Experiencias para introducir el concepto de volumen (*)

Por PILAR CELA
(Profesora del Colegio "Veritas")

Material.—Poliedros — especialmente *ortoedros* — de distintas sustancias y de varios tamaños.

Experiencias a realizar.—Para ver que a cada poliedro—*ortoedro*—le corresponde un número se pueden hacer las mismas experiencias que hemos hecho con los polígonos.

a) Se pesa un ortoedro P: le corresponderá un peso determinado. Observar que si nos dan otro ortoedro Q igual que P, en tamaño y materia, su peso será igual que el de P.

b) Si los dos ortoedros son del mismo material y de igual tamaño, ¿les corresponderá el mismo precio, valdrán lo mismo?

c) Introducir en una probeta graduada con agua el ortoedro cuyo volumen se quiera determinar. El agua sube de nivel. El exceso de agua es el volumen del cuerpo. Repetir la experiencia con otro ortoedro igual y observar que les corresponde el mismo exceso de agua, el mismo volumen.

Establecemos en estas experiencias una correspondencia: a cada ortoedro le corresponde un número, su precio, su peso, su volumen. Dados dos ortoedros iguales, les corresponde el mismo número, esto es:

Si $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$, $m(\mathbf{P}) = m(\mathbf{Q})$.

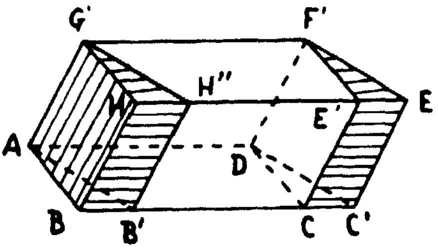
Si $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$, $m(\mathbf{P}) = m(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = m(\mathbf{P}_1) + m(\mathbf{P}_2)$.

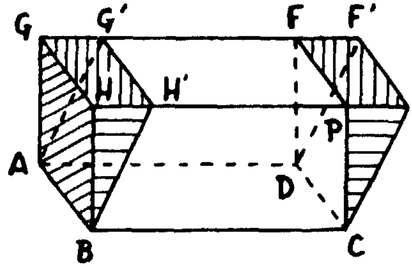
A los *poliedros* que en cualquiera de las experiencias les corresponda el mismo número, los llamaremos *equivalentes*.

Vamos a llegar al *concepto de equivalencia* entre dos poliedros, prescindiendo de las experiencias anteriores.

(*) Esta lección y las siguientes de Matemáticas fueron desarrolladas en el último Cursillo de Profesores Auxiliares.

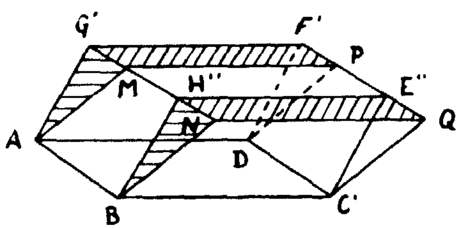
Partimos de un *ortoedro,* al que se le puede quitar una cuña ABGHG'H' y ponérsela por la cara opuesta.





Se pasa del ortoedro ABCDEFGH ⟶ ABCDE'F'G'H', que es un paralelepípedo más general.

Al cuerpo obtenido equivalente al dado se le puede hacer una experiencia análoga, cortando una cuña que tenga como filo la arista AG' y se obtiene un paralelepípedo más general. Para llegar al paralelepípedo último, por ser el más general, todas sus caras son paralelogramos, bastaría cortar al anteriormente obtenido una cuña que tenga por base, por filo, la tercera de las aristas que concurren en un mismo vértice A. La primera fué AB, la segunda la transforma de AG ⟶ AG' y ahora AD.



Por sucesivas transformaciones de cortar y sumar hemos pasado de ABCDEFGH a AB'C'DMNQP, del ortoedro a un paralelepípedo oblicuo, ambos equivalentes.

Primera definición de poliedros equivalentes:

Dos poliedros son equivalentes cuando se pueden descomponer en el mismo número de poliedros iguales.

Se puede pasar de un paralelepípedo cualquiera a un ortoedro siguiendo el proceso inverso al anterior.

