COMUNICACIONES MATEMATICAS

UNA LECCION SOBRE CUADRILATEROS

Por M.ª DOLORES PUIG SABADELL
(Religiosa Esclava del Sagrado Corazón de Jesús)

AVANZA el curso. Comienzan los repasos. Es entonces, no siendo la materia de la asignatura ya para los alumnos «una cosa nueva que suena por vez primera en los oídos», cuando el trabajo de la clase puede ser de una eficacia extraordinaria, tanto en lo que se refiere a la formación como a la instrucción de nuestros alumnos.

¿Cómo conseguirlo? Es necesario sobreponerse a la idea de que vistas las lecciones ya no hay nada más que hacer. Todo lo contrario; si proseguimos hasta el último día con el mismo interés y entusiasmo con que iniciamos las clases, conservaremos en nuestros escolares el constante deseo de aprovechar, y veremos cómo en el repaso consiguen en pocos días asimilar y afianzar muchos conceptos que en los primeros meses no llegan a comprender.

Un medio excelente para ello es el de organizar dicho repaso haciendo una síntesis de aquellos grupos de lecciones que forman un solo tema y construir un cuadro sinóptico para ordenar las ideas. Después, siguiendo este cuadro, se van estudiando todos los detalles particulares, se relaciona la materia con otras y, por último, se desciende a las aplicaciones prácticas.

Este modo de trabajar es grato a los alumnos. No les causa cansancio ni tedio y son ellos mismos los que desean profundizar más y más, llegando hasta las últimas consecuencias.

Cuando se oye a un alumno exclamar, con una expresión radiante de gozo: «¡Qué bonito!», queda el profesor plenamente compensado de todo el esfuerzo que este alumno le haya podido costar a lo largo del curso. Es una conquista lograda a favor del mismo niño, de la que puede depender todo su porvenir.

Uno de los trabajos efectuados en esta forma es la presente lección sobre los cuadriláteros.

MATERIAL

Se les pide que traigan a clase, construídos de cualquier materia, todos los cuadriláteros de formas más diversas que se les ocurran.

Nosotros preparamos también una buena cantidad de modelos: cuadriláteros de madera; otros dibujados sobre papel transparente; otros con alambre rígido, sujetos los vértices con pedacitos de corcho; finalmente, cuadriláteros articulados formados con tiras de cartón que se unen mediante encuadernadores. Estos últimos, permitiendo el movimiento de los lados, se prestan a estudios interesantes, así como los de papel se pueden doblar y hacernos ver los elementos de simetría.

CLASIFICACION

Se ha reunido un gran conjunto de cuadriláteros. Lo primero que hacemos es clasificarlos, dividirlos en subconjuntos, atendiendo a su forma.

Empezamos por separar los convexos de los cóncavos. Esto es efectuar una *partición* del *conjunto de referencia*, que son los cuadriláteros, en dos subconjuntos *disjuntos* (disjuntos, porque no tienen ningún elemento común), cuya reunión es el conjunto total.

Llamamos K al conjunto de todos los cuadriláteros; Q al subconjunto de los cóncavos, y C a los convexos. Las relaciones que existen entre estos conjuntos son las siguientes:

Q está incluído en K: $Q \subset K$
C está incluído en K: $C \subset K$

Q y C no tienen elementos comunes, su intercesión es el conjunto vacío: $Q \cap C = \emptyset$.

La reunión de Q y C es igual a su suma: $Q \cup C = Q + C = K$.

Q es el complementario de C respecto del conjunto de referencia: $Q \complement C$.
C es el complementario de Q respecto del mismo conjunto: $C \complement Q$.

Representando cada conjunto por los puntos del plano interiores a una cerrada sin puntos múltiples, las relaciones anteriores se expresan gráficamente mediante el esquema de la figura 1.

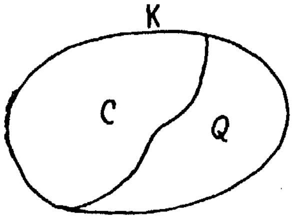

FIG. 1

Pasamos a formar nuevos subconjuntos. Una alumna dice: «Los cóncavos no se pueden dividir más.»

En cambio, otra, moviendo los cuadriláteros articulados, obtiene los *cruzados*; son aquellos que tienen dos lados que se cortan y forman un subconjunto de los cóncavos (figura 2, c, d, e). Un caso particular de éstos es el antiparalelogramo (figura 2, d, e).

Los convexos les interesan mucho más; les parecen de mayor utilidad. Quieren subdividirlos en muchos grupos distintos, independientes entre sí, porque creen que los **trapecios** y los **paralelogramos** son del todo **distintos**.

