PROBLEMAS DE MATEMATICAS PARA EL CURSO PREUNIVERSITARIO

De acuerdo con lo señalado por el artículo 7.º del Decreto de 13 de septiembre de 1957, se proponen, a continuación, 250 enunciados de problemas de Matemáticas para el Curso Preuniversitario 1957-58. (La 2.ª y última serie se publicará en el mes de enero.)

1

Se reparte una cantidad entre cierto número de personas. La primera percibe 100 pesetas y 1/12 del resto; la segunda, 200 pesetas y 1/12 del resto; la tercera, 300 pesetas y 1/12 del resto, y así sucesivamente. De esta forma, todas han recibido la misma suma y se ha repartido la cantidad íntegra. Hallar ésta, el número de personas y la cantidad que recibió cada una.

2

Demostrar que si se convierte la fracción $\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$ en decimal se obtiene una periódica mixta, para cualquier valor entero de n mayor que la unidad.

3

Un caballo puede arrastrar un volquete que carga 1.200 kilogramos de tierra. El tiempo empleado para la carga y descarga en cada viaje es de doce minutos. El jornal del conductor con su vehículo es de 96 pesetas y la jornada de nueve horas. La velocidad media del caballo tirando del volquete, lleno o vacío, es de cinco kilómetros por hora.

Se desea saber qué distancia deberá haber entre el punto de carga y el de descarga, para que el transporte del metro cúbico de tierra cueste seis pesetas, sabiendo que el metro cúbico de tierra pesa 1.500 kilogramos.

4

Demostrar por inducción que la suma de cubos de los n primeros números es igual al cuadrado de la suma de estos números.

5

1.º Escribir, para un sistema de numeración de base 5, la serie natural de los números 1, 2, 3, 4, ... hasta el 432.

2.º En dicho sistema, efectuar las operaciones $341 + 123 + 434$ y 324×243.

6

Un comerciante compra género por valor de 45.000 pesetas; los gastos de transporte importan el 0,5 por 100 de este valor, y los demás gastos, el 6 por 100 del género puesto en la tienda. Quiere vender con una ganancia del 15 por 100 del importe de venta. Hallar este importe.

7

Transformar $\frac{27}{159}$ y $\frac{35}{1519}$ en fracciones equivalentes, tales que la suma del numerador de la primera y el denominador de la segunda sea igual a la suma de los otros dos términos.

8

El m.c.m. de los términos de una fracción es 340. Encontrar esta fracción sabiendo que no altera su valor si se suma 20 al numerador y 25 al denominador.

9

Una fuente llena un depósito en dos horas; una vez lleno, se abre un desagüe sin cerrar la fuente y el depósito se vacía en cuatro horas. ¿En cuánto tiempo se vaciaría el depósito si se cerrara la fuente?

10

Partiendo de la identidad $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, probar que la suma de dos números inversos es siempre mayor que 2. Determinar estos números en el supuesto que su suma vale $2 + \frac{9}{70}$.

11

Siendo n un número entero cualquiera, demostrar que la expresión $n \cdot (n + 2) \cdot (5n - 1) \cdot (5n + 1)$ es múltiplo de 24.

12

1.º ¿Qué cifras pueden escribirse a la derecha de los números 25 y 86 para que resulten números de tres cifras divisibles, simultáneamente, por 4 y por 9?

2.º Hallar el mayor múltiplo común a 25 y 86 que sea de cuatro cifras.

13

Si vamos en un tren, ¿durante cuánto tiempo hemos de contar los golpes que se sienten al pasar el tren por las juntas de los carriles, de longitud l conocida, para que el número de golpes contados sea igual a la velocidad del tren expresada en kilómetros por hora? Aplicación: $l = 12$ m.

14

Se reparten entre tres personas 12 kilogramos de oro, en partes directamente proporcionales a sus edades, y 11 kilogramos del mismo metal en partes inversamente proporcionales a las mismas edades, correspondiendo a la más joven, en este segundo caso, 4 kilogramos más que en el primero; siendo las edades de las dos personas mayores cincuenta y setenta y cinco años. Hallar la edad de la más joven y los kilogramos de oro que corresponden a cada una de ellas.

15

Los tres lados de un triángulo son tres números proporcionales a los 2, $\sqrt{6}$ y $1 + \sqrt{3}$. Se pide hallar:

1.º El valor de los tres ángulos.

2.º El radio del círculo circunscrito al triángulo.

16

Dos ciudades distan entre sí 140 kilómetros. En la primera se vende el trigo a 81 pesetas el Hl. y en la segunda a 84 pesetas. El transporte cuesta una peseta por Tm. y kilómetro. ¿En qué punto del camino entre las dos ciudades da lo mismo comprar el trigo de una u otra ciudad?

17

Encontrar una proporción tal que el primer término supere al segundo en seis unidades, y el tercero sobrepase en cinco al cuarto, sabiendo, además, que la suma de los cuadrados de sus términos es igual a 793.

18

Resolver la ecuación $x^8 - 1 = 0$ y representar gráficamente sus raíces.

19

Resolver $\sqrt{a^x\sqrt{a^x\sqrt{a^x}}} = a$.

20

Dado el polinomio $x^4 - x^3 + x^2 + ax + b$:

1.º Determinar a y b de modo que se anule para $x = 1$ y para $x = 2$.

2.º Sustituyendo a y b por los valores obtenidos, resolver la ecuación que resulta de igualar a cero dicho polinomio.

3.º Calcular el producto de todas las raíces obtenidas y la suma de los productos que pueden formarse con dichas raíces, tomadas tres a tres.

21

Hallar el valor numérico de la expresión

$$y = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}, \text{ para } x = \frac{2ab}{b^2+1}$$

22

Resolver las tres cuestiones siguientes:

1.ª Hallar a y b en el polinomio $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + ax + b$, para que sea divisible por $x - 2$ y el polinomio cociente tenga por término independiente 4.

2.ª Escribir la ecuación de segundo grado que tenga por raíces los cuadrados de las raíces de la ecuación $3x^2 + 14x - 9 = 0$.

3.ª Hallar el término sexto del desarrollo $(a - b)^{11}$ sin obtener los demás.

23

Dada la ecuación $8\,x^2 - (m - 1)x - (m - 7) = 0$:

1.º Encontrar los valores de m para los cuales las raíces sean:

a) Iguales.

b) Contrarias.

c) Recíprocas.

2.º Representar el trinomio $y = 8\,x^2 - (m - 1)\,x - (m - 7)$ para $m = 9$.

24

Una esfera de 12 cm. de diámetro está fabricada con metal formado con una aleación de 5/11 de cobre, 1/2 de estaño y el resto de plata. Las densidades de estos metales son 8,8, 7,4 y 10,5, respectivamente. Hallar el valor de la esfera siendo 80 pesetas, 75 pesetas y 1.200 pesetas los precios de un kilo de cobre, estaño y plata, respectivamente.

25

Dado el trinomio $a\,x^4 + b\,x^3 + 1$, se desea hallar los valores de los coeficientes a y b para que sea divisible por $(x - 1)^2$.

26

El coseno de 30 grados es una de las raíces de una ecuación de segundo grado. Formar la ecuación, sin utilizar tablas, sabiendo que la otra raíz es doble de la primera.

27

Varias personas deben pagar solidariamente por partes iguales una suma de 108.000 pesetas. Dos de ellas resultan insolventes, y esto hace que la deuda de cada una de las restantes aumente en 9.000 pesetas. Averiguar el número de deudores.

28

Dos viajeros parten del mismo lugar. El primero anda un kilómetro el primer día, dos el segundo, tres el tercero, y así sucesivamente. Cinco días después sale el segundo viajero, y sigue el mismo camino, andando 12 kilómetros diariamente. ¿A qué distancia del punto de partida se encontrarán?

29

Se tienen tres aleaciones de oro y cobre, cuyas leyes son de 0,750, 0,840 y 0,920. Se desea saber el peso que hay que tomar de cada una para obtener una aleación de 4,5 kilogramos y ley de 0,890, entrando los pesos del primero y segundo lingotes en la relación 2/7.

30

Dos deportistas, A y B, corren dos carreras de 900 m. cada una. En la primera, A da a B una ventaja de partida de 40 m. y vence por treinta y cinco segundos. En la segunda carrera, A da a B una ventaja de partida de cincuenta y cinco segundos y es vencido por 50 m. ¿En qué tiempo recorre cada uno los 900 m.?

31

Sea el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ x - my &= 5 \end{aligned}$$

Se pregunta:

1.º Valor de m para que en la solución del sistema x valga 0.

2.º Valor de m para que el sistema sea incompatible.

