La Gravitación Universal y el Campo Gravitatorio Terrestre (*)

CENTRO de ORIENTACION DIDACTICA

Por ANTONIO MINGARRO

(Catedrático de Física y Química del Instituto Nacional de Enseñanza Media "Cervantes" de Madrid)

La lección que vamos a desarrollar, estudia la gravitación universal y el campo gravitatorio terrestre en particular.

Como todos sabéis, es a Copérnico, fallecido en 1543, a quien se debe la idea de que los planetas, la Tierra entre ellos, giran alrededor del Sol, en contra de lo que se creía con anterioridad a él, desde la afirmación geocéntrica hecha catorce siglos antes por Ptolomeo: Copérnico demostró prudencia aplazando la publicación de sus teorías para después de su muerte, ejemplo que no siguieron Giordano Bruno ni el gran Galileo, y de lo que les pararon ciertos perjuicios que no es del caso comentar. Tres años después de la muerte de Copérnico nació Kepler, personalidad científico-histórica de gran interés, que lograría con su intuición desentrañar las leyes de movimiento planetario: con su intuición—y con el formidable trabajo de observación y acopiamiento de datos que le legó Ticho-Brahe, astrónomo, que durante más de veinte años, día a día, observó y anotó las posiciones de los planetas en sus cuadernos, documentos que puso a disposición de Kepler en el último año de su vida, cuando ambos fueron a trabajar a Praga.

Kepler, con espíritu de artista, interpretó aquel venero de números cuya procedencia aclaró honestamente en todos sus escritos, y formuló las tres leyes siguientes, con los enunciados que, algo modernizados en el lenguaje, doy a continuación:

Primera.—Todos los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, astro que ocupa uno de los focos de la elipse.

Segunda.—Las velocidades areolares de cada uno de los planetas sobre sus órbitas respectivas son constantes.

Tercera.—Los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de los ejes mayores de sus órbitas respectivas.

Conviene aclarar el significado de las leyes de Kepler, en especial las

(*) Lección desarrollada para el C. O. D. y recogida en cinta magnetofónica por los servicios de dicho organismo.

dos últimas, puesto que la primera es suficientemente explícita. Sea S la posición del Sol y tracemos la órbita de uno de los planetas. Supuesto el planeta en P_1, al cabo de cierto tiempo, t días, se encontrará en P_2; si se considera su movimiento a partir de P_3, al cabo de t días llegará a P_4, y si estaba en P_5, alcanzará el punto P_6 al cabo de otros t días. Pues bien, decir que recorre su órbita con velocidad areolar constante, equivale a afirmar que las áreas rayadas P_1 Sol P_2, P_3 Sol P_4, P_5 Sol P_6 son iguales. Es evidente—basta examinar con detalle la figura—que la *velocidad lineal* del planeta P sobre su órbita será mayor de P_5 a P_6 que de P_3 a P_4, para que se cumpla la equivalencia de aquellas áreas; es decir, que el astro va más rápido en el *perihelio* que en el *afelio* y con velocidad acelerada positivamente al pasar de éste a aquél, e inversamente.

Si llamamos T_1 y T_2 los «años» de dos planetas cualesquiera, o sea, los tiempos invertidos por ellos para recorrer su órbita, y a_1 y a_2 los respectivos ejes mayores de las elipses descritas, la tercera ley de Kepler significa que se cumple la siguiente proporción:

$$\frac{T^2_1}{a^3_1} = \frac{T^2_2}{a^3_2}.$$

En el estudio elemental que vamos a hacer se supondrá simplificado el movimiento en el sentido de considerar las órbitas circulares en lugar de elípticas, y con esta simplificación, realmente muy próxima a la realidad por la pequeña excentricidad de las órbitas, las leyes de Kepler pueden enunciarse así:

1.ª Los planetas describen órbitas circulares alrededor del Sol, que ocupa el centro de todas ellas.

2.ª Los planetas recorren su órbita con movimiento uniforme.