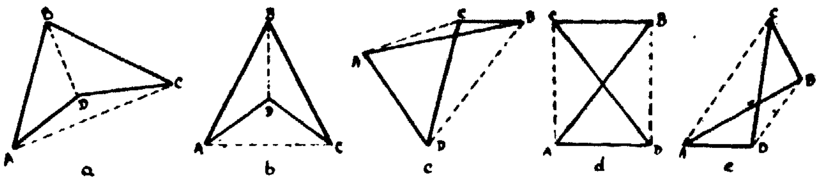

FIG. 2

Les hacemos ver que ambos grupos tienen dos lados paralelos. Con los cuadriláteros articulados formamos un trapecio (fig. 3). Si colocamos tres lados fijos, dos de ellos paralelos entre sí, y hacemos girar el cuarto lado alrededor del vértice, vemos surgir el paralelogramo como caso particular del trapecio; es, por lo tanto, de la misma familia. Todos los cuadriláteros que tienen, por lo menos, dos lados paralelos, forman un subconjunto muy numeroso de los convexos, que son los *trapecios*. Incluídos en ellos están los *paralelogramos*.

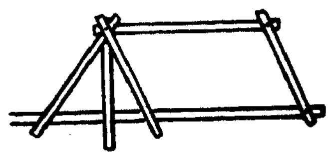

FIG. 3

Entre estos últimos se hallan unos con los lados iguales, y los separamos; son los *rombos*. Existen otros que tienen iguales los ángulos, todos rectos; les llamamos *rectángulos*.

¿Y los cuadrados dónde los colocamos? Pertenecen a los dos subconjuntos, puesto que tienen los lados iguales y los ángulos rectos.

Los rectángulos y los rombos son dos subconjuntos no disjuntos; tienen elementos comunes que son los *cuadrados* y forman su *intersección*.

Las relaciones del Algebra de conjuntos, con sus operaciones de intersección y reunión, podemos representarlas gráficamente por medio de los diagramas de Venn o de Euler. Las relaciones citadas quedan ilustradas por la figura 4.

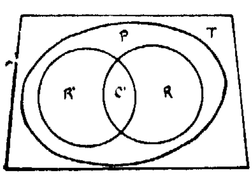

FIG. 4

Designaremos por R los rectángulos, por R' los rombos y por C' los cuadrados. Por no ser disjuntos R y R', su reunión es menor que su suma; es igual a la suma menos la intersección:

$$R \cup R' = R + R' - C'$$

Ya podemos construir el cuadro sinóptico de los cuadriláteros:

$$\text{Cuadriláteros}\begin{cases}\text{cóncavos} \to \text{cruzados} \to \text{antiparalelogramos}\\ \text{convexos} \to \text{trapecios} \to \text{peralelogramos} \begin{matrix}\nearrow \text{rombos} \searrow\\ \searrow \text{rectángulos} \nearrow\end{matrix} \text{cuadrados}\end{cases}$$

Creíamos terminada la clasificación, cuando unas alumnas nos muestran un cuadrilátero que no es trapecio y se parece mucho al rombo. Tiene dos lados contiguos iguales y los otros dos contiguos también iguales entre sí: son los *romboides*. Una de sus diagonales, mediatriz de la otra, es eje de simetría.

Todas convienen en que merece formar un grupo aparte por sus propiedades especiales. No son paralelogramos, y, sin embargo, el rombo puede considerarse como un caso particular de los romboides.

El romboide es un subconjunto de los cuadriláteros no trapecios; es disjunto con los trapecios, a primera vista; pero tiene una intersección con los paralelogramos, que son los rombos. Muy difícil parece hacer el diagrama que representa estas relaciones. Se proponen encontrarlo y, al fin, lo realizan según la figura 5.

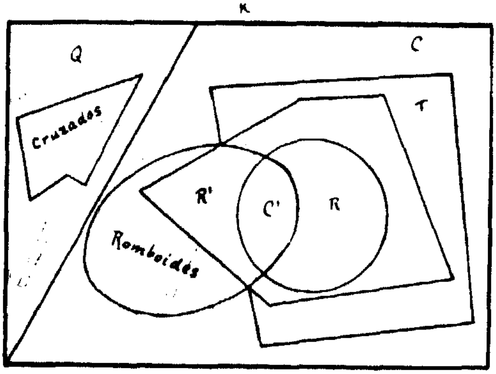

FIG. 5

Vemos que existen también romboides cóncavos (fig. 2, b).

PROPIEDADES

El orden de inclusión de unos conjuntos de cuadriláteros en otros simplifica grandemente el trabajo de encontrar sus propiedades.