3.º Significado geométrico de las dos cuestiones.

32

Sea el sistema $y = x^2 - 2x - 15$, $y = m(x + 5)$, se pide:

1.º Determinar m para que el sistema tenga una solución en la que y valga 9.

2.º Determinar m para que el sistema tenga una sola solución.

3.º ¿Para qué valores de m el sistema carecerá de solución?

4.º Significado geométrico de las tres cuestiones.

33

Una mezcla de nitro y de azufre pesa 80 kilogramos, y por cada siete partes en peso de nitro hay tres de azufre. ¿Cuánto nitro se ha de añadir a fin de que la razón de los pesos del nitro y del azufre sea $\frac{11}{4}$?

34

Resolver el sistema:

$$\log. x + \log. y = 1 + \log. 7$$
$$\log. x - \log. y = \log. 56 + \text{colog}. 20.$$

35

Dada la ecuación $x^2 - 2(n - 2)x - 4(n - 1) = 0$, en la que x es la incógnita y n un parámetro variable:

1.º Probar que esta ecuación tiene sus raíces x' y x'' reales, cualquiera que sea n.

2.º Hallar el valor de n para el cual las dos raíces son iguales.

3.º Haciendo $x' = \text{tg}.\ a$ y $x'' = \text{tg}.\ b$, calcular, en función de n, $y = \text{tg}.\ (a + b)$.

36

En la ecuación $(2 \cos. \alpha - 1)x^2 - 4x + 4 \cos. \alpha + 2 = 0$, en la que α designa un ángulo agudo, encontrar:

1.º Los valores de α para los cuales la ecuación tiene sus raíces reales.

2.º Los signos de las raíces para estos valores de α.

3.º El producto de las raíces.

37

Resolver el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 3.5^x + 2.6^{y+1} = 807 \\ 15.5^{x-1} - 6^y = 339 \end{array}\right\}$

38

Resolver el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} \sqrt[x]{x+y} = 2 \\ (x+y).3^x = 6^7 \end{array}\right\}$

39

Tres jugadores juegan con la condición de que el que pierda doblará el dinero que tenga cada uno de los otros dos. Juegan tres partidas y pierde una cada uno, terminando todos con la misma cantidad: 200 pesetas. Calcular, por razonamientos aritméticos, con cuanto dinero comenzó a jugar cada uno de ellos.

40

Se da la ecuación $(m+1)\,x^2 - (m+4)\,x + 3 = 0$ y se pide: 1.º Calcular sus raíces; 2.ª Discutir el signo de las mismas, según los valores que tome m.

41

Dado el sistema $\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 10.000 \\ (x-y)\ \log.\ (x+y) = 1.000 \end{array}$

Se pide:

1.º Resolverlo sin ayuda de las tablas logarítmicas.

2.º Interpolar cuatro medios diferenciales entre los valores x y que resulten.

3.º Para esas mismas soluciones hallar el valor de la expresión compleja $i^{(x-y)}$

42

En un recipiente cilíndrico que contiene agua salada hasta los 3/4 de su altura se vierten tres litros de agua pura. Cada litro de la mezcla pesa 1070 gramos.

Hallar la capacidad del recipiente, sabiendo que la densidad del agua salada contenida primitivamente en el recipiente era 1,08.

43

A las 12 del 3 de mayo se han puesto en hora dos relojes de pared que tocan un solo golpe, tanto en las horas como en las medias horas. El primero adelanta ocho minutos por cada hora y el otro retrasa tres minutos en cada hora.

¿En qué momento—hora y fecha—sonarán juntos por primera vez después de su puesta en marcha?

44

Discutir el sistema según los valores del parámetro k:

$$\begin{aligned} x - 3y + 5z &= 2 \\ 2x - 4y + 2z &= 1 \\ 5x - 11y + 9z &= K \end{aligned}$$

45

Resolver el sistema

$$\frac{1}{1 - x + y} - \frac{1}{x + y - 1} \quad \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{1-x+y} - \dfrac{1}{1-x-y}} = \frac{3}{4}$$

46

En la ecuación $x^2 - (m + 2)\, x + 2m + 1 = 0$, estudiar la clase y signo de las raíces. Calcular una de las raíces en función de la otra y buscar los valores de m, para los cuales la relación de las raíces vale $8/5$; en este último caso se calcularán las raíces.

47

Resolver la ecuación $x^2 - (5m - 1)\, x + 10m = 0$, sabiendo que la diferencia de las raíces vale 5.

48

Formar la ecuación de segundo grado cuyas raíces son las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} \log^x 25 &= \log^y 4 \\ x.y &= 10.000 \end{aligned}\right\}$$

49

Dada la progresión geométrica decreciente cuyo primer término es a y la razón q, designando por S_1, S_2, S_3, ... las sumas de n términos sucesivos de esta progresión, comenzando en el primer término para S_1, en el segundo S_2, etc. calcular:

1.º Cada una de las sumas S_1, S_2, S_3, ...

2.º $\lim_{n \to \infty} (S_1 + S_2 + S_3 + \dots S_n)$.

50

Suponiendo que en un país el número de defunciones se eleva anualmente a $\frac{1}{42}$ de la población, y el de nacimientos a $\frac{1}{35}$, ¿al cabo de cuánto tiempo la población de este país se incrementará en su mitad?

51

Una persona ingresa en un banco una cantidad c al comienzo de cada año durante n años consecutivos. Se desea saber:

1.º Qué cantidad a debe recibir al comienzo de cada año durante los $2n$ años siguientes para quedar enteramente reembolsado de sus entregas. La tasa es r por una peseta.

2.º Cuál debe ser el valor de n para que las cantidades a y c sean iguales.

52

Una persona impone un capital C al 4 por 100 de interés simple. Al cabo de cuatro años retira capital e intereses y emplea este dinero en la compra de títulos de la Deuda del 4 por 100, que se cotizaban a 80, obteniendo de este modo una renta anual de 18.560 pesetas.

Calcular C, sabiendo que los intereses de los títulos están sujetos a un descuento de un 20 por 100.

53

Se ha comprado un objeto que se ha vendido después por 42 pesetas, y se ha obtenido una ganancia igual al 14 por 100 del precio de compra, más el 5 por 100 del precio de venta. ¿Cuánto costó?

54

Sabiendo que log. 2 = 0,30103, resolver la ecuación:

$$\log. 8^{\log x} - \log. 2^{\log x} = \log. x^x.$$

55

Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de razón 2. Se pide:

1.º Sus medidas.

2.º Los radios de las circunferencias inscrita y exinscrita correspondientes al lado b y a las prolongaciones de a y c.

3.º La distancia entre los centros de esas circunferencias.

56

Un turista, al llegar a España, contrata con una agencia varias excursiones por 12.000 pesetas, que abona mediante 200 dólares más 43.200 francos. Por causas no previstas no se pueden realizar todas las excursiones, por lo que la agencia le adeuda 5.100 pesetas, que abona devolviéndole 50 dólares y un pasaje en un buque italiano por valor de 48.000 liras.

Sabiendo que tres francos equivalen a cuatro liras, se piden los cambios empleados.

57

Siendo A y B números enteros proporcionales a 3 y 7, tales que su m.d.c multiplicado por su m.c.m. es igual a 21.504, calcular:

1.º A y B.

2.º $\text{Log}_2 (B - A)$.

3.º La suma de los términos de la progresión geométrica que tiene por tercer término A y por séptimo B.

58

La diferencia entre el descuento comercial y el descuento matemático de una letra de 101.000 pesetas, ambos al r por 100, que vence dentro de p días, es de 10 pesetas. Calcular los dos descuentos y los valores efectivos.

Hallar la fecha del vencimiento de la misma letra si el descuento se hace al 4 por 100.

59

Las longitudes de los lados de un triángulo, medidas en metros, forman una progresión geométrica,; el menor de los lados mide 60 m. y el perímetro 285 m., se pide: 1.º Hallar los otros dos lados b y c. 2.º Hallar cos A y sen A. 3.º Determinar el valor del radio del círculo circunscrito. 4.º Hallar el área.

60

La sucesión $a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots a_n$ es tal que los logaritmos de sus términos están en progresión aritmética de razón 2. Se sabe además que el cociente de los términos a_4 y a_2 vale 81, y que la suma de los seis primeros términos es 33.215. Se pide hallar: 1.º La base de los logaritmos; 2.º Comprobar que dicha sucesión es una progresión geométrica; 3.º Cuánto valen la razón de la progresión geométrica y el primer término.

61

El coeficiente del término en que aparece la diecisieteava potencia de x en el desarrollo de $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{19}$ es en pesetas la suma de capital e intereses a que ha ascendido una cantidad desconocida prestada durante dos años al 3 por 100. Calcular dicha cantidad.

