ULTIMA LECCION DEL DR. GOIG BOTELLA
EN EL INSTITUTO "LUIS VIVES" DE VALENCIA (*)

# Consideraciones sobre las masas inerte y gravitatoria. Consecuencias

ATRIBUTO esencial de la materia es su inercia mecánica, la incapacidad de un cuerpo para modificar por sí mismo su estado de reposo o de movimiento uniforme, es decir de adquirir una aceleración.

Esta aceleración solamente la alcanza el cuerpo cuando sobre él actúa una fuerza *exterior no equilibrada*. Y sucede que el cociente entre la fuerza actuante y la aceleración imprimida al cuerpo

$$\frac{t}{a} = m$$

es una magnitud característica de cada uno, que se llama masa inerte del mismo porque mide precisamente su inercia. De dos cuerpos dados, tendrá más inercia el que exija mayor fuerza para recibir la misma aceleración, o el que con la misma fuerza aplicada adquiera aceleración más pequeña.

Para un cuerpo en reposo, la masa inerte es la misma cualquiera que sea la dirección de la fuerza aplicada. Pero para un cuerpo en movimiento se distinguen dos masas inertes: la que corresponde a la componente de la fuerza aceleradora en la dirección del movimiento, llamada masa longitudinal, y la debida a la componente de dicha fuerza en dirección perpendicular a la del movimiento, llamada masa transversal, cuando la fuerza aplicada forma ángulo con la dirección del *movimiento*. Ambas masas son diferentes, tanto

(*) Pronunciada el 19 de noviembre último en el acto-homenaje que le fue rendido por el Claustro y Asociación de AA. AA. del citado Instituto, con motivo de su jubilación, y del que damos cuenta en otro lugar de este número.

más cuanto menor es la oblicuidad de la fuerza con la dirección del móvil.

Maupertius definió la masa inerte por la ecuación

$$m = \frac{fdt}{dv}$$

obtenida a partir del teorema del impulso. Representa la capacidad de un cuerpo para adquirir lo que se ha llamado clásicamente cantidad de movimiento, o ímpetu, según la denominación propuesta por Palacios.

La masa maupertuisiana no depende de la dirección del movimiento, pero sí de la velocidad del cuerpo como veremos. Coincide con la masa transversal y es la que tiene interés en Mecánica relativista.

En Mecánica clásica, la masa inerte se consideraba como magnitud aneja al cuerpo, e invariable tanto si este se hallaba quieto o se movía con cierta velocidad. Pero en la segunda memoria de Einstein sobre la teoría de la relatividad demostró éste que si $m_o$ es la masa de un cuerpo en reposo, la masa $m$ del mismo cuando se mueve con la velocidad $v$ es

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > m_o$$

siendo $c$ la velocidad de la luz.

El aumento de masa, inapreciable cuando $v$ es pequeña comparada con $c$, es netamente sensible cuando $v$ se aproxima a la velocidad de la luz, resultado confirmado, entre otros, por Ch. E. Guye operando con electrones de velocidades superiores a $10.000 \frac{Km}{seg.}$.

Y si la velocidad del cuerpo llegara a ser igual a la de la luz, su masa se haría infinita, como se deduce de la fórmula anterior.

La velocidad de la luz es la velocidad *récord* de la Naturaleza: para un cuerpo en movimiento, inalcanzable; para el transporte de energía, que como veremos también posee inercia, alcanzable si es energía radiante; para la transmisión de una perturbación producida en un punto de un cuerpo, un martillazo por ejemplo, que se propagará con mayor o menor rapidez, según la rigidez de aquél, pero que no podrá pasar la velocidad de la luz; para la transmisión de un campo eléctrico, etc. Y además, es un *récord* imbatible en fenómenos de los tipos citados.

El aumento de masa de un cuerpo en movimiento se debe a la energía cinética que posee. Einstein demuestra que toda energía $E$ posee una masa inerte

$$m = \frac{E}{c^2}$$

y que una variación de energía $\triangle E$ en un cuerpo entraña una variación correlativa de masa

$$\triangle m = \frac{\triangle E}{c^2}.$$

Así, un cuerpo caliente tiene mayor masa que frío.