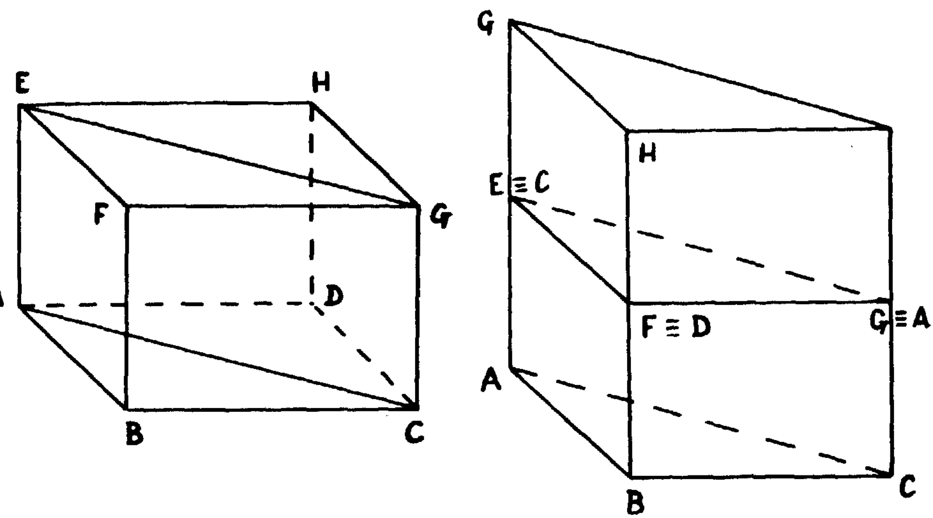
Es necesario adquirir mucha práctica en esto:

Pasar indistintamente de ortoedro a paralelepípedo o de éste a aquél, quitando y poniendo cuñas. Que manejen ahora los ortoedros exactamente igual que los rectángulos.

Dado un ortoedro vamos a descomponerlo en dos prismas triangulares iguales por medio del plano diagonal.

Son triángulos $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{ADC} = \overset{\triangle}{EFG} = \overset{\triangle}{EHG}$.

Sobre el $\overset{\triangle}{EFG}$ se pone el $\overset{\triangle}{ADC}$ de tal forma que coincidan y se obtiene un prisma triangular recto de base la mitad del rectángulo ABCD y altura doble de la del ortoedro dado $\overline{AE}$. Obtenido este pris-



ma de base un triángulo cualquiera, pasamos a otro que tenga por base un triángulo, uno de cuyos lados sea la unidad, siendo el triángulo equivalente al $\overset{\triangle}{ABC}$.

Cortando este prisma, se pasa a un ortoedro con una de las aristas igual a 1. Repitiendo este proceso en sucesivas transformaciones se puede llegar al ortoedro de base un cuadrado de lado, cuya altura es el volumen—por un proceso análogo al seguido en el plano—del paralelepípedo dado.

Se podría establecer esta serie de transformaciones:

1.° Paralelepípedo cualquiera $\rightarrow$.

2.° Ortoedro equivalente $\rightarrow$.

3.° Prisma triangular recto de base un triángulo rectángulo ⟶.

4.° Prisma triangular recto de base un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos sea la unidad ⟶.

5.° Ortoedro con una de las aristas igual a 1 ⟶.

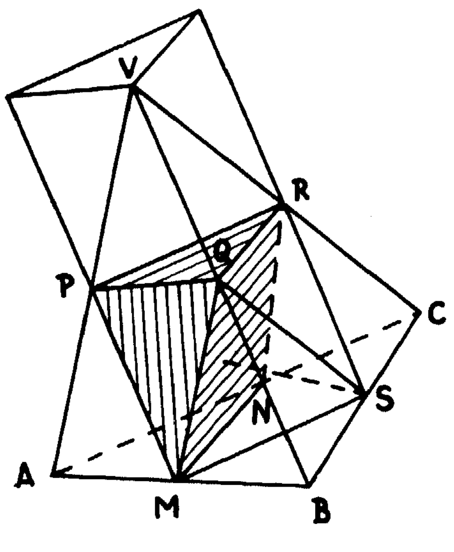
6.° Prisma triangular de altura 2 con base un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es la unidad.

7.° Ortoedro que tiene de altura 1, y como uno de los catetos era 1, será un ortoedro de cara un cuadrado de lado 1.

La altura de este ortoedro es variable. Entonces,

pareleleppípedo cualquiera → *altura* del ortoedro de base un cuadrado de lado 1.

Se puede observar que las transformaciones son sencillas, casi exclusivamente pasar de ortoedro a prisma triangular, procurando, según convenga, cambiar las bases de los cuerpos que se van obteniendo.