62

Un capital desconocido ha sido colocado a interés simple a un tanto por ciento también desconocido. A los cinco meses el capital y los intereses reunidos ascendían a 12.852 pesetas, mientras que a los once meses de concertada la operación la suma de capital e intereses alcanzó la cantidad de 13.154,40 pesetas. Determinar el capital y el tanto por ciento.

63

Una persona ha tomado prestada una suma a interés simple a una cierta tasa. Si hubiese saldado la cuenta a los nueve meses hubiera tenido que pagar 10.711,25 pesetas. Se libera de la deuda al cabo de quince meses, pagando 11.018,75 pesetas. Averiguar la suma prestada y el tanto por ciento.

64

La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente ilimitada es el logaritmo de 16 en un sistema de base 8, y su primer término $\frac{1}{4}$. Calcular la razón de la progresión.

65

La diferencia de los dos últimos términos de una progresión geométrica es 448 y la diferencia de sus logaritmos en el sistema de base 32 es $\frac{1}{5}$.

Calcular el número de términos de la progresión y su razón, siendo 7 el primero.

66

Sin tablas, y supuestos logaritmos decimales, calcular el valor de A para que la siguiente ecuación tenga dos raíces, cuyo producto sea -15, y resolver dicha ecuación: $\frac{\log(x^3-A)}{\log(x-2)}-2\log 5=\log 40.$

67

El radio de una circunferencia es de 10 m. y se le inscribe un triángulo equilátero, al cual se le inscribe otra circunferencia, y a ésta se le inscribe otro triángulo equilátero, y así sucesiva e indefinidamente, alternando circunferencias y triángulos inscritos. Calcular:

1.° La suma de las longitudes de las infinitas circunferencias así construídas.

2.° La suma de los infinitos perímetros de los triángulos así obtenidos.

3.° Suma de áreas de los infinitos círculos.

4.° Suma de áreas de los infinitos triángulos.

68

En un exágono regular de un metro de radio se inscribe otro exágono, tomando como vértices los puntos medios de los lados del primero. En este segundo se toman los puntos medios de sus lados como vértices de un tercer exágono, y así sucesiva e indefinidamente. Calcular:

1.° La suma de todos los perímetros de los infinitos exágonos así obtenidos.

2.° La suma de sus infinitas áreas.

69

En un metro cuadrado se inscribe otro cuadrado con sus vértices en los puntos medios de los lados. Luego se toman los puntos medios de los lados de este segundo cuadrado como vértices de un tercer cuadrado, y así sucesiva e indefinidamente. Calcular:

1.° La suma de las infinitas áreas de los cuadrados.

2.° La suma de sus infinitos perímetros.

70

¿Qué es más ventajoso, comprar Deuda del 4 por 100 al cambio de 93, o bonos del Tesoro de 3,5 por 100 al cambio de 80, y cuál será la economía si se quiere conseguir una renta anual de 10.000 pesetas?

71

1.° Resolver la ecuación $2 \log x = \log 192 + \log 3 - \log 4$.

2.° Resolver el sistema

$$\log x + \log y = 3$$
$$x + y = 110$$

72

1.° Calcular, sin tablas, los logaritmos decimales de los números 8, 1,25, $(0,64)^3$. Dato: $\log 2 = 0,301030$.

2.° Hallar, sin tablas, la característica de $\log_6 725$.

73

Se tiene una pila de naranjas de base rectangular, en la que cada capa se forma colocando una naranja en el hueco que dejan cuatro naranjas de la capa inferior, continuando así hasta llegar a una capa formada por una sola fila de naranjas. Las filas de la capa más inferior tienen m y n naranjas, siendo m la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $(x-2)/(x-2) = x/3$; n es el menor número que aumentado en una unidad da un múltiplo de los seis primeros números. ¿Cuántas naranjas tenía el montón?

74

El descuento comercial de una letra ha sido de 101 pesetas, y el descuento racional de la misma, en iguales condiciones de rédito y tiempo, hubiera sido de 100 pesetas.

1.º Hallar el valor nominal de la letra, suponiendo un valor cualquiera para el rédito.

2.º Observar que, aunque se varíe el rédito, el nominal de la letra sería el mismo.

3.º Explicar la razón de este hecho.

75

Determinar el valor del número h, de tal modo que la función

$$y = \frac{h + 3x - x^2}{x - 4}$$

tenga un máximo y un mínimo cuya diferencia sea 8 unidades. Estudiar en este caso la variación de la función.

76

Un recipiente tiene la forma de un cilindro limitado por un extremo por una base plana y por otro por una semiesfera.

El área de la superficie total es constante. ¿Cuál ha de ser la razón del radio de la base a la altura de la parte cilíndrica para que el volumen sea máximo?

77

El afijo del complejo $2 + 3i$ es un vértice de un cuadrado con centro en el origen. Hallar: 1.º, los números complejos cuyos afijos son los otros tres vértices; 2.º, el área del cuadrado.

78

En el plano de los números complejos, sea A el afijo de $3+i$. Se pide:

1.º El número complejo correspondiente al afijo B simétrico de A respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

2.º El número complejo y su afijo C de la suma A + B.

3.º El área del cuadrilátero OACB.

4.º El volumen del cuerpo que engendra la quebrada OAB al girar alrededor de OC. (Unidad el cm.)

79

Dados los números complejos $2+3i$, y $1-2i$, se pide hallar:

1.º) los números complejos producto y cociente del primero por el segundo.

2.º) el número complejo cuyo afijo forma con los afijos de los complejos hallados en la pregunta anterior un triángulo rectángulo isósceles.

80

Hallar el área del cuadrilátero ABCD que tiene como vértices A y B los puntos representativos de las raíces de la ecuación $x^2-10x+50=0$, siendo los C y D los correspondientes a los valores de

$$\sqrt{-2+2i\sqrt{3}}.\ \text{(Unidad el cm.)}$$

81

Calcular el perímetro, el área y las coordenadas de los vértices del triángulo cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[3]{-64}$.

82

Hallar dos números complejos cuya diferencia es real, su suma tiene de parte real 2, y su producto vale: $-51+8i$. Calcular además el área del triángulo cuyos vértices son los afijos de estos dos vectores y el origen de coordenadas.

83

Resolver la ecuación:

$$x^2+(2-i)\ x-(3+3i)=0.$$

dibujar los afijos de las raíces y los vectores correspondientes. Suma, diferencia, producto y cociente de estos vectores.

84

Dada la cantidad compleja $\dfrac{1+ia}{1-ia}$: 1.º) demostrar que su módulo es la unidad; 2.º) sabiendo que su argumento es $\operatorname{arctg} \dfrac{3}{4}$, determinar a.

85

Hallar y representar gráficamente un número complejo que sumado con su recíproco dé la unidad real.

86

1.º) Calcular, y después representar gráficamente, las raíces cuartas de 1.

Los afijos de las raíces son vértices de un polígono. Dibujar este polígono.

2.º) Hacer lo mismo para las raíces cuartas de -1. La representación gráfica se hará sobre el mismo sistema cartesiano utilizado para el apartado 1.º).

3.º) Calcular el área de la estrella de ocho puntas que resulta de los apartados 1.º) y 2.º).

87

Calcular en forma binómica los números complejos raíces de la ecuación $(x+yi)^3 = 27$. Hallar el volumen del tetraedro regular cuya base es el triángulo formado por los afijos de dichas raíces.

88

Sea la curva de ecuación $y = \dfrac{x}{1-x^2}$.

Calcular: *a*) Las coordenadas de los puntos de la misma en que las tangentes forman ángulo de 45º con la parte positiva del eje de abscisas.

b) La ecuación de una de dichas tangentes, que no lo sea en el origen.

c) La ecuación de la perpendicular a ella en el punto de tangencia; y

d) El área del triángulo formado por las anteriores dos rectas y el eje de coordenadas.

89

Sean las curvas de ecuaciones $y = \dfrac{x^2}{4}$ e $y = \dfrac{8}{x^2+4}$.

a) Calcular las coordenadas de sus puntos comunes;

b) las ecuaciones de las tangentes a cada una de dichas curvas en uno cualquiera de los puntos comunes;

c) el ángulo de estas tangentes;

d) el área del triángulo formado por aquéllas y la recta de ecuación $x + y - 10 = 0$.

90

La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional a su anchura y al cuadrado de su espesor también. ¿Cuántas son las dimensiones de la sección de la viga de máxima resistencia que puede obtenerse de un tronco cilíndrico cuya circunferencia mide "*c* metros cuadrados"?