La variación de masa de un cuerpo es inapreciable cuando su variación de energía es pequeña dado el valor de $c^2$. El mismo Einstein sugirió que la validez de la ecuación anterior, o su equivalente $\triangle E = c^2 \triangle m$, podía comprobarse en los fenómenos radiactivos, donde el desprendimiento de energía (pérdida de energía interna) es considerable, acarreando ello una pérdida de masa del elemento radiactivo. Y así sucede, en efecto: la masa de un elemento radiactivo es superior a la suma de las masas de sus descendientes y partículas emitidas, supuestas en reposo.

En los albores de la radiactividad, los físicos se inquietaron al observar un continuo desprendimiento de energía, sin transformación aparente del cuerpo, y temieron la quiebra del principio de la conservación de la energía. Cuando Rutherford y Soddy descubrieron que la radiactividad era un proceso de desintegración atómica volvió la tranquilidad al ánimo de los científicos. Pero al comprobar que la masa de los productos era inferior a la del átomo progenitor, pudieron temer la quiebra del principio de conservación de la masa, enunciada por Lavoissier, si Einstein no les hubiera prevenido con su ecuación

$$\triangle m = \frac{\triangle E}{c^2}$$

demostrativa de que masa y energía eran dos aspectos de una misma esencia, equivalente entre sí, siendo el factor de equivalencia $c^2$ para la masa, o $\frac{1}{c^2}$ para la energía.

Los dos principios de conservación aludidos quedaban de este modo englobados en un principio de conservación del conjunto masa-energía, que podemos enunciar así: «En un sistema aislado, la suma de la masa y de la energía que contiene, expresados en la misma unidad, permanece constante a través de todas las vicisitudes que sufra».

Este principio, que se cumple en todas las reacciones nucleares, naturales o artificiales, permite calcular fácilmente que por cada gramo de masa desaparecida se desprende una cantidad de energía de 25.000.000 de Kilowatios-hora.

De ahí el empeño del hombre en obtener energía de desmaterialización. Si el proceso empleado es de duración brevísima, los resultados son catastróficos (bombas atómicas). Si, por el contrario, es lento y regulable a voluntad, la energía obtenida puede utilizarse industrialmente (centrales eléctricas nucleares y motores marinos).

Además de su inercia, todo cuerpo es capaz de atraer y ser atraído por otro situado frente a él. Esta propiedad de la materia, llamada gravitación, no deja de ser sorprendente: un cuerpo puede hacer con otro lo que es incapaz de hacer consigo mismo. La aptitud gravitacional de un cuerpo viene expresada por una magnitud aneja al mismo, llamada masa gravitatoria, susceptible de definición cuantitativa intrínseca: 1.° Una masa gravitatoria $\mu$ es igual a otra $\mu'$ cuando situadas sucesivamente frente a una tercera, a la misma distancia, atraen a esta última con la misma fuerza; 2.° Una masa gravitatoria $\mu$ es $n$ veces mayor que otra $\mu'$ cuando atrae a una masa testigo con la misma fuerza que la atraerían $n$ masas iguales a la primera, juntas, y situadas a la misma distancia de la masa testigo que la primera.

La gravitación fue descubierta por Newton al estudiar la dinámica de los movimientos planetarios, cuya cinemática descubrió antes Kepler a partir de los datos astronómicos facilitados por Tycho-Brahe. Newton advirtió que la fuerza lateral capaz de desviar al planeta de su trayectoria rectilínea emanaba del Sol, y que aquél, por el principio de acción y de reacción ejercía sobre ésta otra fuerza atractiva del mismo valor y de sentido contrario. Mediante cálculos laboriosos, susceptibles de simplificación elemental, halló que el valor común de ambas fuerzas lo daba la ecuación