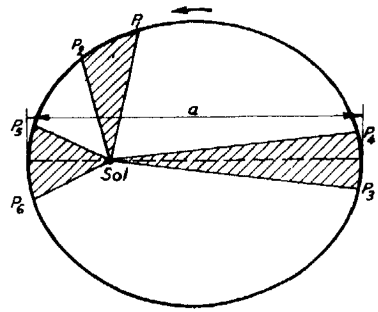
3.ª Se cumple la siguiente relación:

$$\frac{T^2_1}{r^3_1} = \frac{T^2_2}{r^3_2} = \frac{T^2_3}{r^3_3} = \ldots\ldots;$$

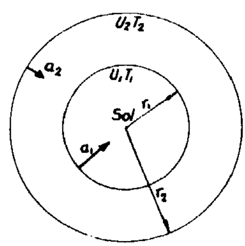
en donde r_1, r_2, etc., son los radios de las órbitas. Para dos planetas, y por comodidad para nuestras necesidades inmediatas, podemos escribir esta relación así:

$$\frac{T^2_2}{T^2_1} = \frac{r^3_2}{r^3_1}.$$

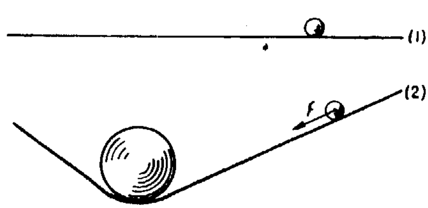
Ley de la gravitación universal.—Corresponde a Newton—exponente máximo del genio científico de todos los tiempos—el mérito de haber profundizado en las ideas de Kepler—geómetra del firmamento—hasta llegar a entrever la dinámica del sistema solar; partiendo de relaciones métricas, intuyó y calculó la fuerza que al actuar sobre los planetas sería capaz de imprimirles el movimiento kepleriano. Es muy sencillo—a partir de la simplificación antes dicha—deducir la ley de Newton.



P1
P2
a
P5
P4
Sol
P6
P3



U2 T2
a2
U1 T1
Sol
r1
a1
r2



(1)
(2)
F

Sea un planeta P_1 que se mueve con velocidad constante, u_1, sobre una órbita de radio r_1, empleando en una revolución el tiempo T_1; se puede escribir:

$$2\pi r_1 = u_1 T_1; \qquad \text{de donde} \qquad u_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}.$$

La aceleración centrípeta a que está sometido, como sabemos por el estudio del movimiento circular uniforme, será:

$$a_1 = \frac{u^2_1}{r_1},$$

o sea, sustituyendo el valor de u_1 antes encontrado,

$$a_1 = \frac{4\pi^2 r^2_1}{r_1 T^2_1} = \frac{4\pi^2 r_1}{T^2_1}.$$

Para otro planeta, P_2, se tendrá análogamente (pondremos subíndices 2 a nuestra fórmula final):

$$a_2 = \frac{4\pi^2 r_2}{T^2_2}.$$

Dividiendo ordenadamente estas dos expresiones sale :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\dfrac{4\pi^2 r_1}{T^2_1}}{\dfrac{4\pi^2 r_2}{T^2_2}} = \text{simplificando a } \frac{r_1 T^2_2}{r_2 T^2_1}.$$

y como

$$\frac{T^2_2}{T^2_1} = \frac{r^3_2}{r^3_1};$$

se tiene:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{r^2_2}{r^2_1};$$

de donde $a_1 r^2_1 = a_2 r^2_2$, lo cual nos dice que los productos ar^2 de las aceleraciones centrípetas por los cuadrados de los radios son constantes para cada planeta. O, lo que es lo mismo, que

$$ar^2 = k, \qquad \text{o sea,} \qquad a = \frac{k}{r^2}.$$

Según el principio fundamental de la dinámica, que, como sabéis, dice:

fuerza = masa × aceleración, la fuerza centrípeta ejercida sobre el planeta será:

$$F = m \cdot \frac{k}{r^2};$$

escribiéndola de una manera más cómoda:

$$F = k \frac{m}{r^2},$$

lo cual nos dice que *el Sol ejerce sobre el planeta una fuerza proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.*

