GUIONES DE CLASE

ARITMETICA DE LA ESCALERA

Una lección de cálculo mental sobre un modelo imaginado para alumnos de 9 a 10 años

En los primeros grados de la Enseñanza primaria, como resultado de las experiencias observadas o realizadas por los niños, se llega a un tipo de intuición sensible que es la base del conocimiento matemático en este estadio de la educación. De esta intuición sensible debe ascenderse, por etapas sucesivas, a otro tipo de intuición que busca un apoyo en el concreto imaginado y que se realiza preferentemente por ejercicios de cálculo mental. Tales ejercicios, de un gran valor formativo, deben prodigarse en los primeros cursos del Bachillerato, y aun en las escuelas preparatorias para el ingreso en la Enseñanza Media.

Una escalera imaginada nos proporciona un modelo que, por su gran riqueza de situaciones dinámicas, se presta perfectamente para esta clase de ejercicios, a la vez que permite la introducción heurística, desde edades muy tempranas, de gran número de conceptos matemáticos, tanto aritméticos como geométricos.

En el último cursillo para profesores de Matemáticas organizado por el C. de O. D., y dirigido por el profesor Puig Adam, tuve ocasión de desarrollar ante los profesores cursillistas, y con alumnos de la Escuela preparatoria del Instituto de San Isidro, todos ellos menores de diez años, la siguiente lección experimental, de media hora de duración. No pretendí, naturalmente, en tan escaso tiempo, agotar todas las posibilidades de la situación, ni tampoco la introducción o toma de conciencia de un concepto determinado, sino solamente proporcionar a los cursillistas un ejemplo de clase activa de cálculo mental que utiliza como material un modelo imaginado tomado de la propia vida del alumno.

Transcribo sin alteración las contestaciones espontáneas de los niños.

«¿Sabéis lo que es una escalera?» «Sí, señor.» «¿Qué es más difícil: subir o bajar?» «Subir es más difícil.» «En vuestra clase de Aritmética, ¿habéis estudiado las escaleras?» «No, señor.» «En la Aritmética ¿hay alguna escalera? (Silencio.) ¡Pensad!» Un alumno dice tímidamente: «Los números uno, dos, tres..., forman como una escalera.» «¿Os parece eso una escalera?» «Sí, señor.» «¡Subid por ella!» Los alumnos cuentan: una, dos, tres..., hasta diez. «¿Se terminó?» «No, señor; sigue más: once, doce, trece...» Cuentan hasta veinte. «¿Se terminó?» «No, señor; se puede seguir más.» «¿Hasta ciento?» «Más.» «¿Hasta mil?» «Más.» «¿Hasta cuándo?» «No se termina nunca.» «Esa escalera de los números ¿hasta dónde llega?» Un alumno dice: «Hasta infinito.» Otro: «Hasta el cielo.» «Entonces, esta escalera es como la escala de Jacob: llega al cielo. Bien; habéis subido hasta veinte; ahora, bajad.» Los alumnos cuentan: veinte, diecinueve, dieciocho... «¿Qué es más difícil ahora: subir o bajar?» «¡Bajar!» «Pues entonces, vamos a subir, pero más de prisa.» Los alumnos cuentan como antes: una, dos, tres..., pero más rápido. «¡Más de prisa!» Lo hacen en la misma forma, pero más rápido. «Yo quiero subir más de prisa aún.» Un alumno: «Se puede subir de dos en dos.» «Muy bien; hazlo.» Dos, cuatro, seis..., veinte. «¿Se terminó?» «No, señor; se puede seguir.» «¡Bajad!» Lo hacen. «De tres en tres.» Lo hacen. «De cuatro en cuatro.» Lo hacen. «De cinco en cinco.» Lo hacen y dicen: «Ahora es más fácil.» «De siete en siete.» Lo hacen con bastante dificultad. «Bajad de siete en siete.» Casi todos tropiezan.

«Si estoy en el peldaño siete y subo ocho, ¿a qué peldaño llegaré?» «Al quince.» «¿Si estoy en el ocho y subo siete?» «También al quince.» «¿Si estoy en el quince y bajo ocho?» «Al siete.» «¿Si estoy en el quince y bajo siete?» «Al ocho.» «Si después de subir ocho llegué al quince, ¿en qué peldaño estaba?» «En el siete.» Si estaba en el siete y llegué al quince, ¿cuántos peldaños subí?» «Ocho.» «Si estaba en el quince y llegué al siete, ¿cuántos subí?» «No subí; bajé ocho.»