Aquellas que son generales, comunes a todos, no es necesario repetirlas para cada uno en particular. Así, las propiedades generales de los trapecios las tienen todos los paralelogramos; las que el paralelismo de los dos pares de lados introducen en éstos las tendrán también los rectángulos y los rombos. Llegaremos finalmente al cuadrado, cuadrilátero regular, que reúne en sí las propiedades de todos los demás.

Para mayor facilidad en su estudio nos proponemos el orden siguiente:

1.° Definición.
2.° Propiedades de los lados.
3.° Propiedades de los ángulos.
4.° Propiedades de las diagonales.

5.° **Propiedad de la paralela media.**
6.° **Elementos de simetría.**
7.° **Inscriptibilidad.**
8.° **Circunscriptibilidad.**

PROPIEDADES GENERALES DE LOS CUADRILÁTEROS

1.° *Definición.*—Son polígonos de cuatro lados.

2.° *Lados.*—Haciendo construir cuadriláteros con cuatro segmentos dados, observamos que para poder construirlos es necesario que «un lado sea menor que la suma de los otros tres».

3.° *Angulos.*—En los convexos y en los cóncavos cuyos lados no se cortan, la suma de los cuatro ángulos interiores es igual a cuatro rectos.

4.° *Diagonales.*—El número de diagonales es dos.

Cada diagonal divide al cuadrilátero en dos triángulos.

En los convexos las dos diagonales son interiores, se cortan en un punto interior.

En los cóncavos hay por lo menos una diagonal exterior, y las dos si son cruzados.

En el antiparalelogramo las dos diagonales son paralelas.

5.° *Paralela media.*—En el trapecio la paralela media es igual a la semisuma de las bases.

Uniendo los puntos medios de cada dos lados consecutivos obtenemos otro cuadrilátero que es siempre un paralelogramo, por ser los dos lados opuestos paralelos a la misma diagonal.

En el antiparalelogramo este cuadrilátero queda reducido a una línea recta (fig. 6).

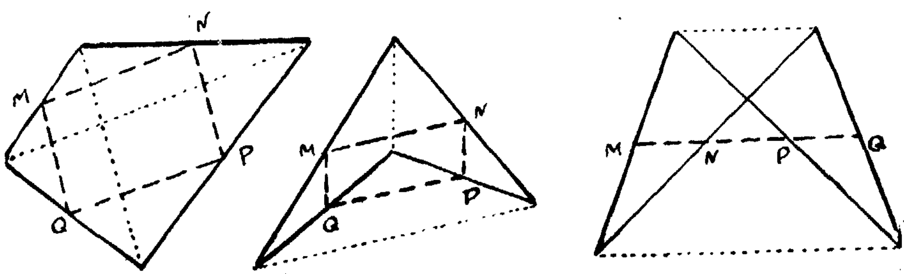

FIG. 6

6.° *Simetrías.*—El trapecio solamente tiene un eje de simetría cuando es isósceles. Este eje es la mediatriz de las bases.

Los paralelogramos tienen centro de simetría. Es el punto donde se cortan las diagonales.

Los rombos tienen además dos ejes que son sus diagonales y los rectángulos tienen también dos ejes que son las mediatrices de sus lados. Estos ejes son perpendiculares.

El cuadrado tiene las simetrías de todos los anteriores: centro y cuatro ejes. Los ejes son las diagonales y las mediatrices de los lados. Perpendiculares dos a dos.

7.° y 8.° *Inscriptibilidad y circunscriptibilidad.*—Las condiciones para que un cuadrilátero sea inscriptible o circunscriptible nos dan ocasión de repasar todo lo que se refiere a los ángulos inscritos, exteriores o interiores a una circunferencia y también las propiedades de las tangentes a la misma.

Todo esto se estudia en particular para cada uno de los subconjuntos de cuadriláteros obtenidos al clasificarlos.

El hecho de que un trapecio no puede tener tres ángulos agudos ni tres ángulos obtusos excita el deseo de investigar si los otros cuadriláteros pueden tenerlos y estudiar cada caso. Nos fijamos para ello en los romboides.

La figura 7 nos muestra cuatro modos de construir un romboide tomando por diagonal principal BD un diámetro de una circunferencia.