91

Encontrar la derivada de la función $y = \text{arc tang}\,\dfrac{1 + x}{1 - x}$.

Comprobar que es igual a la de $y = \text{arc tang}\, x$.

Estas dos funciones difieren, por tanto, en una constante. Hallar esta constante.

92

Se considera la función $y = \sqrt{x^2 - 7x + 6}$ y se pide: 1.º Valores de la variable independiente para los que está definida la función; 2.º máximos y mínimos; 3.º Puntos en que la tangente es vertical.

93

Se da la curva representada por la función $y = \text{sen}^2\, x$, y se pide: 1.º Máximos y mínimos; 2.º Entre qué valores de la variable es creciente la función; 3.º Abscisas de los puntos en que la tangente forma ángulo de 45º con el eje OX.

94

¿Para qué valores de *m* es siempre creciente la función: $y = \dfrac{x + 3}{mx^2 + 5}$?

95

Dadas las curvas $y = \sqrt{4x - 5}$ e $y = \frac{1}{2}\sqrt{45 - 4x^2}$, calcular: 1.º Las coordenadas del punto o puntos de intersección; 2.º El ángulo que forman las tangentes a ambas curvas en uno de dichos puntos.

96

Dada la curva $y = x^3 - 6x^2 + 15x - 8$. Se pide:

1.º Hallar las coordenadas de los puntos A y B de ella en los que la tangente es paralela a la recta $y = 6x - 5$;

2.º Determinar la ecuación de la recta AB; y

3.º Hallar las coordenadas de sus puntos de inflexión, si existen.

97

Dada la función $y = \frac{1}{8} \text{ L } \frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}$. Se pide:

1.º Hallar las coordenadas de los puntos en que la curva corta al eje de abscisas.

2.º Calcular su derivada simplificada; y

3.º Representar gráficamente esa función derivada.

98

Un campo tiene la forma de un sector circular de perímetro 300 metros. Sabiendo que su área es máxima, se pide:

1.º El valor del radio R.

2.º La medida del ángulo del sector, en grados, minutos y segundos sexagesimales.

99

Obtener los máximos , mínimos y puntos de inflexión de la función

$$y = 8x^3 - 27x^2 + 27x - 10.$$

Las abscisas del máximo, mínimo e inflexión son, respectivamente, los radios de las dos bases de un tronco de cono de revolución y la altura del mismo, medidas en metros; hallar el volumen y el área lateral del tronco de cono.

100

La ecuación horaria de un movimiento es $e = 3t^5 - t^3 + 2$; se pide hallar:

1.º) los valores de t que corresponden a los instantes de aceleración máxima y velocidad mínima;

2.º) el valor de t en el momento en que la velocidad del móvil es de 4,224 m. por seg.

101

Dada una circunferencia de radio 4 cm., se traza desde un punto fijo exterior a ella una secante con la condición de que el área del triángulo que tiene por vértice el centro de la circunferencia y los dos puntos en que la secante corta a la misma sea máxima. Se pide hallar dicha área.

102

La cerca de un solar cuesta a 75 ptas. el metro lineal, y se desea adquirir un solar de forma rectangular de superficie 25 áreas, con la condición de que el coste de la cerca sea mínimo. Se pide hallar cuánto nos costará dicha cerca.

103

Dada una esfera de 3 metros de radio, hallar:
1.º Los elementos del cono inscrito de volumen máximo.
2.º El volumen y la superficie total de este cono.

104

Hallar la ecuación de una tangente a la curva representada por la función $y = \frac{1}{5}\sqrt{64 + x^2}$, perpendicular a la recta $25x + 6y = 30$. Calcular también el área del triángulo que esta recta determina con dicha tangente y el eje X. (De las dos soluciones que resultan para el punto de tangencia, tómese la de abscisa positiva.)

105

Supuestos logaritmos neperianos, hallar:
1.º El intervalo en que está definida la función:

$$y = \log \frac{6 + x - x^2}{4}.$$

2.º Máximo de la función.
3.º Puntos de intersección con el eje X.
4.º Ecuación de la tangente a la curva en el punto de intersección con el eje X que tiene su abscisa negativa.

106

¿Qué valor tendremos que darle a los coeficientes a y b para que la función

$$y = x + a + \frac{b}{x}$$

tenga su valor máximo de 80 unidades y su mínimo de -16?

107

Hallar las coordenadas del mínimo de la función $y = x^2 - 4x - 5$ y el área del triángulo limitado por el eje X y las tangentes a la curva dada en sus puntos de intersección con el eje X. (Unidad el cm.)

108

De todos los conos de revolución que tienen la misma generatriz $a = 3$ m. hallar el volumen del que lo tiene máximo.

109

Hallar los máximos y mínimos de la función: $y = \dfrac{2x - 7}{x^2 + 8}$.

110

En la curva $5x^2 - xy + 4 = 0$, determinar las tangentes paralelas a la recta $x - y + 3 = 0$.

111

El Reglamento de Correos de Inglaterra autoriza paquetes cuya suma de longitud y contorno no exceda de 6 pies. ¿Cuál es el mayor volumen de un paquete que se puede enviar por correo?

Nota: Supóngase los paquetes de forma de cilindros de revolución.

112

Dada la curva $y = \dfrac{17}{6} x^2 + 4x + 3$, hallar dos puntos cuyas abscisas difieran en tres unidades, en los cuales las tangentes sean perpendiculares entre sí.

113

La baraja española tiene 48 naipes. Se sacan dos cartas y se pide calcular: 1.º La probabilidad de que sean del mismo palo; 2.º La probabilidad de que sean dos figuras; 3.º La probabilidad de que sean dos naipes determinados (por ejemplo, el 7 de espadas y el 3 de copas, en este orden).

114

¿Cuántos números de cinco cifras no repetidas pueden formarse, que tengan dos cifras pares y tres impares?

115

En una urna hay cinco bolas numeradas del 1 al 5, siendo blancas las 1, 2 y 3, y negras las 4 y 5. Se pide:

1.º Probabilidad de que al sacar dos bolas (de una vez) salgan de igual color. Idem de distinto color.

2.º Probabilidad de que al sacar dos bolas la suma de sus números sea par.

3.º Probabilidad de que al sacar dos bolas sean de *igual color y suma par*. Idem de *distinto color y suma par.*

116

Calcular la suma de todos los números de cinco cifras diferentes que se pueden escribir con sólo las cifras impares, sin repetir en cada número ninguna cifra.

117

Se deben distribuir 15 bolas, numeradas de 1 a 15, en tres urnas, de modo que en la primera haya 8 bolas, en la segunda 4 y en la tercera 3.

¿De cuántos modos es posible la distribución? Comprobar que es indiferente el orden en que se haga la distribución (por ejemplo: 3 en la primera, 8 en la segunda y 4 en la tercera.

118

Las calles de una ciudad forman una cuadrícula y se designan por 1, 2, 3, ..., las que van de N. a S., y por A, B, C, ..., las que van de E. a W. ¿Cuántos caminos distintos de longitud mínima pueden seguirse para ir del cruce de las calles A, 1 al cruce de las calles D, 7?

119

¿En cuántos puntos se cortan cinco rectas de un plano, entre las cuales no existen paralelas entre sí, ni tampoco tres rectas concurrentes?

120

Se tienen 10 bolas diferentes, numeradas de 1 a 10, ¿de cuántas maneras se pueden colocar en tres urnas de modo que entren 5 en la primera, 3 en la segunda y 2 en la tercera? ¿De cuántas maneras se podrán disponer en las tres urnas de modo que entren 5 en una, 3 en otra y 2 en otra, sin precisar su orden?

121

Con las seis cifras 1, 2, 3, 4, 5, 9, ¿cuántos números de seis cifras diferentes se pueden formar que sean múltiplos de 11? ¿Cuál es el menor?, ¿cuál es el mayor?, ¿cuánto vale la suma de todos ellos?

122

Con las cifras 2, 3, 0, 5, 7, ¿cuántos números diferentes de cinco cifras se pueden formar? Si prescindimos de los que empiezan por 0, ¿cuántos quedan?, ¿cuánto vale la suma de todos éstos? (Considérense primero números de cifras distintas y, segundo, cifras que puedan repetirse.)

123

Calcular x e y sabiendo que en el desarrollo ordenado de $(x + y)^4$ la suma de los términos segundo y cuarto es 2.040 y su diferencia 960.

124

Uno de los lados de un triángulo mide 14 m. y el radio de la circunferencia circunscrita 7 m., y uno de los ángulos adyacentes al lado dado es de 15°. Calcular: 1.° Los lados y ángulos del triángulo; 2.° El radio de la circunferencia inscrita.