«¿Si estoy en el cuatro y bajo uno?» «Al tres.» «¿Si estoy en el cuatro y bajo dos?» «Al dos.» «¿Si bajo tres?» «Al uno. «¿Si bajo cuatro?» «Entonces llegamos al suelo; se acabó la escalera.» «¿Cómo llamaremos al suelo?» (Silencio.) «¿Qué número pondremos en el suelo?» «¡El cero!» «¿Si estoy en el peldaño cuatro y bajo cinco?» «No se puede, porque al bajar cuatro ya se llega al suelo.» «Bien; vosotros ¿habéis visto en Madrid edificios muy altos?» «Sí, señor: el edificio España, la Torre de Madrid.» «¿Cuántos pisos tiene el edificio España?» «Lo menos veinte; más.» Se entabla una discusión entre los niños y convienen en ir a contarlos. «Bueno; si os colocáis en la plaza de España y contáis los pisos que veis desde ella, ¿no tendrá el edificio más pisos?» Un alumno: «Sí, señor; tiene también sótanos que no se ven.» «¿Cómo será entonces la escalera?» «Desde el suelo hacia arriba, para ir a los pisos, y hacia abajo, para los sótanos.» «Entonces, en esa escalera, si estoy en el peldaño cuatro y bajo cinco, ¿a qué peldaño llego?» Un alumno: «¡A una décima!» «¿Y si bajo otro peldaño?» «¡A una centésima!» «¿Por qué?» «No sé.» «Me parece que nos hemos caído de la escalera; volvamos a ella. Estamos en el peldaño cuatro. ¿Bajamos uno?» «Llego al tres.» «¿Si bajamos dos?» «Llego al dos.» «¿Si bajamos tres?» «Llego al uno.» «¿Si bajamos cuatro?» «Al suelo.» «¿Si bajamos cinco?» «Entonces estamos en el suelo.» «¿En qué peldaño?» «En el uno, debajo del suelo.» «¿Si estoy en el cuatro y bajo seis?» «En el dos, debajo del suelo.» «¿Si ahora bajo tres?» «En el cinco.» «¿En el cinco? «Sí; en el cinco, debajo del suelo.» «¿Si bajo siete más?» «En el doce, debajo del suelo.» «¿Si ahora subo cuatro? «En el ocho, debajo del suelo.» «¿Si subo ocho?» «En el suelo.» «¿Qué número?» «El cero.» «Si estando en el siete, debajo del suelo, subo diez, ¿a cuál llego?» «Al tres, por encima del suelo.» «Si estaba en el tres, debajo del suelo, y llegué al diez, debajo del suelo, ¿qué es lo que hice?» «Bajar siete.» «Para ir del tres debajo del suelo al diez sobre el suelo, ¿qué tengo que hacer?» «Subir tres.»

«Si partiendo del suelo subo de tres en tres, ¿en qué peldaños pisaré?» «En el tres, seis, nueve, doce, quince...» «¿Cómo se llaman esos números?» «Múltiplos de tres.» «Si subiendo de cuatro en cuatro he dado siete pasos, ¿a qué peldaño he llegado?» «Al ventiocho.» «Si subiendo de cinco en cinco he llegado al treinta y cinco, ¿cuántos pasos he dado?» «Siete.» «Si di seis pasos y llegué al treinta, ¿cuántos peldaños subo en cada paso?» «Cinco.» «¿Cuántos pasos he de dar para llegar desde el suelo al veintiséis, subiendo de cuatro en cuatro?» Un alumno: «No se puede.» Otro: «Seis pasos y medio.» «¿Qué quiere decir medio paso?» «Que el último paso es la mitad.» «¿La mitad de qué?» «La mitad de cuatro peldaños, o sea dos peldaños.» «Si estoy en el peldaño cinco y subo de tres en tres, ¿en qué peldaños pisaré?» «Cinco, ocho, once, catorce, diecisiete, veinte...» «Estos números, ¿son múltiplos de tres?» «No, señor.» «¿Por qué?» «Porque no empecé en el suelo.» «¿Si hubiera comenzado desde el seis?» «Entonces, sí.» «Si estoy en el cinco y quiero llegar al veintitrés, ¿cuántos peldaños he de subir?» «Dieciocho.» «¿Puedo subir de tres en tres?» «Sí, señor.» «¿Cuántos pasos he de dar?» «Seis.