No se puede pasar, mediante un número finito de cortes, del tetraedro al ortoedro. Sabemos pasar de un prisma triangular a un ortoedro, pues bien, vamos a intentar, si es posible, descomponer el tetraedro en prismas triangulares.

Para ello, como indica la figura, trazando las paralelas medias de las caras del tetraedro, obtenemos el prisma triangular AMNPQR.

El tetraedro dado es suma:

1.° Del prisma triangular AMNPQR.

2.° De dos teatraedros iguales, por tener las bases iguales y la misma altura: V · PQR y Q · MBS.

3.° Prisma triangular: QMSRNC.

Los dos tetraedros, como es lógico, más pequeños que el dado, están respecto de él en la razón $\frac{1}{2}$. Con estos dos tetraedros volvemos a repetir el proceso anterior de descomposición.

Aparecerán, por tanto, de cada tetraedro: dos prismas y otros dos tetraedros iguales, de razón ½ y de razón ¼ respecto del primitivo tetraedro T.

Se puede ir repitiendo esta operación y se llega a una descomposición del tetraedro:

$$T = \Sigma P_i + \Sigma T_i,$$

en suma de prisma y de tetraedros que van siendo iguales entre sí en los sucesivos cortes.

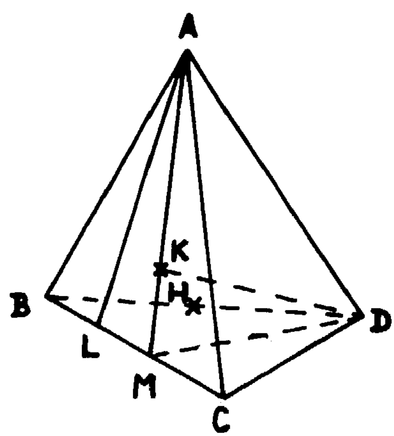
En la primera operación la razón de estos tetraedros respecto del dado T era $\dfrac{1}{2^1}$; en la segunda, $\dfrac{1}{2^2}$, y así sucesivamente.

Si son P_i, prismas triangulares, la razón de semejanza será $\dfrac{1}{2^i}$, siendo *i* el número de operaciones efectuadas, y el número de tetraedros, en la primera, era 2^1; en la segunda, 2^2, etc.; en la *i* será 2^i.

Estos 2^i se pueden colocar, como indica la figura, con los dos primeros obtenidos:

$$V \cdot PQR \qquad y \qquad Q \cdot MBS,$$

y llenarán, por así decir, la arista VB. Por tanto, todos estos tetraedros T_i, están dentro de un prisma triangular de arista VB siempre, aunque la base se va haciendo cada vez más pequeña. Luego la diferencia entre el tetraedro dado y la ΣP_i (suma de los prismas) se va haciendo, a medida que aumenta el número de operaciones, más pequeña, pudiendo, por lo mismo, llegar a ser tan pequeña como queramos. De este modo, dado un tetraedro, se puede obtener un ortoedro de base la unidad y hacer corresponder a dicho tetraedro, como volumen, la altura de dicho ortoedro. Nos dará un número aproximado, no exacto, del volumen.



Dado un tetraedro A · BCD, se traza la altura AH perpendicular a la base BCD. Por el punto H se traza la recta HL perpendicular a BC, y por el teorema de las tres perpendiculares, será AL ⊥ BC. Del mismo modo, por D, una recta perpendicular a la cara ABC. Por el punto K, una ⊥ a BC y se contiene el punto M que, unido con D, da la recta DM, perpendicular a BC, por el teorema de las tres perpendiculares.

Será ALH el rectilíneo correspondiente al diedro de arista BC. Lo mismo KMD, por tanto, dichos ángulos son iguales.

Además de tener los triángulos $\overset{\triangle}{ALH}$ y $\overset{\triangle}{DMK}$ estos ángulos iguales, son rectángulos en H y K, respectivamente; serán, entonces, los triángulos semejantes, y estableciendo la proporcionalidad de sus lados:

$$\overset{\triangle}{AHL} \backsim \overset{\triangle}{DKM}, \qquad \text{se verifica} \qquad \frac{AH}{AL} = \frac{DK}{DM}. \qquad [1]$$

Nota.—Observar que se han puesto los vértices homólogos de tal forma que se corresponden. Resulta más fácil para los niños, una vez dispuesto así el orden de los puntos. establecer la proporcionalidad, pues bastaría ver, en nuestro caso, que

AH es el primero y segundo
AL es el primero y tercero

y de igual forma serían

DK es el primero y segundo
DM es el primero y tercero.