125

Un triángulo rectángulo tiene el ángulo B de 60°; se halla el centro I, del círculo inscrito, y los simétricos I_a, I_b, I_c de dicho centro respecto de la hipotenusa a y de los catetos b y c, respectivamente. Se pide, dado el radio r de la circunferencia inscrita al triángulo, hallar los lados del mismo, y los segmentos $I_a I_c$ e $I_c I_b$; hallar también los ángulos del triángulo $I_a I_b I_c$.

126

Los lados de un trapezoide ABCD miden AB = 3'8, BC = 5'7, CD = 6 y DA = 2'8; la diagonal DB mide 6'3; llamemos M, N, P, Q, a los puntos medios de cada uno de estos lados.

1.° Dibujar la figura.

2.° Demostrar que el cuadrilátero MNPQ es un paralelogramo.

3.° Hallar la relación existente entre las áreas del paralelogramo MNPQ y del trapezoide; esta relación se determinará sin hallar las áreas de estos polígonos.

127

Dos poleas de diámetro 1,75 m. y 1 m. cuyos centros distan 4 m. están unidas por una correa que transmite el movimiento de una a otra. Se pide hallar la longitud de la correa.

128

Recorriendo una distancia de 2.730 metros, las ruedas delanteras de un vehículo dan 392 vueltas más que las traseras. Si se aumentan las circunferencias de cada rueda en 0,30 metros, las ruedas de delante no darán más que 325 vueltas más que las de detrás en el mismo recorrido. Calcular las longitudes de cada rueda.

129

1.º Calcular los lados de un triángulo rectángulo, conociendo el perímetro $2p$ y la superficie S.

2.º Aplicación numérica al caso, $2p = 62{,}4$ m. y $S = 1{,}6224$ m².

130

Sobre cada lado de un exágono regular, y exteriormente, se construye un cuadrado.

1.º Demostrar que los vértices de los cuadrados obtenidos, distintos de los vértices del exágono, determinan un dodecágono regular.

2.º) Siendo l el lado del dodecágono, hallar su apotema y el radio de la circunferencia circunscrita.

131

Las proyecciones de los dos catetos de un triángulo rectángulo sobre la bisectriz del álgulo recto miden 16,20 m. y 15,45 m. Hallar los lados y ángulos del triángulo. (Para el cálculo de ángulos, utilícense tablas.)

132

El perímetro de un rectángulo es $2p$ cm. Se pide:

1.º Calcular sus dimensiones en función de p, sabiendo que si aumentamos una de ellas en 5 cm. y disminuímos la otra en 3 cm. el área disminuye en 130 cm. cuadrados.

2.º ¿Entre qué valores puede variar p para que el problema sea posible?

3.º ¿Existirá algún valor de p para el cual el rectángulo sea un cuadrado?

133

Los catetos de un triángulo rectángulo son entre sí como 3 es a 4 y el área vale 600 cm². Calcular el perímetro del triángulo, los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita en el mismo y los segmentos en que la bisectriz interior del ángulo recto divide a la hipotenusa.

134

Sea M el afijo de un número complejo, y sean R_1 y R_2 los afijos de sus dos raíces cuadradas. Considérese el triángulo M R_1 R_2. Se pregunta:

1.º ¿Cuál es el lugar de M para que el triángulo sea isósceles?

2.º ¿Cuál es el lugar de M para que el ángulo M sea recto?

3.º Determinar M para que el triángulo sea equilátero.

135

Una viga de 6 m. de largo se apoya en sus extremos A y B. Su peso es de 10 kg. por m. y tiene una carga de 90 kg. en un punto distante 2 m. del apoyo A. Se pregunta:

1.º ¿Las reacciones en los apoyos A y B?

2.º ¿Qué distancia debería desplazarse el apoyo B, hacia el A, para que las reacciones fueran iguales?

136

Una circunferencia se halla dividida en 24 partes iguales mediante los puntos 1, 2, 3, ..., 23, 24. Se pide:

1.º Explíquese qué clase de polígonos resultan al unir los puntos de división de 1 en 1, de 2, de 3 en 3, etc., hasta de 11 en 11, en cada caso.

2.º Angulo que forman entre sí las rectas 1-4 y 8-18. Idem las 1-12 y 5-19.

3.º Area de triángulo formado por los puntos 1, 5 y 15 en función del radio R.

137

Sean AC y BD dos cuerdas de una circunferencia que se cortan en el punto interior P.

$$PA = 4 \quad ; \quad PC = 20 \quad ; \quad BD = 21$$

Se pregunta:

1.º Calcular los segmentos PD y PB.

2.º Calcular la cuerda mínima que pasa por P.

3.º Suponiendo que el radio de la circunferencia sea 21, calcular la distancia de P al centro.

138

La distancia entre los centros de dos circunferencias es de 50 cm., y sus radios son de 15 cm. y 45 cm. Se pide:

1.º La longitud de las tangentes comunes (entre sus puntos de contacto).

2.º El área del trapecio formado por dichas tangentes y las cuerdas que unen los puntos de contacto.

3.º Calcular los dos segmentos en que la cuerda común divide a la distancia de los centros.

139

Sea un trapecio rectángulo de altura 12 cm., cuyas diagonales miden 15 cm. y 20 cm. Se pide:

1.º Area del trapecio.

2.º Distancias del punto de intersección de las diagonales a las bases.

3.º Segmento de paralela media entre las diagonales.

140

Sin tablas, calcular la longitud de la correa de transmisión que enlaza dos ruedas de radios 0,7 m. y 0,2 m., siendo la distancia de sus centros un metro.

141

Las bases de un trapecio isósceles miden 40 m. y 70 m. y cada uno de los otros dos lados 39 m. Estos se dividen en tres segmentos iguales, y por los puntos de división se trazan paralelas a las bases. Calcular: 1.º Altura del trapecio. 2.º Longitud de cada una de estas paralelas intermedias. 3.º Area de cada uno de los tres trapecios en que se descompone el dado.

142

Un trapecio isósceles tiene un ángulo de 60°; su base menor es igual a la suma del par de lados no paralelos, y su base media mide 20 cm. Calcular:

1.º La longitud de cada uno de sus cuatro lados.

2.º Su altura y área.

3.º La longitud del segmento de base media comprendido entre sus diagonales.

4.º Distancia del punto de intersección de las diagonales a cada base.

143

El diámetro de una circunferencia mide 12 m. y se divide en tres segmentos iguales. Calcular:

1.º La longitud de la cuerda perpendicular a dicho diámetro trazada por uno de los puntos de división P.

2.º La potencia de dicho punto P respecto de la circunferencia.

3.º Longitud de cada uno de los lados del cuadrilátero cuyos vértices son los extremos de dicha cuerda y diámetro.

4.º El coseno de cada uno de los ángulos de dicho cuadrilátero.

144

Los puntos medios de los lados de un rombo son vértices de un rectángulo de 92 cm. de perímetro. Sabiendo que una diagonal del rombo mide 32 cm., hallar la longitud del lado del rombo.

145

Uniendo alternadamente los vértices de un octógono regular se obtienen dos cuadrados cuya intersección es otro octógono regular. Calcular radio y apotema de éste en función del radio de aquél.

146

Calcular, en función de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, el ángulo que forman la altura y la mediana correspondiente al ángulo recto.

147

Si desde los extremos de un diámetro de una circunferencia se trazan las perpendiculares sobre una secante, los segmentos de ésta comprendidos entre las intersecciones de la secante con la circunferencia y los pies de las antedichas perpendiculares son iguales.

148

Si de un triángulo se dan un lado y el ángulo opuesto, determinar los lugares geométricos de los puntos medios de los otros dos lados.

149

Kochanski ha rectificado la circunferencia del siguiente modo: En la circunferencia se dibuja un diámetro AC y la tangente en el extremo C. Se traza el radio que forma con el OC un ángulo de 30° y se prolonga hasta que corta a la tangente anterior en el punto D. A partir de D y en el sentido DC se toma sobre la tangente una longitud DP igual a tres veces el radio. Demostrar que el segmento AP es aproximadamente la longitud de la semicircunferencia.

150

Un polígono regular tiene un lado más que otro polígono regular. Los ángulos de ambos difieren en 4° sexagesimales.

1.°) ¿En cuántos difieren los ángulos exteriores de cada uno?
2.°) Calcular el número de lados de cada uno.
3.°) Calcular el número de diagonales de cada uno.

151

Entre los pueblos A y B hay una distancia de 75 Km.; de ellos parten dos autos hacia el pueblo C, que con A y B constituyen los vértices de un triángulo rectángulo en C. El auto que sale de A tarda 30 minutos en llegar a C, y el que sale de B tarda 2 horas en su viaje a C. La razón de las velocidades de los autos de A y de B es 7/6.