Por el principio de la acción y reacción, el planeta ejercerá sobre el Sol una fuerza $-F$, igual y contraria a F, cuyo valor, admitiendo que sea de la misma naturaleza que la anterior, podrá escribirse con la expresión $k' \frac{M}{r^2}$, en la cual k' es otra constante de proporcionalidad y M la masa del Sol. Como los valores absolutos de ambas fuerzas son iguales, se podrá escribir:

$$k \frac{m}{r^2} = k' \frac{M}{r^2},$$

o sea, $km = k'M$, y aún $\frac{k}{M} = \frac{k'}{m}$ = constante; llamémosla G; de aquí se desprende que $k = G \cdot M$, valor que llevado a la expresión antes deducida $\left(\text{ésta, } F = k \frac{m}{r^2}\right)$, la convierte en

$$\boxed{F = G \frac{mM}{r^2}}.$$

representación matemática de la ley de Newton de la gravitación universal valedera, no sólo para el sistema solar, sino para masas cualesquiera, y que se puede enunciar así:

«*Dos masas se atraen* COMO SI *entre ellas se ejerciera una fuerza proporcional a su producto e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.*»

(Interrupción número 1.)

M.—¿Querías algo, Morante?
A. 1.º—Sí, señor.
M.—Habla, que te escucho.

A. 1.º—Tengo una duda, señor Mingarro. Usted ha deducido la ecuación de Newton con hipótesis simplificadoras y, sin embargo, nos dice que es absolutamente general; si no se hubieran hecho esas simplificaciones, ¿se llegaría al mismo resultado?

M.—Sí; podríamos haber operado con las órbitas reales, elípticas y obtenido la misma conclusión; pero el cálculo matemático es mucho más complicado. Está desarrollado en algunos libros superiores, por ejemplo, en la *Meccanica razionale,* de Levi-Civita.

Continúo.

Llamo vuestra atención sobre el condicional «como si»: es del propio Newton, y pone en evidencia una modestia científica merecedora de algún comentario, pues Isaac Newton no fué precisamente lo que se llama un hombre humilde, sino más bien lo contrario; pagado de sí mismo y escrupuloso velador de sus producciones intelectuales como pocos ha habido; su actitud frente a Leibnitz en la discusión sostenida por ambos sobre la paternidad del cálculo infinitesimal fué históricamente un borrón en su conducta; esto agiganta más el valor de ese condicional que indica la cautela de un hombre sabio, muy sabio, ante el para el hombre inasequible secreto de las causas últimas de los fenómenos naturales. Newton, si soberbio ante los hombres, fué humilde ante Dios.

Digamos ahora algo sobre la constante G.—Se ha podido determinar experimentalmente el valor de G, constante universal de gravitación; no me entretendré en describiros los trabajos hechos por Cavendish a principios del pasado siglo, ni los recientes de Heyl, subvencionados por el Bureau of Standards de Wáshington, que en 1930 llegó a establecerlo en:

$$6{,}670 \pm 0{,}005 \times 10^{-8} \text{ cgs.}$$
$$6{,}670 \pm 0{,}005 \times 10^{-11} \text{ unidades giorgi.}$$

Las dimensiones de G se deducen de la ecuación de Newton; en efecto, si hacemos $m = \mathrm{M}$, y despejamos G, resulta:

$$\mathrm{G} = \frac{\mathrm{F}r^2}{m^2},$$

y por tanto, $[\mathrm{G}] = [\mathrm{MLT}^{-2}]\,[\mathrm{L}^2]\,[\mathrm{M}^{-2}] = \mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$.

Las unidades en que deberá expresarse G serán $dyn\ cm^2\ g^{-2}$ o $\mathrm{N}m^2kg^{-2}$.

Físicamente, G representa la fuerza que se ejerce entre dos masas unidad colocadas a la distancia unidad. Esta fuerza resultará en *dyn,* si r y m se miden en *cm* y *g*; y en N, si r y m se expresan en *m* y *kg*. Estas indicaciones deben tenerse muy presentes en los cálculos para evitar resultados gravemente erróneos.

