos fijos.
3. Lugar geométrico de las rectas perpendiculares a un plano dado y tangentes a una esfera también dada.

409

Demostrar:

1.º Que si unimos un punto P interior a un triángulo ABC con los vértices del mismo, la suma de los tres segmentos PA, PB y PC está comprendida entre el perímetro y el semiperímetro del triángulo ABC.

2.º Que la suma de las tres medianas de un triángulo está comprendida entre el perímetro y el semiperímetro del triángulo.

410

1.º Sea l_n el lado del polígono regular de n lados inscritos en la circunferencia de radio R. Calcular en función de R y l_n el lado del polígono regular de $2n$ lados inscrito en la misma circunferencia.

2.º Aplicar la fórmula obtenida para calcular en función de R el lado del octógono regular.

3.º Idem el lado del dodecágono regular.

411

Los lados de un triángulo ABC miden $a=5$ cm., $b=6$ cm., y $c=7$ cm. por un punto P de AB tal que $\overline{AP}=3$ cm. se trazan paralelas a los otros dos lados. Se pide hallar:

1.º El perímetro del paralelogramo que resulta.

2.º El área de dicho paralelogramo.

412

Demostrar:

1.º Si un ángulo de un triángulo rectángulo mide 30º, el lado opuesto es igual a la mitad de la hipotenusa.

2.º En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos.

3.º Que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera son vértices de un paralelogramo equivalente a la mitad del cuadrilátero.

413

Resolver las siguientes cuestiones:

1.ª Calcular el radio de una circunferencia sabiendo que un arco de la misma, de 5 radianes, tiene una longitud de 40,23 m.

2.ª Un volante tiene una velocidad angular uniforme de 3 radianes por segundo. Hallar la velocidad por minuto de un punto del mismo, cuya distancia al eje de giro es 43 cm.

3.ª Un tren recorre una curva circular de 700 m. de radio con una velocidad de 40 Km/h. Hallar en grados y en radianes el ángulo que forma la dirección del tren en un instante con la que tendrá al cabo de 44 segundos.

414

Demostrar geométricamente, del modo más simple posible, que

$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$$

415

Calcular un valor aproximado del número *pi* por inscripción del polígono regular de 24 lados, en una circunferencia.

416

Dos puntos A y B distantes 3620 metros están a distintos lados de un río de orillas paralelas, rectilíneas y de 280 metros de anchura. El punto A dista 520 metros de su orilla y el B 680 metros de la suya.

Construir el camino mínimo entre A y B con puente sobre el río, calculando y construyendo:

1.º Emplazamiento del puente con las distancias de sus extremos a los puntos A y B.

2.º El camino total entre A y B.

417

Por un punto O situado en el interior de un ángulo, trazar una recta que corte a los lados en dos puntos equidistantes de O.

418

Por un punto común a dos circunferencias, trazar una recta que determine dos cuerdas distintas de igual longitud.

419

Uno de los vértices de un cuadrado es A(—2;O), y los dos no opuestos a A están sobre la recta de ecuación $x = 2$. Calcular las coordenadas de los tres vértices desconocidos y el área y construir con regla y compás el radio del círculo equivalente a la corona circular limitada por las circunferencias inscrita y circunscrita al cuadrado.

420

El área de un icosaedro regular es el décuplo de la de un tetraedro regular. Si se conoce la arista del tetraedro, ¿cómo se puede construir gráficamente la del icosaedro?

421

Dado un segmento AB de longitud 13 cm., se pide:

1.º Determinar gráficamente un punto P de la recta AB exterior al segmento dado, tal que se verifique la relación $\frac{PA}{PB} = \frac{7}{13}$ y justificar el procedimiento empleado.

2.º Calcular la longitud del segmento PA.

422

Un depósito cilíndrico de hierro se llena de arena gruesa, y después se echa agua hasta enrasarle. Un m^3 de arena pesa 1.566 kg., representando sus huecos el 335 por 1.000 de su volumen. Calcular el peso total del depósito con su contenido, sabiendo que el radio interior mide 60 cm.; la altura, 11 dm., y que el peso del recipiente es de 35 kg. por m^2 de superficie interior.