Se pide calcular las distancias de A y B al pueblo C, así como las velocidades de los autos.

152

Una persona está a 100 metros de la porción rectilínea de un río y a 500 de un pueblo al cual se dirige, que dista 500 metros del río; el terreno es llano y piensa bañarse acercándose al río.

¿En qué punto del río deberá hacerlo para que el camino recorrido en total para ir al pueblo sea mínimo?

153

Se tiene un triángulo ABC, rectángulo en A, y la altura AH. Si BH = 3,6 m. y CH = 6,4 m. calcular: 1.º Las longitudes de los lados. 2.º Las distancias del punto H a los lados. 3.º El radio del círculo inscrito.

154

Construir el cuadrilátero inscriptible ABCD, conociendo:

$$\widehat{A}\,, \quad \widehat{ABD}\,, \quad \overline{AD}\,, \quad \overline{BD}\,.$$

155

1.º Construir un trapecio conocidos sus cuatro lados.

2.º Demostrar que la paralela a las bases de un trapecio, trazada por el punto de intersección de sus diagonales, queda dividida por éste en dos partes iguales.

156

Dados, en un sistema de ejes coordenados ,los puntos A(—4, 3) y B(2, —5), con la regla y el compás, trazar por el punto A dos rectas cuyas distancias al punto B sean ambas de 5 unidades, y calcular el ángulo que forman dichas rectas.

157

Se da una circunferencia de 7 m. de radio y un punto P que dista 15 metros del centro de la circunferencia: 1.º Trazar por P una secante tal que el segmento de la misma interceptado por la circunferencia sea visto desde el centro bajo un ángulo de 120º. 2.º Calcular el área del menor de los segmentos circulares determinados en la circunferencia por la secante trazada. 3.º Calcular las distancias del punto P a los de intersección de la secante con la circunferencia.

158

Calcular el volumen engendrado por un hexágono regular de 6 m. de lado al girar alrededor de uno de sus lados.

159

Se dan dos conos de revolución, cuya base común es una circunferencia de radio r, y cuyas alturas miden h y 2h. Hallar a qué distancia de la base se debe trazar un plano paralelo a la misma, de forma que el área de la corona circular comprendida entre ambos conos sea lo mayor posible.

160

Se da un octaedro regular hueco, de 5 cm. de arista, con una diagonal vertical. En su interior se vierten 30 cm^3 de agua, y se pregunta: 1.º ¿Qué altura alcanzará el líquido en el interior? 2.º ¿Cuál será el área de la superficie libre del líquido?

161

De un triángulo ABC rectángulo en A, se conocen $BC = 14$ cm y $C = 15^{\circ}$. Calcular el área de los dos segmentos circulares que la altura relativa a la hipotenusa, prolongada convenientemente, determina sobre la circunferencia circunscrita al triángulo.

162

Una pirámide tiene por base un triángulo ABC rectángulo en A, en el que $AB = 15$ cm. y tg. $\widehat{ABC} = 4/3$. La arista VB es perpendicular al plano de la base y la arista VC mide 65 cm. Calcular:

1.º El área total de la pirámide.

2.º El volumen del cono que proyecta desde V la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

163

Una finca de forma de trapecio isósceles, cuyas bases miden 140 m. y 100 m., siendo su altura 90 m., es atravesada por un camino de 7 m. de ancho cuyo eje coincide con una de las diagonales del trapecio. Se pide cuánto habrá costado la expropiación del terreno ocupada por el camino, si se ha pagado a razón de 600 pesetas el área.

164

Una perforadora de madera hace un agujero de 48 mm. de diámetro, girando la broca a una velocidad de 225 vueltas por minuto y siendo el avance de 0,4 mm. en cada vuelta. Calcular cuántos dm^3 de madera habrá sacado en una hora.

165

Un pozo tiene la forma de un prisma exagonal regular y el espesor de la capa de agua es de 1,20 m. Se cae al pozo una piedra de forma cúbica de 60 cm. de arista y el agua sube de nivel 24 mm. Hallar el número de litros de agua que contiene el pozo.

166

Calcular:
1.º El área del exágono cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas del número —64, efectuando el correspondiente dibujo.
2.º El volumen engendrado por el exágono al girar 180 grados alrededor del diámetro determinado por 2 vértices opuestos.

167

La suma de las diagonales de un rombo es 18,4 m. y su razón es 8/15. Calcular: 1.º Las diagonales y el perímetro. 2.º El área y el radio del círculo inscrito. 3.º El área y el volumen del sólido que se obtiene haciendo girar el rombo alrededor de su diagonal mayor.

168

Un cono de revolución tiene una generatriz de 10 metros. ¿Por qué punto de ésta se ha de trazar un plano paralelo a la base para que el volumen del cono deficiente sea 1/7 del tronco de cono resultante?

169

Desde un punto situado a 25 cm. del centro de una esfera de 15 cm. de radio se traza la superficie cónica tangente a la esfera. Calcúlese el área total y el volumen del cono limitado por el círculo de contacto.

170

Un cono y un cilindro de revolución tienen la misma altura $\sqrt{3}$ metros e igual área total y volumen. Hallar los radios de las bases.

171

Dados un cono de revolución y una esfera que tienen igual área total, y siendo de 3 metros el radio de la esfera y el de la base del cono, calcular: 1.º, el lado del cono; 2.º, los volúmenes de ambos cuerpos.

172

Un depósito cónico de 120 cm. de altura y 20 cm. de radio básico, está apoyado por su base en un plano horizontal. En esta posición, el líquido en él contenido alcanza hasta 1/5 de la altura del cono. Calcular la altura que alcanzará el líquido cuando se invierta la posición del depósito quedando el vértice hacia abajo.

173

Sea un exágono regular de lado l.

Calcular:

1.º El volumen engendrado por dicho exágono al girar según un eje que pasa por dos vértices opuestos.

2.º Según un eje que pasa por los puntos medios de dos lados opuestos.

174

Un cono tiene el área lateral doble que el área de la base.

Se pregunta:

1.º Hallar el ángulo del desarrollo de la superficie lateral.

2.º Hallar el radio de la base sabiendo que el número que expresa su volumen en cm^3 es el mismo que expresa su área total en mm^2.

175

Calcular el radio de la base, altura y volumen del cono de revolución cuya superficie lateral se desarrolla según un sector circular de 20 m. de radio y 216º de amplitud.

Supuesto el eje vertical y vértice en el fondo, cuál será la altura del agua cuando contenga la mitad de agua que si estuviese lleno.

176

De un bloque de hielo flotante en el mar emerge de la superficie de las aguas un volumen de 15 m^3. Sabiendo que las densidades del hielo y del agua del mar son 0,93 y 1,026, hallar:

1.º El volumen de la parte sumergida.

2.º El volumen que ocupará el agua de todo el hielo si se fundiera.

3.º La altura en milímetros que alcanzará este agua si la echamos en un cono de revolución invertido, cuyo ángulo en el vértice es recto.

177

En una pirámide exagonal regular se conoce el radio del círculo inscrito en la base: $r = \sqrt{3}$ m. y la altura de la pirámide: $h = 10$ m. Se pide: 1.º, área de la sección producida por un plano paralelo al de la base y que dista de ésta 4 m,; 2.º, volumen del tronco de cono comprendido entre dicho plano y la base.

178

En un cuadrado de 8 m. de lado se unen los puntos medios de los lados con los vértices opuestos y se forma así un octógono estrellado. Determinar. 1.º, la apotema de ese octógono; 2.º, el área de la estrella formada cuyos vértices son los del cuadrado y los puntos medios de los lados.

179

Calcular la superficie de una caldera cilíndrica terminada por ambos extremos en dos casquetes hemisféricos, siendo su longitud total de 2 metros y el diámetro 50 cm.

180

Hallar las dimensiones de una medida cilíndrica de madera de un Hl., sabiendo que según la ley el diámetro debe ser igual a la altura.

181

Con centro en cada uno de los vértices de un cuadrado de lado l se trazan cuatro arcos de círculo de radio l que unan los pares de vértices opuestos. Calcular el área de la parte común a los cuatro círculos.

182

El área total de un cubo es 96 cm². Calcular el área total del tetraedro regular obtenido tomando cuatro de sus vértices convenientemente.

183

Un terreno ha sido representado a escala 1/2500. Calcular en Ha., a. y ca. la superficie de un campo representado por un trapecio de bases 14 cm. y 21 cm. y altura de 10 cm.

184

De una parcela rectangular de 12×18 metros se separa en su contorno una franja de anchura uniforme de modo que el área del rectángulo central sea la mitad del total. Calcular la anchura de la franja.