La ley de Newton ha encontrado una brillante confirmación experimental facilitada por la astronomía; en 1946, un francés, Leverrier, observó que la órbita del planeta Urano no respondía exactamente a la prevista e interpretó este resultado suponiendo que existía otro planeta más alejado del Sol, que con su masa introducía perturbaciones en el movimiento de aquél; llegó a precisar, mediante esta hipótesis de trabajo y con laboriosos cálculos, el lugar del firmamento en que debía encontrarse el desconocido planeta. Excuso deciros la emoción que debió de experimentar Galle, astrónomo del observatorio de Berlín, cuando al dirigir el anteojo al punto prefijado localizó al planeta perturbador, hoy conocido con el nombre de Neptuno. De un modo parecido, pero con menos espectacularidad, ha sucedido con el último de los planetas de nuestro sistema solar, Plutón.

Sin embargo, la ley de Newton no permite obtener con exactitud la órbita de Mercurio, el planeta más próximo al Sol; pero sobre este asunto, por el momento, no estamos aún en condiciones de hablar, pues nos llevaría más lejos de lo que el programa oficial pide. ¿Queda esto claro?

(Interrupción número 2.)

A. 2.º—Señor Mingarro; yo no alcanzo a comprender la razón de las anomalías que usted señala para la órbita de Mercurio, ¿podría usted darnos una idea, aunque sea a la ligera, de ello?

M.—Sólo muy ligera, pues algo y aún algos aprenderéis en cursos superiores. Os diré que en estas perturbaciones de Mercurio tiene importancia decisiva la que se llama «presión de radiación», ejercida por la enorme energía que recibe del Sol, de quien tan cerca se encuentra el planeta. No olvidéis que si la masa, según Einstein, tiene su equivalente en energía, también se cumple la proposición recíproca; y, en definitiva, esta energía equivalente a masa introduce nuevos elementos de cálculo que explican las anomalías; no os puedo ni debo decir más.

Vamos ahora, una vez conocido el valor de la constante universal G, a aplicar lo que hemos aprendido para determinar la masa de la Tierra; éste es un problema sencillo que lo puede resolver alguno de vosotros. Por ejemplo, tú, Muñoz Merino; sal a la pizarra.

M. M.—¿Puedo borrar algo?

M.—No, aquí tienes sitio suficiente.

M. M.—Vamos a calcular la masa de la Tierra y su densidad por aplicación de la ley de la gravitación universal de Newton, es decir, vamos a utilizar la fórmula

$$F = G \frac{M \cdot m'}{D^2},$$

en la que, utilizando el sistema Giorgi, F es la fuerza ejercida por la Tierra sobre el kg. masa, es decir, el peso del kg. masa; luego:

$$F = 9{,}8\ N.$$

G es lo que usted ha definido como la constante de gravitación universal, cuyo valor es:

$$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}.$$

M es la masa de la Tierra en kg., cuyo valor queremos determinar.

m' es 1 kg. masa.

D es, en este caso, el radio terrestre, pues suponemos colocado en la superficie terrestre el kg. El valor del radio terrestre lo podemos deducir de la definición del metro, según la cual un círculo máximo terrestre tiene 40 millones de metros; es decir,

$$2\pi R = 4 \cdot 10^7\ m;$$

despejando R,

$$R = \frac{4 \cdot 10^7}{2\pi}\ m, \quad \text{y simplificando} \quad R = \frac{2}{\pi}\ 10^7\ m.$$

Despejando M de la fórmula de Newton, de donde hemos partido, tenemos:

$$M = \frac{F \cdot R^2}{G \cdot m'},$$

y sustituyendo los valores que hemos calculado:

$$M = \frac{9{,}8 \cdot 2^2 \cdot 10^{14}}{\pi^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} \backsim 6 \times 10^{24}\ \text{kg}.$$

es decir, que la masá de la Tierra es, aproximadamente, de 6 cuatrillones de kg.

La densidad de la Tierra podemos calcularla, una vez conocida su masa, por aplicación de la fórmula

$$d = \frac{M}{V}.$$

Como ya conocemos la masa M, basta dividir por su volumen $\frac{4\pi r^3}{3}$; haciendo el cálculo sale alrededor de $5{,}5 \times 10^3$ kg/m^3.