423

Las bases de dos conos de revolución están situadas en el mismo plano, siendo los radios de las mismas 5 m. y 3 m., y teniendo sus volúmenes iguales.

El segmento determinado por los vértices de los dos conos mide 19 m., formando la recta, de la que forma parte un ángulo de 33º 28' 40" con el plano de las bases. Se desea hallar las alturas de los dos conos.

424

En un cuadrilátero convexo A B C D se conoce: AB = 40 cm, BC = 45 cm., CD = 15 cm., DA = 18 cm., BD = 51 cm. Se pide hallar el área del paralelogramo obtenido uniendo por rectas los puntos medios de los lados del cuadrilátero

425

Al cepillar las caras de una pirámide exagonal regular de madera, de altura 0,50 m, se obtiene otra pirámide exagonal regular, cuya base es un exágono de lado 4/5 del de la primitiva. La cantidad de madera desperdiciada fué de 4 dm.^{3}. Calcular en dm^3 el volumen de la segunda pirámide.

426

Un depósito de agua tiene la forma de un prisma exagonal regular, cuyo lado de la base mide 4 dm. y su altura, 60 cm. Dicho depósito está comunicado con otro de forma cilíndrica cuya base es una circunferencia de radio 15 cm.

Del primer depósito pasa el agua al segundo por un conducto que da un gasto medio de 15 litros por segundo. Hallar cuánto tiempo transcurrirá para que el agua alcance la misma altura en los dos depósitos.

427

En un cuadro ABCD, cuya diagonal es de 32,3 cm., está inscrito otro cuadrado MNPQ, de modo que cada vértice de éste se encuentra en un lado de aquél, al que divide en dos segmentos en la razón de 8/15. Calcucular: 1.º, el lado y la diagonal de MNPQ; 2.º, el volumen del sólido engendrado por este cuadrado en una rotación de 180 grados alrededor de una de sus diagonales.

428

Se tiene un triángulo isósceles de perímetro 64 cm. Sabiendo que uno de los lados iguales excede en 8 cm. a la base, calcular: 1.º) la altura y los lados del triángulo; 2.º) el área y el volumen engendrado por el triángulo al girar 360 grados alrededor de un eje que pasa por el vértice y es paralelo a la base.

429

El volumen de un cono de revolución es 192 m^3, y el ángulo que forman dos generatrices opuestas es de 45 grados. Hallar el radio de la base y la altura. (Utilícense tablas de logaritmos.)

430

Sea una pirámide regular de base cuadrada. La arista lateral mide 26 cm. y la altura 24 cm.

Se pide:

1.º El volumen.

2.º El área total.

3.º La distancia de un vértice de la base a una de las caras que no pasan por él.

431

Sea un exágono regular de lado l.
Calcular:

1.º El área total engendrada al girar dicho exágono según un eje que pasa por dos vértices opuestos; y

2.º Según un eje que pasa por los puntos medios de dos lados opuestos.

432

Las tres aristas de un ortoedro que concurren en un mismo vértice tienen longitudes en progresión aritmética cuya suma es 78 metros. El volumen del ortoedro es de 16.640 m^3. Hallar: 1.º) las longitudes de dichas aristas, y 2.º) el área del triángulo cuyos lados tienen las tres longitudes obtenidas.

433

Un recipiente en forma de prisma, de base cuadrada, de lado 4 cm., está inclinado de tal manera que el líquido contenido en él alcanza en las aristas laterales las alturas de 7 cm., 8 cm., 11 cm. y 10 cm. ¿Qué cantidad de líquido contiene el recipiente?

434

La seción transversal de un tanque de gasolina de 3.000 l. de capacidad está formada por un rectángulo de lados 1,25 y 0,75 m., y dos semicírculos construídos sobre los lados menores como diámetros. ¿Qué cantidad de gasolina contiene el tanque cuando el nivel de aquélla alcanza los 4/5 de la altura?

435

1.º Si sobre los cuatro lados de un cuadrado (lado igual a un decímetro) se construyen hacia el exterior cuatro triángulos equiláteros y se unen sus vértices, se obtiene un cuadrado. Hallar su área.