185

Razón entre las áreas de una esfera y el cubo inscrito en ella. Razón entre los volúmenes de una esfera y el cubo inscrito en ella.

186

Calcular el volumen de un tetraedro que tiene por base el triángulo de lados a, m, c, y las otras tres aristas iguales a l.

187

En el cálculo de canales el trapecio sección no viene dado por sus bases y su altura, sino por la base menor a, la altura h y la inclinación o pendiente de la pared.

Así, por ejemplo, si la pendiente es 2 : 3, expresa que el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el lado oblicuo del trapecio, tiene un cateto vertical de longitud 2 y un cateto horizontal de longitud 3.

Demostrar las siguientes fórmulas prácticas para el área del trapecio.

Pendiente 1 : 1 área $= (a + h)\ h$.

Pendiente 2 : 3 área $= (a + 3/2\ h)\ h$.

188

Siendo a la longitud del eje de una caldera cilíndrica terminada en dos hemisferios exteriores, calcular las dimensiones de la parte cilíndrica, de modo que la superficie total de la caldera valga S.

189

Determinar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de un exágono regular de lado l alrededor de uno de sus lados.

190

Un prisma recto exagonal regular tiene por aristas laterales AA′, BB′, CC′, DD′, EE′ y FF′.

Calcular el área del polígono que resulta de cortar dicho prisma por el plano definido por las aristas paralelas AB y E′ D′ en el supuesto de que AA′ $= h$ y AB $= l$.

191

Se tiene un sector circular AOB de radio AO = 7 cm. y ángulo AOB = 30°. Con AO como diámetro se describe una semicircunferencia que corta a OB en un punto C. Hallar el área de ABC.

192

Un cono de 60º de abertura y con vértice en el centro de una esfera, intercepta en ésta un volumen de 127,233 cm³. Hallar el volumen de dicha esfera.

193

Dado un octaedro regular con una de sus diagonales verticales e igual a 5 dm., determinar: 1.º El volumen y el área del octaedro. 2.º La altura a que llegará el nivel de un líquido que se introduzca en su interior, supuesto hueco el octaedro, siendo 12 Kgs. el peso del líquido y 0,8 su densidad.

194

Calcular los radios R y r de las bases de un tronco de cono circunscrito a una esfera de radio a, sabiendo que el volumen del tronco es igual a dos veces el de la esfera.

195

Dada la altura h de un cono circular recto y el radio r de la base, determinar a qué distancia del vértice debe trazarse un plano paralelo a la base para que el área de la sección sea equivalente al área lateral del tronco de cono que resulta.

196

Al unir un vértice de un cuadrado con dos puntos situados en los lados que no pasan por él, y estos puntos entre sí, se obtiene un triángulo equilátero. Determinar su área. Aplicación: lado del cuadrado igual a 5 cm.

197

¿A qué distancia del centro de una esfera de radio igual a 5 cm. está situado un punto P, sabiendo que el cono circunscrito desde P tiene un volumen doble del cono que tiene por vértice el centro de la esfera y por base el círculo de contacto? Hallar los volúmenes de estos conos.

198

En el mismo sentido se prolongan los lados de un exágono regular, de lado a conocido, una cierta longitud x. Al unir estos puntos se obtiene un exágono de área doble que la del primitivo. Hallar x.

199

En una circunferencia de radio r se trazan dos diámetros AB y CD perpendiculares. Con centro en A y radio AB se traza un arco hasta que encuentre a AD. Con centro en B y radio BA se traza otro arco igual hasta que encuentre a BD. Haciendo centro en D se completa un óvalo. Hallar su longitud y su área. Aplicación: $r = 15$ cm.

200

Si a partir de los vértices de un triángulo equilátero de lado a se acortan los lados una cierta longitud x, y se unen los puntos obtenidos, se forma otro triángulo equilátero inscrito en el primero. Si el área del nuevo triángulo es 3/4 del primitivo, hallar x.

201

En un rombo de lado igual a 5 cm. y ángulo igual a 60° se inscribe un cuadrado (los vértices están sobre los lados del rombo). Hallar el lado de este cuadrado.

202

Si sobre los lados de un cuadrado del lado a se construyen cuatro triángulos equiláteros situados en el interior del cuadrado, se obtiene un rombo. Calcular el perímetro y el área de este rombo.

203

Un círculo menor de una esfera es la base de un cono, cuyas generatrices son tangentes a la esfera. El área lateral de este cono es $37{,}5\,\pi$ y el área del casquete esférico interior al cono es $25\,\pi$. Se pide hallar el radio de la esfera.

204

Dado el sistema:

$$\cos x \, . \, \cos y = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2$$

Se pide:

1.° Resolverlo, determinando las soluciones de x e y menores que $\frac{\pi}{2}$ radianes.

2.° Calcular el valor que toma para tales soluciones la expresión:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos y}$$

205

Sea el triángulo

$$a = 12 \text{ cm.}$$
$$B = 45^\circ$$
$$C = 75^\circ$$

1.º Calcular los lados b y c (sin tablas).
2.º Calcular el área (sin tablas).

206

Resolver, sin tablas, el triángulo que tiene un lado $a = 10$ m. y los ángulos B y C satisfacen al sistema de ecuaciones:

$$\text{sen } B + \text{sen } C = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos B + \cos C = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

207

Demostrar que si en un triángulo se cumple que:
$\text{sen}^2 A = \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C$, el triángulo es rectángulo.

208

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 18 cm., y uno de sus ángulos 30º. Calcular, sin tablas, los catetos y los radios de la circunferencia inscrita y circunscrita y los dos segmentos en que queda dividida la hipotenusa por la bisectriz del ángulo recto.

209

La secante de un cierto ángulo es igual a la suma del seno y el coseno. Hallar dicho ángulo.

210

La altura de una pirámide exagonal regular es igual al lado de la base. Calcular el coseno del ángulo que forman dos caras laterales contiguas.

211

Observando la altura de una torre desde tres puntos A B C alineados con su base, se obtienen ángulos α, 2α, 3α. Sabiendo que AB = 11 m. y BC = 5 m., calcular la altura de la torre.

212

Calcular α y β, sabiendo que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 1$ y $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$

213

Resolver el sistema:

$$\operatorname{tg}(x + y) = \sqrt{3}$$
$$\operatorname{tg}(x - y) = 1$$

214

Se da la fórmula

$$y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

1.º Simplificarla.
2.º Derivarla y simplificar el resultado.
3.º Derivar y simplificar el resultado obtenido en el apartado 1.º.

215

Determinar dos arcos cuya suma es igual a a y la suma de sus senos es igual a s.

Aplicar el resultado al caso en que $a = \dfrac{\pi}{2}$, $s = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

216

Dado un exágono regular ABCDEF de lado l y centro O; se traza por O la perpendicular VO al plano del exágono y se toma sobre ella un punto V, tal que el diedro VABO mida 60º. Calcular, en función de l, la distancia del punto V al plano del exágono y la del punto O al plano ABV.

217

Las coordenadas geográficas de un punto A de la superficie terrestre son:

Latitud: 30º N. Longitud: 20º E.

Análogamente las de otro punto B son:

Latitud: 30º N. Longitud: 153º E.

Suponiendo la tierra esférica, hallar:

1.º La distancia entre los puntos A y B.
2.º La diferencia entre las horas solares en los puntos A y B.
3.º Dibujar una proyección de la esfera terrestre donde pueda interpretarse el problema.

218

Dos puntos situados en el mismo paralelo de latitud 60° N. se encuentran sobre el mismo meridiano (diferencia de longitud 180°). Determinar: 1.° Su distancia siguiendo el paralelo. 2.° Siguiendo el meridiano (radio de la tierra = 6.370 km.).

219

La mínima distancia a que puede encontrarse un satélite artificial en su órbita alrededor de la tierra es, supongamos 200 km.

1.° Calcular el área del casquete terrestre que se divisará desde el satélite en ese momento.

2.° Supuesto un momento el satélite fijo sobre la vertical de Madrid a esa distancia mínima, ¿será visible toda la Península Ibérica si suponemos que Madrid sea su centro?

3.° ¿Cuál será la máxima distancia en km. medidos sobre el arco de círculo máximo —desde Madrid en los dos supuestos anteriores— al límite de la porción del área terrestre visible desde el satélite?

Nota: La Tierra se supone esférica y la longitud de su radio se deducirá de la definición vulgar de metro.

220

Sabiendo que la arista de un cubo mide 6 m., hallar la distancia de un vértice A al plano determinado por los tres vértices contiguos al vértice opuesto de A.