$$f = G\frac{mm'}{r^2},$$

donde $m$ y $m'$ son las masas inertes del Sol y del planeta, $r$ la distancia entre sus centros y $G$ una constante universal de proporcionalidad. Intuyó que esta ecuación es válida para cualquier pareja de cuerpos enfrentados y recibió el nombre de ley de gravitación universal. La constante de proporcionalidad $G$ se llamó constante de gravitación universal. Dicha constante no es un número abstracto; posee las dimensiones necesarias para que la ecuación de Newton sea homogénea y su presencia en dicha ecuación se debe a que Newton utilizó para obtenerla ecuaciones dinámicas donde figuraban masas inertes.

Las dimensiones inmediatas de $G$ son $[G] = [f]\ L^2\ M^{-2}$ y las absolutas $[G] = L^3M^{-1}T^{-2}$. Su valor numérico, que coincide con el de la fuerza con que se atraen dos masas unitarias separadas por la unidad de distancia es $G = 6.665 \times 10^{-11} \times$ newton $\times\ m^2 \times$ Kg$^{-2}$.

A pesar de la presencia de masas inertes en la ecuación de Newton, ya se dio cuenta éste de que dichas masas iban inseparablemente unidas en las gravitatorias respectivas y debían ser proporcionales a éstas.

Utilizando masas gravitatorias, la ecuación de Newton toma la forma más sencilla

$$f = K \frac{\mu\mu'}{r^2}$$

donde $K$ es un número que puede hacerse igual a 1 eligiendo convenientemente las unidades de medida. En efecto, si $\mu$ y $\mu'$ son las masas gravitatorias de dos cuerpos $A$ y $A'$, separados por la distancia $r$, $A$ ejerce sobre A' una fuerza $f'$ y $A'$ ejerce sobre $A$ otra fuerza $f$, ambas iguales en módulo, de idéntica dirección y sentidos opuestos. Por la definición cuantitativa de masa gravitatoria, $f'$ es proporcional a $\mu$ y $f$, proporcional a $\mu'$. Como $f = f'$, cualquiera de las dos es proporcional al producto $\mu\mu'$ y desde luego, inversamente proporcional a $r^2$, como había demostrado Newton. En consecuencia,

$$f = K \frac{\mu\mu'}{r^2},$$

siendo $K$ un coeficiente de proporcionalidad.

Si ahora tomamos como unidad de masa gravitatoria la que atrae a otra igual, situada a la unidad de distancia, con la unidad de fuerza, resulta

$$1 = K \frac{1^2}{1^2}$$

y, por tanto, $K = 1$. La ecuación de Newton toma entonces la forma

$$f = \frac{\mu\mu'}{r^2},$$

cuyo numerador es consecuencia inmediata de la definición cuantitativa intrínseca de masa gravitatoria, igual que sucede con la la ley de Coulomb, cuyo numerador es consecuencia obligada de la definición cuantitativa intrínseca de carga eléctrica.

Pero así como un conductor puede ser soporte de una carga eléctrica cualquiera, sin relación alguna con su masa inerte, en gravitación la masa gravitatoria de un cuerpo es inseparable de su masa inerte y además proporcional a ella, como ha confirmado Eötvös en 1922 mediante un experimento de altísima precisión. Podemos deducir teóricamente esta proporcionalidad del siguiente modo: Dos cuerpos $A$ y $A'$ idénticos (de igual substancia y del mismo volumen) tienen evidentemente la misma masa inerte $m$ e igual masa gravitatoria $\mu$. Separados por una distancia $r$, la fuerza de atracción mutua es

$$f = G \frac{m^2}{r^2}$$

y también

$$f = \frac{\mu^2}{r^2},$$

de donde $\mu^2 = G\,m^2$ y $\mu = \sqrt{G}\,m$. El coeficiente de proporcionalidad es $\sqrt{G}$.