Haciendo en [1] el producto de medios igual al de extremos:

$$AH \cdot DM = AL \cdot DK.$$

Multiplicando por $\overline{BC}$ los dos miembros:

$$AH \cdot \mathit{DM} \cdot \mathit{BC} = \mathit{AL} \cdot DK \cdot \mathit{BC};$$

pero DM · BC es el doble del área del triángulo $\overset{\triangle}{DBC}$ y AL · BC es el doble del área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$.

Sustituyendo estos valores:

$$\text{área (BCD)} \cdot \overline{AH} = \text{área (ABC)} \cdot \overline{DK}.$$

Luego el producto del área de una cara por la altura correspondiente es constante en todo tetraedro.

Resulta, por tanto, que dado un tetraedro T, le podemos hacer corresponder un número K · área · (ABC) · $\overline{DK}$:

$$T \longrightarrow K \cdot \text{área (ABC)} \cdot \overline{DK}.$$

Debe este número o esta correspondencia cumplir las dos propiedades ya estudiadas: la igualdad y la adición.

La igualdad.—Si son dos tetraedros iguales, tendrán iguales bases y alturas; por tanto, el producto es el mismo, luego se cumple la igualdad de estos mismos.

La adición.—Si el tetraedro A · BCD, T, es suma de otros dos:

$$A \cdot BCD = A \cdot BED + A \cdot EDC,$$

con la arista común AD, tomando como base BCD, la base del total es suma de las bases B_1 y B_2.

Tienen además estos dos tetraedros la misma altura h.

Será:

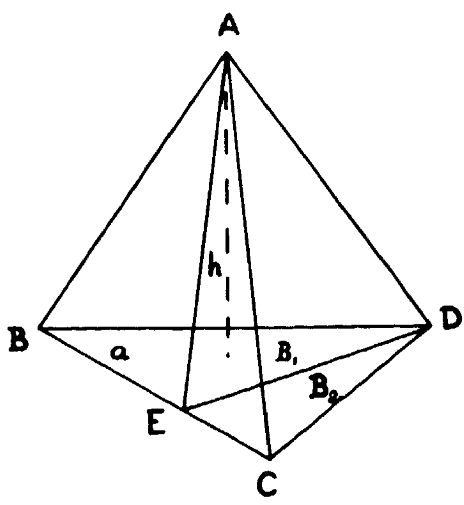
$$A \cdot BCD \longrightarrow K \cdot \text{área } (BED)h + K \cdot \text{área } (DEC)h =$$
$$= k[\text{área } (BED) + \text{área } DEC] \cdot h;$$

pero por la aditividad de las bases $= K \cdot$ área (BDC) $\cdot\, h$.

Este es un caso particular, puesto que además de tener los dos tetraedros una arista común, AD, tienen la recta AE, que pertenece a la cara ABC.

Resumiendo: a cada tetraedro $T \longrightarrow k \cdot$ área $(BCD)h$, número que cumple las dos propiedades, igualdad y adición.

Dado un poliedro cualquiera se puede descomponer en suma de tetraedros. Si el *poliedro es convexo,* se toma un punto interior y se une con los vértices. *Si no es convexo* se descompone en suma de poliedros convexos.



Definición. — Llamaremos medida de un poliedro P, $m'(P)$ al número suma de los números de los tetraedros en que se ha descompuesto dicho poliedro.

$$m'(P) \longrightarrow \Sigma m'(T_i),$$

recordando que $m'(T) = k \cdot$ área de una cara por altura correspondiente a esa cara.

De este modo, a cada poliedro le corresponde un número, que cumple, como en el caso del tetraedro, las dos propiedades fundamentales, igualdad y adición.

Si tenemos dos poliedros, P_1 y P_2, sin ningún punto interior común y los hemos descompuesto en suma de tetraedros, de tal forma que

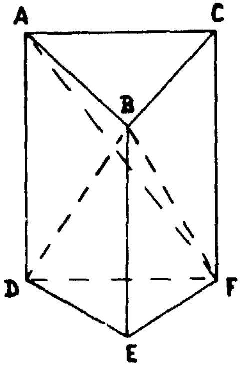
$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \Sigma T_i \\ P_2 = \Sigma T_i \end{array}\right\} \text{la medida } m'(P_1 + P_2) = m'(\Sigma T_i + \Sigma T'_i) =$$

$$= \Sigma m'(T_i) + \Sigma m'(T'_i) = m'(P_1) + m'(P_2).$$

La primera propiedad es evidente y también la segunda.