2.º Si sobre las diagonales del cuadrado se construyen, a un lado y a otro, triángulos equiláteros y se unen los vértices, se obtiene otro cuadrado. Hallar su área.

3.º Hallar el área del octógono, que es la parte común a los dos cuadrados anteriores.

436

En un campo en forma de exágono regular de cierto radio sólo se puede cultivar el círculo inscrito en él.

Calcular el tanto por ciento del terreno desaprovechado.

437

Girando un rombo en torno de una diagonal, se obtiene un cuerpo cuya área es $130\ \pi\ cm^2$, y cuyo volumen es $200\ \pi\ cm^3$.

Calcular las diagonales de dicho rombo.

438

Un ortoedro tiene una de sus dimensiones igual a 6 metros y su diagonal mide 12,1 m. Se introduce en agua, de forma que quede vertical la menor de sus tres dimensiones; el paralepípedo flota, quedando fuera un volumen, v_1, del mismo y dentro del agua un volumen v_2, resultando que $v_1/v_2 = 1/3$. Se coloca encima del ortoedro un peso de 1.260 Kg., resultando entonces que los volúmenes v'_1 y v'_2 de la parte exterior y de dentro del agua, del ortoedro, cumplen la condición $v'_1/v'_2 = 1/4$. Calcular el volumen del paralepípedo, sus dimensiones y su densidad.

439

Los vértices de un exágono regular $A_1\ B_1\ C_1\ D_1\ E_1\ F_1$ se unen de dos en dos, resultando dos triángulos equiláteros con una parte común, $A_2\ B_2\ C_2\ D_2\ E_2\ F_2$, que es otro exágono regular, volviendo a hacer la misma construcción en el nuevo exágono, se obtiene otro nuevo $A_3\ B_3\ C_3\ D_3 E_3\ F_3$, y así sucesivamente se repite indefinidamente esta operación; se pide:

1.º Dado el lado a_1 del primer exágono, hallar el lado del exágono enésimo.

2.º El área de este exágono.

3.º La suma de los perímetros de los infinitos exágonos obtenidos.

4.º La suma de las áreas de esos infinitos exágonos.

440

Las latitudes de un trópico y de un círculo polar son, respectivamente, α y $90^\circ - \alpha$; ($\alpha = 23^\circ\ 27'\ 30''$).

Encontrar la razón del área de cada zona a la de la Tierra, supuesta esférica.

441

Se tiene un triángulo rectángulo OAB en el que los lados del ángulo recto son $OA = a$, $OB = 3a$. Desde un punto M de la hipotenusa AB, situado entre A y B, se bajan las perpendiculares MP y MQ sobre OA y OB (P sobre OA y Q sobre OB).

1.º Determinar las longitudes $MQ = x$ y $MP = y$, de modo que el área total del cilindro engendrado por el rectángulo OPMQ, al girar alrededor de OB, tenga un valor dado $2\pi am$. Discusión cuando m varía, siendo a fijo.

2.º Estudiar la variación de m en función de x. Trazar la curva, para encontrar los resultados de la discusión de la 1.ª parte.

442

De todos los paralelogramos con las mismas diagonales, ¿cuál es el de mayor área?

443

Dos circunferencias, O y O′, tangentes exteriores, tienen por radios 4 cm. y 1 cm. Se traza una tangente común, sean A y B, los puntos de contacto; tracemos los segmentos AA′ y BB′, perpendiculares a la línea de los centros. Hallar el volumen del tronco de cono, que resulta al hacer girar alrededor de la línea de los centros, el trapecio rectángulo AA′ BB′.

444

Una pirámide cuadrangular regular tiene todas sus aristas iguales; se da la longitud, 4 m., del segmento que une los centros de dos caras laterales contiguas, y se pide:

Hallar el volumen del octaedro regular que se forma, por dos pirámides iguales a la dada, que tienen la misma base y situadas en distinto semiespacio respecto al plano de la base común.

445

Un tetraedro regular de 25 cm. de arista es hueco y le falta una cara; se coloca de manera que el vértice opuesto a la cara que falta se apoya en el suelo, quedando los otros tres vértices en un plano horizontal. Se echa en él un litro de agua, se pide: Altura a que llega el agua, arista del tetraedro ocupado por ella, y volumen de la parte vacía.

446

Un campo tiene forma de rombo. Su perímetro es 52 Dm y una de sus diagonales mide 100 mts.

Se pide:

1. El volumen del cuerpo que se engendra al girar alrededor de la mayor de sus diagonales.
2. El precio de cada centiárea, si se pagó por él en total la cantidad resultante de pignorar 80 títulos de 500 pesetas nominales y cotización de 90 por 100, habiendo concedido el Banco el 60 por 100 del valor efectivo.

447

Desde un punto situado a 50 cm. del centro de una circunferencia de 30 cm. de radio se trazan las tangentes a la misma, limitándolas en los puntos de contacto. La figura así obtenida gira alrededor del diámetro, que pasa por el punto primeramente indicado. Calcular el área y el volumen del cuerpo engendrado.

448

La arista básica de una pirámide triangular regular mide 10 cm. y la lateral $\frac{5}{3}\sqrt{21}$. Calcular el área lateral, el volumen y el ángulo formado por una cara lateral con la base.

449

Sobre las tres aristas de un triedro trirrectángulo de vértice V tomamos segmentos $VA = a$ cm., $VB = b$ cm. y $VC = c$ cm. Se pide:

1.º Calcular el área del tetraedro V A B C.

2.º Calcular su volumen.

3.º Calcular la distancia de V al plano A B C.

Aplicación cuando $VA = 5$ cm., $VB = 6$ cm. y $VC = 7$ cm.

450

Uniendo de tres en tres los puntos que dividen en ocho arcos iguales una circunferencia, se tiene un polígono estrellado. Hallar el área de la parte de círculo que no es común con la del polígono.

451

El área de un triángulo es 12 cm². Su perímetro, 115 mm. Hallar el área comprendida entre el contorno del triángulo y exterior al círculo inscrito.

452

1.º Dibujar un octaedro regular.
2.º Si su lado mide l metros, calcular su área y su volumen.
3.º ¿Cuántas diagonales tiene y cuánto mide cada una?

453

Se dan dos círculos de diámetro $AB = 2R$ y $AC = 2r$ $(R>r)$, siendo el menor interior y tangente en A al mayor. Sobre la tangente común, a un lado y otro del punto A, se toman $AM = AN = 2r$.

Las tangentes trazadas desde M y N al círculo menor se cortan en E, sobre el diámetro AB. Se pide.

1.º Calcular la longitud de BE.
2.º Hallar el área del triángulo MNE.
3.º Determinar el volumen engendrado por dicho triángulo al girar alrededor del diámetro del círculo mayor perpendicular al $\overline{AB}$.

454

Se divide una circunferencia en doce partes iguales, que se numeran como en un reloj. Se traza el polígono de vértices 1, 4, 6, 10, 11, 1. Calcular el área de este polígono en función del radio de la circunferencia.

455

Calcular x e y sabiendo que: $\cos(x - y) = \cos(x + y) = 0{,}5$.

456

Resolver la ecuación trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x = 0$.

457

Resolver la ecuación trigonométrica: $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 5/6$.

458

De un triángulo se conoce $A = 30^{\circ}$, $B = 45^{\circ}$ y el lado $a = 20\sqrt{2}$. Resolver el triángulo sin emplear tablas de logaritmos.

459

Los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética. Supuesto conocido el lado menor, resolver el triángulo, hallando, además, los valores de las razones trigonométricas de sus ángulos.

460

Sabiendo que $\operatorname{cosec} x = -\dfrac{5}{4}$, calcular:

a) $\operatorname{Sen}(1.890 \text{ grados sexag} + x)$.

b) $\operatorname{Sen}\ \dfrac{21\pi}{2} \text{ radianes} + x)$.

c) $\operatorname{tg}(x - 4.000 \text{ grados cent.})$.

d) $\operatorname{cosec}(4.230 \text{ grados sexag} - x)$.

461

Desde un punto situado en el plano horizontal que pasa por el pie de una torre se lanza una visual a su cúspide, que forma un ángulo de 30° con dicho plano; se avanza hacia el pie 100 metros y la visual lanzada ahora forma un ángulo de 60°. Calcular la altura de la torre.