M.—Sí, sí.

Como la densidad media de la litosfera es $2{,}7 \times 10^3$ kg/m^3, se debe admitir que la del núcleo central es elevada, alrededor de 10.000 kg/m^3, lo cual confirma la hipótesis de que dicho núcleo está constituido por metales pesados, como sabéis por geología. Este problema, «Determinación de la masa y de la densidad de la Tierra», pasadlo al cuaderno de clase resolviéndolo numéricamente con detalle.

Vamos a continuar la lección con el estudio del campo gravitatorio terrestre.

El campo gravitatorio terrestre es un caso particular del concepto más amplio de *campo de fuerzas* sobre el que interesa concretar algunas particularidades que nos permitirán repasar y unificar lo que sabéis por el Bachillerato de campos de fuerzas: eléctrico, magnético, gravitatorio, etc.

Se dice que *en una región del espacio existe un campo de fuerzas cuando por el solo hecho de situar un cuerpo en cualquiera de sus puntos, aparece instantáneamente sometido a la acción de una fuerza.*

Por ejemplo, el campo gravitatorio terrestre; sólo por estar un cuerpo en el espacio que rodea a la Tierra, actúa sobre él la fuerza peso, que tiende a llevarlo al suelo en sentido vertical; o el campo eléctrico, pues basta colocar en cualquiera de sus puntos un cuerpo eléctricamente cargado, para que se vea obligado a moverse, por la acción de una fuerza, hacia donde se encuentren las cargas de signo contrario.

Esta fuerza, por lo general, es distinta para el mismo cuerpo en diferentes puntos del campo; pero en un determinado lugar, resulta proporcional a cierto coeficiente característico del cuerpo, que se acostumbra a llamar su *magnitud activa.* A grande; por ejemplo, en los campos gravitatorios la magnitud activa es la *masa;* en los eléctricos, la *carga;* en los magnéticos, el *polo.* Es decir, para todo campo

$$\vec{f} = \mathrm{A} \cdot \vec{\mathrm{E}}.$$

El vector E, distinto en dirección y módulo para cada punto del campo, se llama *intensidad del campo en dicho punto,* y representa la fuerza que aparece en dicho punto al colocar en él un cuerpo en el que A, magnitud activa, sea la unidad. Como aquí nos limitaremos, hechas estas consideraciones generales comunes a todos los campos de fuerzas, al gravitatorio, la magnitud activa es la *masa,* y el vector *intensidad de campo* es, en *dyn, la fuerza con que es atraída la unidad de masa, 1 g, situada en el punto considerado.* Como es natural, este número coincide, en cuanto a su valor, con la aceleración de la gravedad en dicho punto expresada en cm/s^{-2}.

Los campos de fuerza se acostumbran a representar por las llamadas *líneas de fuerza,* que dan una imagen gráfica de su forma. En el campo gravitatorio terrestre estas líneas de fuerza son las verticales.

La interpretación de la existencia de campos de fuerza y del porqué de su actuación instantánea no puede apoyarse en el viejo concepto de *acción a distancia;* hoy se supone que el espacio está profundamente modificado por causas diversas y que esta alteración de su homogeneidad es la que da nacimiento a las fuerzas que actúan sobre los cuerpos colocados en él.

El Prof. Catalá utiliza una imagen gráfica muy sugestiva para explicar esta modificación del espacio que da lugar a la aparición de un campo de fuerzas; es especialmente aplicable al campo newtoniano creado por las masas; es la siguiente:

«Supongamos una membrana tensa horizontal, que nos va a representar el *espacio no alterado,* sobre la cual situamos una bolita de masa muy pequeña, que supondremos no es capaz de perturbar la horizontalidad. La bolita queda inmóvil, como si no perteneciera al campo. Coloquemos sobre la membrana una masa grande tal que altere su horizontalidad; *esta modificación del espacio ha creado un campo de fuerzas* que se extenderá a toda la membrana; al colocar ahora la bolita en cualquier punto de la misma, instantáneamente se deslizará hacia la bola grande, como si sobre ella hubiéramos aplicado una fuerza. Como es lógico, *la alteración del espacio* presupone la realización de un trabajo previo (en nuestro ejemplo, el necesario para deformar la membrana), trabajo que queda acumulado en el espacio en forma de energía y que poco a poco es devuelto posteriormente cuando da lugar al movimiento de los cuerpos en su interior.»