Es difícil ver que la medida $m'(P) \longrightarrow \Sigma m'(T_i)$ es independiente de la descomposición en tetraedros. (Por ello se les enunciaría esta propiedad a los alumnos y se les diría que se demuestra en matemáticas más superiores.)

Se plantea ahora otra cuestión más interesante: relacionar esta medida m' con la medida estudiada en los dos primeros cursos.



Dado el prisma triangular ABCDEF, se puede descomponer en tres tetraedros:

$$P = T_1 + T_2 + T_3.$$

El tetraedro F · ADB y el F · BDE tienen las bases iguales y la misma altura, luego la medida $m'(F \cdot ADB) = m'(F \cdot BDE)$. Del mismo modo, F · ABC y B · DEF tienen bases iguales por ser las del prisma y la misma altura, la del prisma dado; luego la medida

$$m'(F \cdot ABC) = m'(B \cdot DEF).$$

Por tanto, como el tetraedro B · DEF es el mismo en los dos casos, será también:

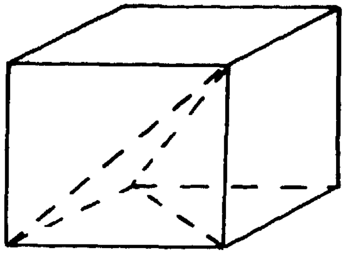
$$m'(F \cdot ADB) = m'(F \cdot ABC).$$

La medida del prisma P será la suma de las medidas de los tres tetraedros; al ser iguales estas medidas se verifica:

$$m'(P) = 3m'(T_1).$$

Una vez visto cómo se obtiene la medida de un prisma triangular mediante la descomposición en tetraedros, vamos a pasar a la de un cubo de arista 1 con el fin de determinar en la medida $m'(T) = k$ por área, cara por altura relativa a dicha cara ese factor k de proporcionalidad.

Hemos hecho antes la del prisma porque todo ortoedro—y un cubo es un ortoedro de aristas iguales—se puede descomponer mediante un plano diagonal en dos prismas triangulares iguales.



Por un lado, si la arista es 1, queremos hacer que $m'(C) = 1$. Se descompone en dos prismas triangulares y cada uno en tres tetraedros.

$$m'(C) = 6m'(T_1).$$

Cada T_1 tiene de área base $\frac{1}{2}$ y de altura 1 por k. Es decir, $m'(T_1) = k \frac{1}{2} \cdot 1$; luego

$$m'(C) = 6 \cdot k \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 = 3k;$$

pero como C era un cubo de arista 1, su medida era la unidad; luego

$$m'(C) = 3k = 1,$$

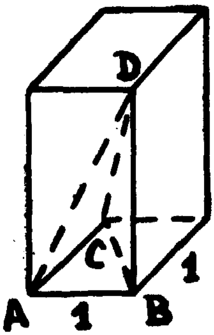
$$3k = 1, \qquad k = \frac{1}{3}$$

Si se toma como unidad el cubo, el factor vale 1/3, pero este factor varía al variar la unidad elegida. Basta sustituir este valor y tendremos:

$$T \longrightarrow 1/3 \text{ área cara} \times \text{altura relativa a dicha cara.}$$

Ahora estamos en las mejores condiciones de relacionar las dos medidas estudiadas, $m(T)$ y $m'(T)$, ¿cómo se relacionan?

Cortando el tetraedro T en suma de prismas, más un poliedro Q, formado por tetraedros que caben en un prisma triangular de altura la de T, pero de base tan pequeña como queramos. La $m'(Q)$ se podrá, al hacerse la base tan pequeña como queramos, muy pequeña también.



La ΣP, la suma de los prismas se puede transformar en un ortoedro de base cuadrangular (Or).

Será T = ortoedro + Q, simbólicamente.

$$T = Or + Q.$$

$$m'(T) = m'(Or) + m'(Q).$$

Ahora bien, vamos a ver quién es $m'(Or)$. Dado un ortoedro de base cuadrangular de lado $AB = 1$. