ACOTACIONES MATEMATICAS DEL CURSO PREUNIVERSITARIO

# Las coordenadas esféricas, la inversión en el espacio y la proyección estereográfica

Por ANTONIO RODRIGUEZ SOCORRO
(Prof. del Instituto de Enseñanza Media, de Toledo)

## 1. Las coordenadas esféricas.

Consideremos un triedro trirrectángulo, OXYZ, y un punto ,M, exterior a los ejes y con coordenadas $x'$, $y'$, $z'$ (fig. 1), que constituyen las llamadas cartesianas regulares. Si consideramos a M determinado por el ángulo $\theta$, longitud que varía de 0° a 180° o de 0° a — 180°, y que está formado por el ángulo entre el plano XOZ y el vertical ZOM, que pasa por M y por el ángulo $\varphi$, latitud, que varía de —90° a +90°, y que está formado por el ágnlo MOM″.

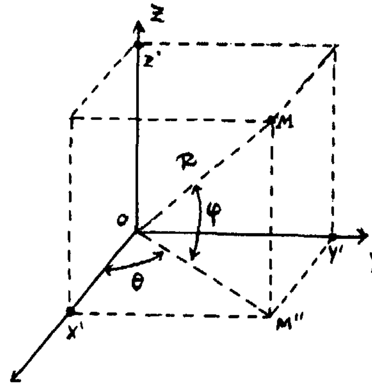


Fig. 1

Para hallar las coordenadas cartesianas del punto M en función de las esféricas del mismo R, $\theta$, $\varphi$, proyectamos sobre el XOY, deduciéndose fácilmente de la figura 1:

$$\begin{aligned} x' &= \mathrm{OM}'' \cdot \cos\theta = \mathrm{R} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \\ y' &= \mathrm{OM}'' \cdot \cos(90° - \theta) = \mathrm{R} \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\theta \\ z' &= \mathrm{R} \cdot \operatorname{sen}\varphi \end{aligned} \qquad [1]$$

## 2. La inversión en el espacio.

Fijado un punto, S, y un número real, K, se transforma M en $m$ por inversión de centro, S, si se verifica que $Sm \cdot SM = K$, siendo su valor mayor o menor que cero, respectivamente, según estén $m$ y M a un mismo o distinto lado del centro S. Es una transformación involutiva, por corresponder los puntos homólogos doblemente. Serán puntos dobles todos los correspondientes a la esfera de radio $\sqrt{K}$. Serán dobles las rectas que pasan por el centro S. Serán dobles los planos que pasan por el centro S

La figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por dicho centro y está contenida en el plano formado por la recta y el centro de inversión. El recíproco es cierto. La figura inversa de un plano que no pasa por el centro de inversión es una superficie esférica que pasa por él y cuyo diámetro por dicho punto es perpendicular al plano dado. El recíproco es cierto. La figura inversa de una superficie esférica que no pasa por el centro de inversión es otra superficie esférica homotética con la primera respecto del centro de inversión y con razón de homotecia $K/p$, siendo K la potencia de inversión y $p$ la potencia de S respecto de la superficie esférica primitiva.

## 3. La proyección estereográfica.

Sea la esfera (E) y el plano, P, que pasa por su centro, O (fig. 2). Se llama proyección estereográfica de un punto, M, de la esfera sobre el

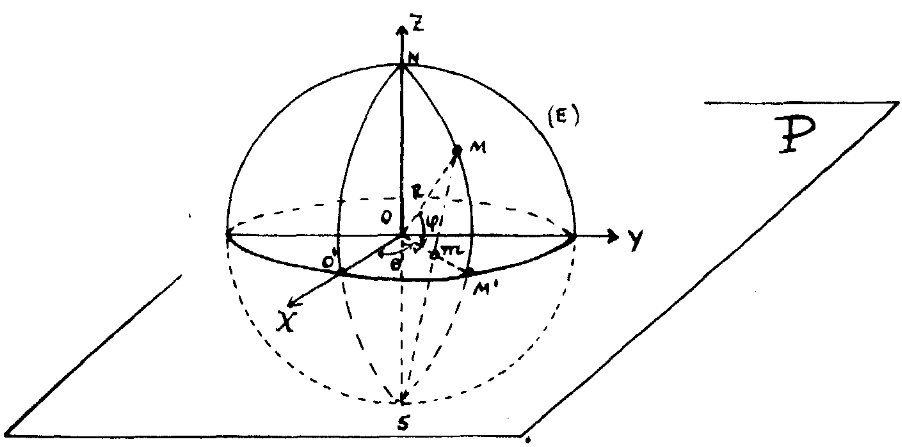


Fig. 2

plano P, al punto $m$ situado en el plano P y obtenido al trazar la recta SM, que une el punto M con la extremidad fija S del diámetro NOS de (E), perpendicular al plano P. Como los ángulos $SOm = SMN = 90°$, los triángulos $SOm$ y SMN son semejantes, verificándose

$$\frac{Sm}{SN} = \frac{SO}{SM},$$

y si es R el radio de la esfera, resultaría $Sm \cdot SM = 2 \cdot R^2$.

Luego la correspondencia que existe entre los puntos $m$ y M es de una *inversión en el espacio*. Consideremos el triedro de ejes rectangulares $Ox'$, $y'$, $z'$, tal que el punto $S(o, o, -R)$ y los ejes $Ox'$ y $Oy'$ estén en el plano P, y precisamente coincidiendo, respectivamente, con OX y OY. Entonces *la correspondencia entre el punto M y el punto* m *se traduce analíticamente* expresando las coordenadas $x$, $y$ de $m$ en función de la longitud $\theta$ y de la latitud $\varphi$ del punto M, referidas al meridiano que pasa por O'. Si $Om = r$, y tenemos en cuenta que los ángulos $NSM = \frac{1}{2} NOM =$

$$= \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi) = 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \text{ y que } r = Om = R \cdot \operatorname{tag}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

y fijándonos en la figura 2 se ve que

$$x = r \cdot \cos\theta = R \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{tag}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$y = r \cdot \operatorname{sen}\theta = R \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{tag}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

y como $M(x', y', z')$, se verifican para este punto las relaciones [1]. Entonces, teniendo en cuenta que

$$\operatorname{tag}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2 \operatorname{sen}(45^\circ + \varphi/2) \cdot \operatorname{sen}(45^\circ - \varphi/2)}{2 \operatorname{sen}(45^\circ + \varphi/2) \cdot \cos(45^\circ - \varphi/2)} =$$

$$= \frac{\cos\varphi - \cos 90^\circ}{\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen} 90^\circ} = \frac{\cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi},$$

serían

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \cos\theta \frac{\cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi} \\ y &= R \cdot \operatorname{sen}\theta \frac{\cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi} \end{aligned} \qquad [2]$$

Ahora bien, si queremos expresar esas coordenadas cartesianas de $m$ en función de las cartesianas de M, habría que hacer nuevas transformaciones. Para ello, teniendo en cuenta [1], se deduce:

$$\cos\,\theta = \frac{x'}{R \cdot \cos\,\varphi}$$

$$\operatorname{sen}\,\theta = \frac{y'}{R \cdot \cos\,\varphi}$$

$$\operatorname{sen}\,\varphi = \frac{z'}{R} \qquad [3]$$

$$x = R \cdot \frac{\cos\,\varphi}{1 + \operatorname{sen}\,\varphi} \cdot \frac{x'}{R \cdot \cos\,\varphi} = \frac{R \cdot x'}{R + z'}$$

$$y = R \cdot \frac{\cos\,\varphi}{1 + \operatorname{sen}\,\varphi} \cdot \frac{y'}{R \cdot \cos\,\varphi} = \frac{R \cdot y'}{R + z'}$$

Y si expresamos las razones

$$\frac{x}{x'} = \frac{R}{R + z'} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{t},$$

teniendo en cuenta que en la figura 1 severifica que $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$ y que $x' = x \cdot t$; $y' = y \cdot t$; $z' = R \cdot (t - l)$, es $(xt)^2 + (yt)^2 + R^2(t - l)^2 = R^2$, luego:

$$t = \frac{2 \cdot R^2}{x^2 + y^2 + R^2},$$

y entonces

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x \cdot \frac{2 \cdot R^2}{x^2 + y^2 + R^2} \\ y' &= y \cdot \frac{2 \cdot R^2}{x^2 + y^2 + R^2} \\ z' &= R \cdot \frac{R^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + R^2} \end{aligned}} \qquad [4]$$

relaciones que expresan las coordenadas cartesianas de M en función del radio de la esfera y de las coordenadas de la proyección estereográfica del mismo sobre el plano P.

Nota.—Hacemos constar que estas acotaciones nacieron de la lectura del libro de D. Julio Rey Pastor *Curso Cíclico de Matemáticas,* tomo I, 4.ª edición, Madrid-Buenos Aires, 1935, y en particular la página 276, en donde propone como ejercicio la deducción de las fórmulas [4] que hemos obtenido, aunque señale en el valor de $z'$ algún signo cambiado.

**editorial**

**BELLO**

EDICIONES DE OBRAS DE TEXTO

**Dirección comercial:**

Barcas, 5 y Grabador Esteve, 29 - Tel. 21 28 00 y 22 77 29

VALENCIA