Resulta pues, que no hay en la Naturaleza nada que tenga inercia que no pueda ser atraído por un cuerpo material. Así sucede con la luz. Desde Maxwell se sabía que al incidir la luz sobre una superficie reflectora ejercía sobre ésta una presión, llamada presión de radiación, lo que indicaba que la energía luminosa poseía ímpetu, como lo posee cualquier cuerpo lanzado con cierta velocidad. Como Einstein había demostrado que toda energía $E$ poseía una inercia

$$m = \frac{E}{c^2}$$

no era extraño que la luz llevara ímpetu.

Cuando Planck, por otro lado, llegó a la conclusión de que la energía transportada por una radiación luminosa de frecuencia $\nu$, en vez de distribuirse continuamente sobre la superficie de onda, estaba constituida por cantidades discretas de energía, o cuantos de luz, de valor $h\nu$ ($h$ = constante universal de Planck) que pasaban de un frente de onda al siguiente, con la velocidad $c$, pudo Einstein explicar el efecto fotoeléctrico admitiendo que estos cuantos de luz eran corpúsculos, que se llamaron fotones, de masa

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

y de ímpetu

$$p = m\,c = \frac{h\nu}{c}.$$

Los fotones, por tener masa inerte, deben llevar aneja la masa gravitatoria asociada a la primera, y un rayo de luz, que es un chorro de fotones, al cruzar el campo gravitatorio solar, debía curvarse por efecto de la atracción que sobre ellos ejerce el Sol, hecho que fue comprobado en el eclipse total del Sol de 1919, observando que la posición aparente de una estrella se desviaba de su posición real cierto ángulo que coincidió con buena aproximación con el calculado por Einstein.

No debe extrañarnos que un fotón, corpúsculo inerte que corre con la velocidad $c$ de la luz, tenga una masa finita, porque su masa en reposo $m_o$ es nula. El fotón, en reposo, no existe por carecer de energía. Si su masa en reposo es $m_o = 0$, la que posee cuando camina con la velocidad de la luz es

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{0}{\phantom{0}}$$

expresión indeterminada que puede ser satisfecha con cualquier valor de $m$. Y este valor es

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

como hemos visto.

Todo cuerpo material, la Tierra por ejemplo, crea en torno suyo un campo de fuerzas gravitatorias, debido a que su presencia modifica las propiedades geométricas del espacio que le rodea, imprimiéndole cierta curvatura. Situando en un punto de este campo otro cuerpo cualquiera, aparece sobre él una fuerza atractiva de valor

$$f = G\frac{mm'}{r^2} \quad \text{ó} \quad f = \frac{\mu\mu'}{r^2},$$

donde $m$ y $\mu$ son las masas inerte o gravitatoria de la Tierra, y $m'$ o $\mu'$ las del cuerpo.

El coeficiente

$$\frac{f}{m'} = G\frac{m}{r^2} = g,$$

es la aceleración de caída del cuerpo, llamada aceleración de la gravedad, y es el mismo para todos los situados a la misma distancia y del centro de la Tierra.

El coeficiente

$$\frac{f}{\mu'} = \frac{\mu}{r^2} = \gamma$$

es numéricamente igual al peso de la unidad de masa gravitatoria y se llama intensidad de la gravedad. Para un punto dado del campo gravitatorio terrestre $g$ *y* $\gamma$ son característicos del punto considerado, pero son magnitudes diferentes, con distintas dimensiones, siendo una masa gravitatoria la que acompaña a la unidad de masa inerte $\mu' = m'$ y entonces $\gamma = g$. Intensidad y aceleración de la gravedad vienen ahora expresadas por el mismo número, que a nivel del mar y 45° de latitud vale

$$9{,}80665\,\frac{\text{metro}}{\text{seg}^2} \text{ ó } \frac{\text{Newton}}{\text{Kg}}$$

(gravedad normal).

Pero semejante coincidencia se debe a haber identificado dos magnitudes distintas, escamoteando el factor

$$\frac{1}{\sqrt{G}}$$

que ha tomado el valor 1 y le hemos despojado de sus dimensiones.