221

Dos puntos, A y B, de la superficie terrestre están situados en un mismo paralelo. El arco A B de este paralelo mide 100 km. y la hora en B tiene un adelanto de cuatro minutos respecto de la hora en A. Calcular la latitud de estos puntos.

(Se supone la Tierra esférica y la circunferencia máxima de 40.000 km.)

222

La superficie de un tetraedro regular mide $4\sqrt{3}$ cm². Calcular: 1.°, su arista; 2.°, volumen, y 3.°, radio de la esfera tangente a las aristas.

223

Sea un tetraedro regular de arista $a = 10$ cm.
Calcular:
1.° La altura de una cara.
2.° La altura del tetraedro.

3.º La distancia entre los puntos medios de dos aristas opuestas.
4.º La relación entre el volumen del tetraedro y el del tetraedro que tiene por vértices los centros de las caras.

224

Dígase razonadamente:
1.º Si por una recta cualquiera del espacio pasan planos verticales.
2.º Si por una recta cualquiera pasan planos horizontales.
3.º Si un plano cualquiera contiene rectas horizontales; ídem verticales.
4.º Si dados un punto P y dos rectas a y b que se cruzan, existe una recta que pase por P y corte a las a y b.
5.º Si dados dos planos y un punto P fuera de ellos, existe una recta que pase por P y sea paralela a los dos planos.

225

Sean los puntos A (4;6) y B (9;7).
1.º Hallar el área del triángulo que forman con el origen.
2.º Hallar la distancia entre sus proyecciones sobre la bisectriz del primer cuadrante.
3.º Hallar las coordenadas de los vértices C y D que forman un rombo con los A y B, de modo que A B sea una diagonal y el punto C se halle en el eje de las x.

226

Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado cuyo centro es M (8;4), siendo su área 50 y sus lados paralelos a las bisectrices de los ejes.
Considérense las rectas $y + 1 = m(x + 1)$ y dígase para qué valores de m se obtendrán rectas secantes al cuadrado.

227

Sea la curva $y = x^2 - 4x - 5$.
Se pide:
1.º Hallar los puntos en que corta el eje de las x.
2.º Hallar las ecuaciones de las tangentes a las curvas en estos puntos.
3.º Hallar la longitud del segmento que intercepta dichas tangentes en el eje de las y.

228

Sea la curva cuya ecuación es:
$$y = x^2 - 2x - 8$$
Se pide:
1.º Puntos de intersección con la recta $y = 2x - 3$.
2.º Ecuaciones de las tangentes en estos puntos de intersección.
3.º Puntos de intersección de dichas tangentes entre sí.

229

Sea la curva cuya ecuación es:

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$$

1.º Hallar la ecuación de la recta r que corta a la curva en los puntos cuyas abscisas son -2 y 4.

2.º Hallar las pendientes de la curva en estos dos puntos.

3.º Hallar las coordenadas del tercer punto de intersección de la recta r con la curva.

230

Los vértices de un triángulo son A(5;0) B(0;10) C(—6; —6). Encontrar la ecuación de la recta que divide al lado AB en la relación $-\dfrac{2}{3}$ y al AC en la —1, y calcular las áreas de las dos figuras en que quedan descompuesto el triángulo.

231

Dados los puntos A(1,3) y B(3,4) se construye el punto C simétrico de A respecto de la recta $x - y = 2$. Se pide:

1.º Hallar las coordenadas de C.

2.º El triángulo ABC: ¿tiene algún ángulo obtuso? Razónese el resultado.

3.º Construir el paralelogramo de centro C y del cual A y B son vértices consecutivos y hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

232

Un cuadrilátero tiene por lados los ejes de coordenadas, la paralela a la bisectriz del primer cuadrante trazada por el punto (0,1) y la perpendicular a ésta trazada por el punto (3,0). Hallar:

1.º Las ecuaciones de sus lados.

2.º Las coordenadas de sus vértices.

3.º Su área.

4.º El área del círculo circunscrito.

233

Dado el triángulo A(1,3), B(—1, —2) y C(5,0), hallar:

1.º Las coordenadas del baricentro G, del circuncentro C y del ortocentro H.

2.º La posición relativa de estos 3 puntos.

3.º La razón $\dfrac{GH}{GC}$.

234

Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por (2,3) y forman ángulo de 45° con la recta de ecuación $3x - y + 4 = 0$ y encontrar el área del triángulo determinado por las tres rectas.

235

Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la curva $y = 2\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 4}$ con la recta $y = 4$, y el ángulo que forman las tangentes a la curva en esos puntos.

236

Se dan los puntos A (—1, 12) y B (9, 28), se determinan las coordenadas del punto A', simétrico del A respecto al eje de las x, y las del punto B', simétrico del B respecto del eje de las y; se pide:

1.° Hallar las ecuaciones de las rectas AB' y A'B.

2.° Las coordenadas del punto C en que se cortan las rectas anteriores.

3.° Hallar la distancia del punto C a la recta AB.

4.° Hallar el área del triángulo ABC.

237

De un paralelogramo ABCD se conoce el vértice A (3,2) y el B (6,3), el coeficiente angular del lado AD, que vale 1, y el coeficiente angular de la diagonal BD, que vale 5/7; hallar:

1.° Las ecuaciones de los lados del paralelogramo.

2.° Las coordenadas de los vértices C y D.

3.° El punto de intersección de las diagonales.

4.° El área del paralelogramo.

238

Dado el punto P (3, — 1) interior al ángulo formado por las rectas $y = 0$, $y = -x$, se pide:

1.° Trazar por dicho punto una recta tal que el segmento MN que intercepta con las $y = 0$, $y = -x$ tenga como punto medio el punto dado P.

2.° Hallar la longitud del segmento dado MN; y

3.° Hallar el área del triángulo OMN.

239

Un triángulo equilátero tiene uno de sus vértices en el punto (3,5) y el lado opuesto está en la recta de ecuación $3x + y - 3 = 0$. Calcular las coordenadas de los otros dos vértices y el radio de la circunferencia circunscrita.

240

Se corta la parábola $y^2 = 5x + 4$ por la recta $x - 2y + 5 = 0$; por los puntos de intersección se trazan tangentes que con el eje de abscisas determinan un triángulo cuyo área se pide.

241

Se piden las coordenadas del tercer vértice de un triángulo isósceles, sabiendo que dicho tercer vértice está situado en la recta $5x - y + 17 = 0$, y los otros dos son los puntos A (3; 10), B (7; 2). Calcular su área y hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita, su centro y radio.

242

¿En qué punto de la recta $3x + 4y = 30$ tendrá que reflejarse un rayo luminoso que parte del punto F (5; 10) para que después de la reflexión pase por el punto A (13; 4)? Calcular también la longitud del camino recorrido por este rayo luminoso y razonar que es mínima.

243

Dados los puntos A (3,0) B (—3,0), hallar el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados de las distancias a A y B sea 12.

244

La base de un triángulo isósceles ABC es B (3, — 1), C (— 2,3), y el vértice A está en el eje OY. Hallar:

1.º Las ecuaciones de AB y AC.
2.º El área del triángulo.

245

Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto P (4,5) y forma con los semiejes OX, OY un triángulo de 40 m² de área.

246

Se da la curva $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$, que corta el eje OX en los puntos A, A', y al eje OY en B, B'.

1.º Clasificar el cuadrilátero que determinan estos cuatro puntos.
2.º Hallar su área.

3.º Tómense los puntos medios de los lados y demuéstrese que son vértices de un paralelogramo.
4.º Construcción gráfica correspondiente.

247

Por el punto P (5,3) se traza una recta variable que corta a OX y a OY en los puntos A y B, respectivamente. Por A se traza una recta r_1 paralela a OY, y por B, una recta r_2 paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Hallar el lugar geométrico del punto M de intersección de r_1 y r_2.

248

1.º Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a las rectas $y = 0$; $3x + 4y = 12$ sea dos unidades.
2.º Resolver el problema anterior gráficamente.

249

1.º Determinar las coordenadas de cuatro puntos cualesquiera que sean vértices de un trapecio.
2.º Probar después, analíticamente, que la recta que une los puntos medios de las bases de ese trapecio es concurrente con los lados no paralelos.
3.º Probar gráficamente la proposición contenida en el apartado anterior.

250

Se da una recta $3x - 4y = 12$ y un punto P $(-3, -5)$. Se pide:
1.º Trazar por P la perpendicular a la recta.
2.º Hallar el pie Q de esta perpendicular sobre la recta.
3.º Escribir las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por la recta y su perpendicular en el punto P.
4.º Comprobar que se cortan en ángulo recto.
5.º Calcular el área del triángulo formado por la recta, su perpendicular y el eje OX.