En el caso de campos newtonianos, el origen de la energía almacenada hay que buscarlo en el momento en que se inició la heterogeneidad del espacio por acumulaciones de masa en ciertos puntos del mismo. Este instante coincide con el de la Creación, y las palabras divinas que a él dieron lugar son las recogidas en el Génesis: «Fiat lux».

El campo gravitatorio terrestre es un caso particular de los campos newtonianos; sus líneas de fuerza son verticales, como hemos dicho; la magnitud activa es la masa del cuerpo. Su intensidad es g dyn y varía en cada punto del espacio en razón inversa del cuadrado de la distancia que le separa del centro de la Tierra.

El estudio más detenido del campo gravitatorio terrestre, especialmente en la superficie de nuestro planeta, ha permitido conocer las variaciones de g en función de la latitud y de la altitud del lugar. La latitud influye por dos causas distintas: por el achatamiento de la Tierra por los polos, que hace menor la distancia al centro, y por la fuerza centrífuga creada por la rotación, que es nula en los polos y máxima en el Ecuador; en las variaciones con la altitud, sólo influye la primera de dichas causas. Algunos valores importantes de la intensidad del campo gravitatorio terrestre en puntos de la superficie son:

Polos:	g en cm/s^{-2}	983,232,	intensidad del campo		983,232 dyn.
Madrid:	g »	979,984,	»	»	979,984 dyn.
Ecuador:	g »	978,046,	»	»	978,046 dyn.

Si alguien desea ampliar sus conocimientos acerca del campo gravitatorio terrestre, puede consultar las obras de los Profesores Palacios, «Mecánica Física»; Santesmases, Catalá, Brú, «Física General», e incluso, para este tema específico, el «Compendio de Física General», del que soy autor.

¿Alguno de ustedes quiere alguna aclaración concreta?

Entonces vamos a resumir la lección de hoy:

Newton, sabio inglés, basándose en las leyes enunciadas por Kepler a principios del siglo XVII, estableció, a fines del mismo, la ley general de la gravitación universal, diciendo: «Dos masas se atraen como si entre ellas se ejerciera una fuerza proporcional a su producto e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.» La expresión matemática de esta importantísima ley es:

$$F = G\frac{Mm}{d^2},$$

en la cual G es una constante universal; es decir, una constante cuyo valor no depende del lugar del espacio que consideremos. En unidades del sistema Giorgi el valor de G es $(6{,}670 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-11}\, m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$. Representa en N la fuerza con que se atraen dos masas de 1 kg. cada una, colocadas a 1 m. de distancia.

Entre otras aplicaciones, la ley de Newton ha servido para calcular la masa y densidad de la Tierra, el Sol, los planetas e incluso las estrellas.

El campo gravitatorio terrestre es un campo de fuerzas newtoniano creado por la Tierra. Sus líneas de fuerza son verticales y su intensidad en la superficie terrestre presenta variaciones locales dependientes de la altitud y de la latitud del lugar considerado. El valor de la misma es, en dynas, el mismo que el de la aceleración de la gravedad expresada en cm/s^{-2}: en los polos, g tiene su valor máximo, que es aproximadamente 983 cm/s^{-2}, mientras que en el Ecuador vale 978 cm/s^{-2}. En Madrid, puede tomarse con mucha aproximación igual a 980 cm/s^{-2}, número que es el que habitualmente utilizamos en esta clase para los cálculos y problemas.

Insisto en que paséis al cuaderno de clase el problema resuelto en la pizarra por vuestro compañero Muñoz; el que tenga más ganas de trabajar que determine, por consideraciones newtonianas, la masa del Sol, cuestión fácil.