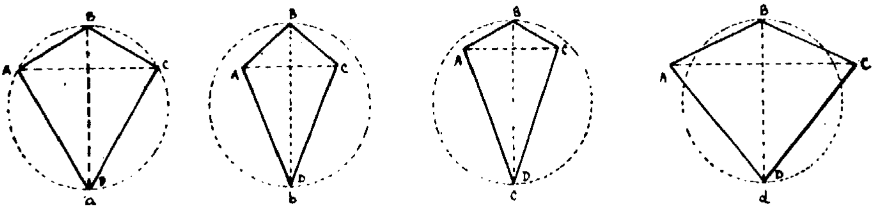

FIG. 7

Esta diagonal será siempre mediatriz de la otra, por unir dos puntos B y D que equidistan de los otros dos A y C.

El romboide es siempre circunscriptible por tener la suma de dos lados opuestos igual a la suma de los otros dos. Pero no siempre es inscriptible.

a) Si los puntos A y C se toman en la circunferencia, los ángulos A y C son rectos. Los otros dos suplementarios, uno agudo y otro obtuso.

b) y *c)* Tomando los puntos A y C interiores a la circunferencia, los ángulos en estos vértices son obtusos. Los otros dos pueden ser agudos (fig. 7, b) o bien uno agudo y otro obtuso (fig. 7, c).

Ya tenemos un cuadrilátero con tres ángulos obtusos.

d) **Sean los ángulos A y C exteriores a la circunferencia (fig. 7, d). Estos ángulos serán agudos. Si uno de los otros es agudo, habremos construído un cuadrilátero con tres ángulos agudos. También podría ser uno de ellos recto.**

Una nueva curiosidad sienten. Ya conocen las condiciones para que un cuadrilátero pueda estar inscrito o circunscrito a una circunferencia. ¿Cómo dibujar en cada caso esta circunferencia?

Pronto lo encuentran: las bisectrices de los ángulos nos darán el centro de la circunferencia inscrita y las mediatrices de los lados el de la circunscrita.

El estudio de todos los cuadriláteros se resume en el cuadro inserto al final de esta comunicación didáctica.

USO DEL MATERIAL

Los cuadriláteros articulados nos han servido para encontrar muchas relaciones entre ellos y pasar de unas figuras a otras de un modo continuo.

Formamos un paralelogramo (fig. 8) y hacemos variar los ángulos. El

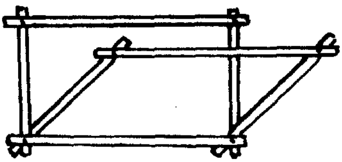

FIG. 8

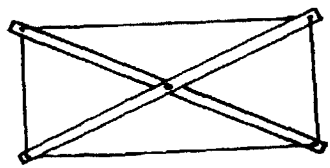

FIG. 9

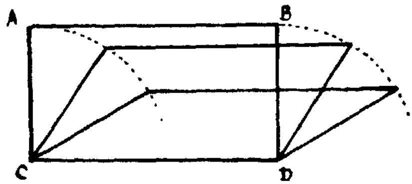

FIG. 10

rectángulo surge como un caso particular del paralelogramo. El perímetro de todos ellos es constante, pero no el área; estos paralelogramos de igual perímetro no son equivalentes.

¿Cuándo será el área máxima o mínima? El rectángulo es el paralelogramo de área máxima. El área mínima nos lo da una recta.

Si materializamos las diagonales con cordones, vemos que se cortan siempre en el punto medio y que solamente en el rectángulo son iguales las dos.

Inversamente, tomando dos tiras de cartón iguales, uniéndolas por su punto medio y formando con cordones los lados (fig. 9), pasamos por continuidad del rectángulo al cuadrado; las diagonales son siempre iguales.

Con cuatro tiras iguales de cartón formamos un cuadrado y pasamos de él al rombo. Las diagonales varían de longitud, pero siempre son perpendiculares.

Al construir cuadriláteros con metal, sujetos los lados en los vértices por medio de corchos, de modo que no puedan deformarse, por deficiente colocación de los lados se ha obtenido un cuadrilátero alabeado cuyos lados opuestos se cruzan. Esto nos ha ofrecido la ocasión de estudiarlo.

Trazamos sus diagonales y obtenemos un tetraedro irregular.

Unimos los puntos medios de los lados mediante hilos y vemos que se forma también un cuadrilátero plano, que es paralelogramo.

Si se trazan todos los segmentos que unen los puntos medios de las aristas del tetraedro, se construye un octaedro.

El estudio del cuadrilátero alabeado lo dejamos para las alumnas de cuarto año, que conocen ya las relaciones entre las figuras del espacio.

APLICACIONES DE LOS CUADRILATEROS

Formando diversas figuras con las tiras de cartón, observamos que los triángulos no pueden deformarse cuando se han sujetado los vértices. El triángulo se utiliza para dar estabilidad y firmeza a las construcciones. En cambio el cuadrilátero es muy fácilmente deformable.