«Subiendo de dos en dos, ¿pisaré en el doce?» «Sí, señor.» «¿De tres en tres?» «Sí, señor.» «¿De cuatro en cuatro?» «También.» «¿De cinco en cinco?» «No, señor.» «¿De cuántas maneras puedo subir al doce?» «De dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro y de seis en seis.» «¿Alguna más?» «No, señor.» «Se os olvida la más fácil.» «Bueno, de uno en uno.» «¡Otra muy fácil!» «¡Ah! De una vez los doce.» «Esos números: uno, dos, tres, cuatro, seis y doce, ¿qué son?» «Submúltiplos de doce.» «¿Cómo se llaman también?» «No sabemos..» «Bien; los llamaremos divisores. ¿De cuántas maneras puedo subir al trece?» «De uno en uno y de trece en trece.» «¿Nada más?» «Nada más.» «¿Cuáles son los divisores de trece?» «El uno y el trece.» «¿Podrías decirme los divisores de dieciocho?» «Uno, dos, tres, cuatro (cuatro, no), seis, nueve y dieciocho.» «¿Cómo subiría la escalera si quiero pisar en el doce y también en el dieciocho?» «Puedo subir de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres; de cuatro en cuatro, ¡no!, porque no pisaría en el dieciocho; de seis en seis, y ninguno más.» «Esos números: uno, dos, tres, seis, ¿qué son?» «Divisores de doce, y también de dieciocho.» «¿Cómo subiría más rápido?» «De seis en seis.» «¿Por qué?» «Porque es el paso más largo posible.» «¿Qué número es el seis?» «El mayor.» «El mayor de quiénes?» «De los divisores de doce y de dieciocho.»

Me dirijo a un alumno: «¿Cómo te llamas?» «Juan.» «Bien, Juan; dime los peldaños que pisarás si subes la escalera de seis en seis.» Contesta: «Seis, doce, dieciocho, veinticuatro, treinta, treinta y seis, cuarenta y dos, cuarenta y ocho, cincuenta y cuatro, sesenta.» A otro alumno, llamado Pedro, le pido que suba de ocho en ocho. Enuncia: «Ocho, dieciséis, veinticuatro, treinta y dos, cuarenta, cuarenta y ocho, cincuenta y seis, sesenta y cuatro, setenta y dos, ochenta.» A un tercero: «¿En qué peldaños ha pisado

Juan?» Los repite. «¿En qué peldaños ha pisado Pedro?» Los repite. «¿Cómo se llaman los números de Juan?» «Múltiplos de seis.» «¿Y los de Pedro?» «Múltiplos de ocho.» «¿En qué peldaños han pisado Juan y Pedro?» Repite separadamente los de Juan y los de Pedro. «¿Juan ha pisado en el treinta y siete?» «Sí, señor.» «¿Y Pedro?» «No, señor.» Dime ahora los peldaños en que ha pisado Juan y también Pedro.» Tantea y dice: «Veinticuatro y cuarenta y ocho.» «¿Nada más?» «Nada más.» «Si siguen subiendo, ¿habrá más peldaños en que pisen los dos.» «Siguiendo, sí.» «Todos esos números en que pisan los dos, ¿qué son?» «Múltiplos de seis y múltiplos de ocho.» «¿Cuál es el primer peldaño que pisan uno y otro?» «El veinticuatro.» «Este número ¿es múltiplo de seis y de ocho?» «Sí, señor.» «¿Qué múltiplo es?» «El primero.» «No hay otro antes?» «De seis, sí; pero de los dos, de seis y de ocho, no, señor.»

«¿Estaréis fatigados?» «¡No, señor!»

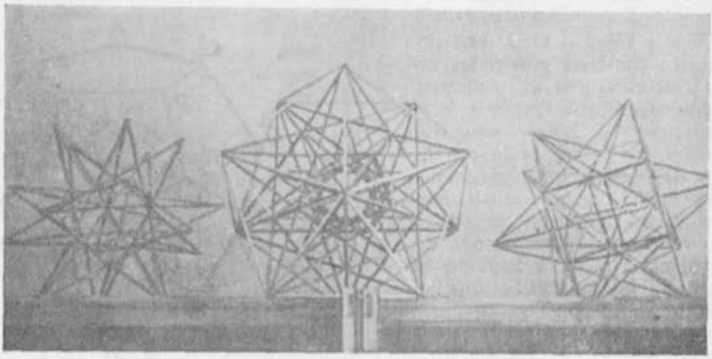
* * *

Aquí di por terminada la lección para dar tiempo a los profesores, una vez retirados los niños, a que hicieran los comentarios y críticas para ver de extraer consecuencias de la experiencia realizada.

La lección prueba que es posible, cuando se tiene un apoyo concreto, impulsar fuertemente la toma de conciencia de las relaciones que constituyen la esencia de la actividad matemática. Los niños han captado bien la reversibilidad de las operaciones aritméticas de suma y resta, por analogía con las de subir y bajar. Igualmente la multiplicación y división, tanto exacta como entera. Los verdaderos conceptos de las operaciones, en el sentido del Algebra moderna, con predominio del concepto de número ordinal sobre el de cardinal, están latentes en todas las lecciones. Igualmente, la divisibilidad aparece como relación de orden. La introducción de los números negativos es natural, y sugiere la cuestión de por qué se ha de retrasar su estudio al tercer curso del Bachillerato, cuando tal vez debiera hacerse antes de los fraccionarios; no tienen mayor dificultad. La contestación de un alumno al decir: «Una décima y una centésima», es muy significativa a este respecto. Está implícito en toda la lección el concepto de *anillo* fundamental en la Aritmética de los números enteros.