462

Dibujar con regla y compás el menor ángulo cuya cotangente valga -2 y, siendo a dicho ángulo, calcular $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$, $\operatorname{tg} 2a$ y $\operatorname{tg}(a - 30^{\circ})$.

463

Resolver las siguientes cuestiones:

1.ª Obtener la expresión general de todos los ángulos cuyo seno vale -1.

2.ª Obtener la expresión general de todos los ángulos cuya tangente vale -1.

3.ª Obtener la expresión general de todos los ángulos cuya tangente es igual a la cotangente.

4.ª Obtener la expresión general de todos los ángulos que tienen el seno y el coseno iguales y de signo contrario.

464

Resolver las siguientes cuestiones:

1.ª Expresar sen x y cos x en función de $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

2.ª Expresar sen $3x$ en función de sen x.

3.ª Expresar cos $3x$ en función de cos x.

4.ª Expresar tg $3x$ en función de tg x.

465

Demostrar que $(2 \operatorname{sen} 18^{o})^2 + 2 \operatorname{sen} 18 = 1$, sin emplear tablas trigonométricas, justificando el proceso por el que se llegue a la solución.

466

Se tiene un octaedro de arista igual a 1 dm. Se le descompone por un plano de simetría en dos pirámides y se pide:

1.º Altura de la pirámide.

2.º Volumen de la pirámide y del octaedro.

3.º Tangente trigonométrica del ángulo de una cara de dicha pirámide con la base de ésta.

4.º Tangente del ángulo diedro del octaedro.

467

Se tiene un tetraedro regular de arista a. Calcular:

1.º Distancia de un vértice a la cara opuesta.

2.º Razones trigonométricas del ángulo de una arista con una cara que no la contiene.

3.º Razones trigonométricas de un ángulo diedro.

468

Se tiene un dodecaedro regular, del que no se sabe sino que tiene 12 caras pentagonales y que en cada vértice concurren tres aristas. Se pide calcular ordenadamente:

1.º Número de vértices.

2.º Número de aristas.

3.º Número de diagonales de las caras.

4.º Número de segmentos rectilíneos determinados por cada dos vértices.

5.º Número de diagonales del dodecaedro.

469

Se tiene un icosaedro regular del que sólo se sabe que tiene 20 caras triangulares, concurriendo cada cinco en cada vértice.

Se pide calcular razonadamente:

1.º Número de vértices del poliedro.

2.º Número de sus aristas.

3.º Número de sus diagonales.

470

Sabiendo que la suma de las longitudes de todas las aristas de un icosaedro regular es 450 cm., calcular:

1.º El área de dicho icosaedro.

2.º La arista del tetraedro regular que tiene igual área que el icosaedro dado.

3.º El volumen de la esfera circunscrita a dicho tetraedro regular.

471

Dado un ortoedro cuyas dimensiones son tres números naturales en progresión aritmética, de razón 2, determinar su volumen, sabiendo que su área total mide 142 m^2.

Describir el cuerpo que se obtiene al unir los centros de sus caras y calcular:

1.º Su volumen.

2.º La suma de las longitudes de todas sus aristas.

472

Calcular la distancia entre dos ciudades situadas en el paralelo de latitud 60°, sabiendo que sus longitudes son: 10° E. y 30° E. Radio terrestre $= 20.000/\pi$ km.

473

Utilizando la definición histórica del metro, calcular la longitud del menor arco de paralelo comprendido entre un punto de la superficie terrestre a los 60° de latitud Norte y $125^\circ\ 30'$ de longitud Oeste, y otro a los 60° de latitud Norte y 75° de longitud Este.

474

En una circunferencia de 8 cm. de radio se tiene un diámetro AB, se traza la tangente en A y sobre ella se toma un segmento $AT = X$. Se une T con B y esta recta corta a la circunferencia en C. Calcular:

a) El segmento $CT = Y$ en función de X.

b) La ecuación de la tangente a la curva que tiene como ecuación la anteriormente obtenida expresión de Y en función de X, en el punto de abscisa $X = 6$.

475

1.º Simplicar la expresión $y = \dfrac{3 + \dfrac{x-8}{x}}{1 - \dfrac{x+2}{x}}$ y después representar gráficamente esta función.

2.º Sea A el punto donde la gráfica corta el eje de ordenadas y B el punto donde corta el eje de abscisas; sea C el punto del eje de ordenadas tal que el triángulo A B C sea rectángulo en B y D el punto del eje de abscisas tal que el triángulo A B D sea rectángulo en A. Hallar el valor del área del cuadrilátero A B C D.

476

En un plano referido a dos ejes cartesianos x e y se tiene el punto P(8,1); por él se traza la recta de coeficiente angular t. S pide:

1.º Ecuación de dicha recta.

2.º Coordenadas de los puntos A y B en que dicha recta corta a los ejes coordenados.

3.º Valor de $\Delta = \overline{AB}^2$ en función de t.

4.º Valor mínimo de Δ.

477

Los tres vértices de un triángulo son los puntos: A(2, 3); B(5, 2); C (—1, 2); hallar:

1.º La ecuación del lado A B.

2.º La ecuación de la altura que parte del vértice C.

3.º El área del triángulo (unidad: cm.).

4.º La ecuación de la paralela media correspondiente al lado A B.

5.º La razón trigonométrica $\operatorname{sen} \widehat{C}$, correspondiente al ángulo de vértice C.

478

Entre las abscisas x_1 y x_2 de dos puntos M_1 y M_2 del eje OX, existe la relación $x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 13 = 0$.

1.º Calcular en función de x_1 la abscisa del punto medio del segmento $M_1 M_2$.

2.º Si A es el punto de coordenadas (3,2), demostrar que las rectas AM_1 y AM_2 son perpendiculares entre sí.

3.º Imaginando que M_1 se mueve en el eje OX, de acuerdo con la ley $x_1 = 2t - 4$, determinar la ley de movimiento de M_2.

4.º Calcular la velocidad de M_2 en el instante en que M_1 pasa por el punto de abscisa 1.

479

Calcular la longitud del segmento interceptado en la recta $x - 2y + 5 = 0$ por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, así como su distancia al centro y el área del triángulo que tiene por lado dicha cuerda y su vértice opuesto es el centro de la circunferencia.

480

Explíquese razonadamente lo que representan gráficamente los siguientes sistemas:

$a) \left\{ \begin{array}{l} x > 0. \\ y > 0. \\ x + y < 2. \end{array} \right.$ $b) \left\{ \begin{array}{l} 2 < x < 4. \\ 0 < y < 3. \end{array} \right.$ $c) \left\{ \begin{array}{l} x + y = 5. \\ x > 0. \\ y > 0. \end{array} \right.$

$d) \left\{ \begin{array}{l} y < 2\,x. \\ x < 1. \\ y > 0. \end{array} \right.$ $e) \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 < 25. \\ 0 < x < y. \end{array} \right.$

481

Los lados de un triángulo son $a \equiv x - 2y = 0$; $b \equiv x + y = 6$; $c \equiv x = 2$. Hallar el área de cada uno de los triángulos en que el primitivo es descompuesto por la recta que pasa por el vértice B y forma con el lado a un ángulo de 45º.

482

Dadas las rectas r, $2x - y = 1$ y r', $3x + 2y = 26$, hallar la ecuación de la recta r'', concurrente con r y r', que pasa por el punto $(-8, -3)$. Estas tres rectas se cortan por otras dos s y s', paralelas y que pasan: la s, por el punto $(4,7/2)$ y su coeficiente angular es $1/4$; la s', por el punto $(7,6)$; s y s' cortan a r, r' y r'' en puntos A, B, C y A', B' y C', respectivamente. Comprobar que se verifica que AB/AC = A'B'/A'C'.

483

Hallar el área que encierra con los ejes coordenados la tangente a la curva: $y = \sqrt{x^3 + 1}$, en el punto de abscisa 2.

484

Determinar las coordenadas de los vértices B D del cuadrado que tiene por diagonal A (1,2), C (9,6).

485

La razón de los segmentos que una recta determina con los ejes coordenados es $8/15$ y la distancia de la misma al origen es 1. Hallar la ecuación de dicha recta.

486

Dados los puntos A $(-4,0)$ B $(0,-4)$, hallar el lugar geométrico de los puntos que ven el segmento A B bajo un ángulo de 45º.

487

Se dan los puntos A $(-2,1)$ y B $(3,4)$. Hallar el punto M del eje de las x para el cual el ángulo A M B sea máximo.

488

Los vértices B y C de un triángulo equilátero son los puntos B $(-2,3)$ y C $(2,1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice A y el área del triángulo.

489

Las ecuaciones de los lados de un cuadrilátero ABCD son:
AB $x-4y=10$; BC $3x+y=22$; CD $x-2y=5$; DA $5x-y=7$.
Hallar las coordenadas de los vértices, las ecuaciones de las diagonales y el área del cuadrilátero.

490

Hallar los puntos de la recta r de ecuación $y=2x-5$, que distan una unidad del punto A $(2,3)$.

Determinar, además, la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a r.

491

Dos vértices opuestos de un rombo son los puntos A $(5,5)$ y C $(-1,-1)$; la longitud de la otra diagonal BD es $4\sqrt{2}$. Hallar las coordenadas de B y D y el área del rombo.

492

Hallar el coeficiente angular y la ordenada en el origen de la recta $Ax+By=C$, siendo:

A = el resultado de operar y simplificar en $(5^{-4} \cdot 4^{-4}) \cdot (2^2 \cdot 10^2)^2$

B = el valor numérico, para $a=3$ $b=384$ $c=2$, de la expresión que resulta de operar y simplificar en $\sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c}} : \sqrt[4]{\frac{a^3 b}{c}}$.

C = el resto de la división del polinomio $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ por el binomio $x - 2$.

493

Se dan los puntos

— O (0,0)

— A (x_1, y_1) siendo x_1 y_1 la base y altura del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio 2.

— B (3,0).

Se pide:

Las coordenadas del vértice C tal que el cuadrilátero OABC sea paralelogramo.

494

Ecuación de la recta que pasa por los puntos A (x_1, y_1) B (x_2, y_2).

Siendo:

$x_1 = tg\ 180^o$.

y_1 = media geométrica de los números 4, 80, 20 y 0,25.

$x_2 = sen\ 210^o$.

$y_2 = i^{-6}$.

495

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (x_1, y_1) B $(x_2 = y_2)$

a) x_1, y_1 los valores numéricos que hay que atribuir a x e y en

$$y^2 - x \quad ; \quad 5x + 1 \quad ; \quad 2y \quad ; \quad y + x - 1$$

para que los números que resulten estén en progresión aritmética.

b) x_2 el valor numérico de x que verifica la relación $\binom{x}{2} = 3$.

c) $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n+1}{n^2 + 3n + 2}$.

496

Hallar las coordenadas de los puntos de división en tres partes iguales del segmento determinado por los ejes coordenados sobre la recta de ecuación $3x + 2y - 12 = 0$ y realizar dicha división con regla y compás.

497

Los vértices de un triángulo son A(1; 5) B(7; 3) y C(3;—1). Calcular la ecuación y la longitud de la altura relativa al lado AB y las coordenadas del baricentro del triángulo.

498

Se dan los puntos A(—3;3) y B(2;4). Calcular las coordenadas del simétrico de B con respecto a la recta que pasa por A y forma con la parte positiva del eje de abscisas un ángulo de 135º. Siendo los tres puntos vértices de un rombo, calcular las coordenadas del cuarto y el radio del círculo inscrito en el rombo.

499

Los vértices en la base de un triángulo isósceles son (B(—1:3) y C(5;3), y cada uno de los ángulos básicos mide 30º Calcular las coordenadas del tercer vértice, las del centro del círculo circunscrito y el radio de éste.

500

1.º Hallar las ecuaciones de dos rectas que pasan por el origen de coordenadas y forman ángulos de 60º con la bisectriz del primer cuadrante.
2.º Dichas rectas forman con la recta $x+y-1=0$ un triángulo del cual se pide hallar las coordenadas de los vértices y las longitudes de las alturas.