Los paralelogramos articulados permiten transformar movimientos de rotación en movimientos de traslación.

Sea el paralelogramo rectángulo ABCD (fig. 10). Dejando fijo el lado DC y haciendo girar el lado AD, los puntos A y B describen circunferencias, mientras el lado AB adquiere un movimiento de traslación, permaneciendo siempre paralelo a DC.

El movimiento del paralelogramo articulado es el que se emplea para unir las ruedas de las locomotoras.

El antiparalelogramo se utiliza también en las máquinas.

Otra aplicación del paralelogramo es el trazado de elipses.

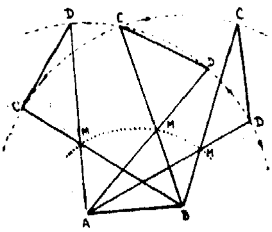

FIG. 11

Sea la figura ABCD (fig. 11). Permaneciendo fijos los puntos A y B se hacen girar los lados AD y BC. Podemos ver:

Los triángulos AMB y CMD son iguales:

$$AM = MC \quad ; \quad MB = MD$$

de donde:

$$AM + MB = AM + MD = AD$$

La suma de distancias del punto M a los puntos A y B es constante.

El punto M describe el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos A y B es constante: la elipse.

El antiparalelogramo es un elipsógrafo.

Finalmente, también en el arte se han empleado en todos los tiempos los cuadriláteros. Se encuentran los rombos, rectángulos y cuadrados frecuentemente, como elementos decorativos, en el arte y arquitectura románicos.

En la época actual el arte moderno emplea con profusión las combinaciones de cuadriláteros.

* * *

Al terminar esta lección se nos puede ocurrir: ¿Vale la pena tanta cosa para unos simples cuadriláteros?

Creemos que lo principal de esta lección no está en los conocimientos adquiridos sobre los cuadriláteros, sino en la formación que damos al alumno, cultivando su espíritu de investigación, su capacidad de observar, de relacionar y ordenar sus ideas. Le preparamos para que encuentre menos dificultades en sus estudios superiores, para que no fracase en la vida.

Sabemos que estas clases interesan a los niños y salen de ellas felices. La realidad intelectual del alumno tiene derecho a vivir, a desarrollarse, y en esta actividad encuentra el hombre un placer.

Procuramos a los adolescentes un bien muy grande si, lejos de hacerles el estudio fastidioso, les mostramos que en el cultivo de sus facultades superiores pueden encontrar también el placer, la satisfacción y el gozo que su naturaleza humana necesita, goces dignos de un ser racional y de un hijo de Dios, goces que les elevan y les hacen útiles a la humanidad.

C U A D R I L A T E R O S

C O N V E X O S

Romboides.

1, 2 Dos lados contiguos iguales.

3
- Dos áng. rectos: rectángulo.
- Dos agudos y dos obtusos.
- Tres áng. agudos.
- Tres áng. obtusos.

4
- Las diagonales son perpendiculares.
- La diagonal principal es la mediatriz de la otra, une los vértices de donde parten lados =.

6 El eje de simetría es la diagonal principal.

7 Es inscriptible: el rectángulo.

8 Es siempre circunscriptible.

Trapecios.

1, 2 Dos lados paralelos.

3
- No pueden tener 3 ángulos agudos ni tres obtusos.
- Puede tener 2 ángulos rectos: rectángulo.
- Dos agudos iguales y dos obtusos iguales: isósceles.
- Dos agudos y dos obtusos desig.: escaleno.

5 Paralela media = semisuma de los lados paralelos (bases).

6 Tiene un eje de simetría el isósceles que es la mediatriz de las bases.

7 Solamente es inscriptible el isósceles.

Paralelogramos.

1, 3 Los dos pares de lados opuestos, paralelos.

2 Los lados opuestos, iguales.

4 Los ángulos opuestos, iguales.

6 Las diagonales dividen al paralelogramo en dos triángulos iguales; se cortan en el punto medio.

7 Tiene centro de simetría: punto de intersección de las diagonales.

Rombos.

1, 2 Lados iguales.

3 Dos áng. agudos y dos obtusos.

4 Las diag. son perpendiculares.

6 Son ejes de simetría las diagonales.

7 No es inscriptible.

8 Es siempre circunscriptible.

Rectángulos.

1, 3 Los cuatro ángulos, rectos.

2 Lados perpendiculares.

4 Diagonales iguales.

6 Dos ejes de simetría: las mediatrices de los lados.

7 Es siempre inscriptible.

Cuadrado

Es el cuadrilátero regular.
Posee todas las propiedades de los demás.
Es inscriptible y circunscriptible.