JOSÉ R. PASCUAL IBARRA.

MATERIAL MULTIVALENTE PARA LA GEOMETRIA DEL ESPACIO



De izquierda a derecha: dodecaedro de séptima especie, omnipoliedro estrellado y dodecaedro de tercera especie de caras estrelladas.

Una de las constantes preocupaciones de todos los profesores de Matemáticas ha sido la de facilitar a sus alumnos la comprensión de las relaciones espaciales.

Muy buenas soluciones se han dado ya a esta dificultad con los geoespacios del profesor Puig Adam, el material del profesor Fernández de Trocóniz y otros.

El deseo de que todos y cada uno de los alumnos pudieran manipular simultáneamente con el material y formar las figuras de que se está tratando en la clase, sin limitarse unos a contemplar lo que hacen los otros en las clases relativamente numerosas, nos sugirió la idea de que cada alumno se proveyese de un cierto número de agujas de tricotar para poder formar con ellas, uniéndolas con anillos elásticos, toda clase de figuras en el momento oportuno. No resultando suficientemente manejables éstas en todos los casos, las hemos sustituído por listones de madera de sección cuadrada y de 4 a 5 milímetros de lado y determinadas longitudes. En los extremos de estos listones, unas pequeñas hembrillas con la anilla un poco abierta facilitan la unión de unos con otros mediante las mismas gomitas que usábamos en las agujas de tricotar, quedando los vértices suficientemente fijos y desmontables con facilidad.

En las figuras cuya estructura no es triangular, los ángulos se deforman y no se consigue su estabilidad; para obtenerla se añaden a las caras las diagonales necesarias que les dan dicha estructura, y queda la figura deseada sólidamente construída.

Conviene tener clasificados los listones por tamaños, especialmente aquellos cuyas relaciones sean $1:\sqrt{2}$ y $(\sqrt{5}-1):2$. Los primeros nos permiten construir cuadrados con sus diagonales y el cubo con su conjugado el octaedro en una sola figura, siendo las aristas del uno mediatrices de las del otro. Los segundos, entre los cuales existe la proporción áurea, nos dan los lados y diagonales de un pentágono, las aristas del docaedro y su conjugado el icosaedro. También otros listones de medidas varias para formar toda clase de figuras. En estas medidas hay que incluir la longitud de las hembrillas que aumentan la del listón en 2,5 cm.

Los mismos alumnos en las clases de trabajos manuales preparan los listones con sierras de marquetería; después les ponen las hembrillas en los extremos, hundiéndolas más o menos, hasta alcanzar exactamente la longitud total que se desea. Una vez colocadas éstas, se liman los vértices de los listones, dando a sus extremos una forma piramidal o cónica, con lo que se facilita la unión de muchas aristas en un solo vértice, y queda la figura más perfecta y acabada.

Con este material han construído los alumnos las figuras necesarias para adquirir los primeros conceptos de ángulo poliedro cóncavo y convexo, sus propiedades, secciones, y todos los poliedros más conocidos, incluyendo con los poliedros regulares todas las combinaciones posibles de cada uno de ellos con los demás, así como las figuras derivadas de los mismos que, al construirlos, van intuyendo.

Como ampliación para los alumnos más aventajados y los de las clases superiores, intenté iniciarles en la construcción de los poliedros estrellados, idea que acogieron con interés y entusiasmo, consiguiendo construirlos todos, y, además, el omnipoliedro estrellado.

Estas figuras, aparte de su valor como estructura matemática, poseen un gran valor estético, debido a la proporción áurea que existe entre todos sus elementos. Han servido para decorar la clase, atraer más a los alumnos, despertar su interés y dar a conocer, aun a los visitantes más profanos en la materia, que también en las Matemáticas hay belleza.

Por si interesa a otros profesores, indicaré el camino seguido en su construcción.

DODECAEDRO DE SEPTIMA ESPECIE

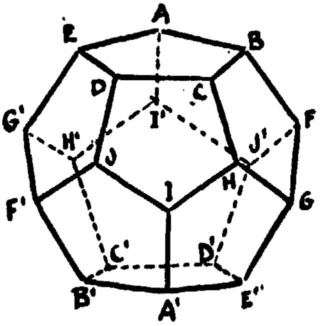


Fig 1

Doce caras pentagonales estrelladas.
Veinte ángulos triedros convexos.
Treinta aristas.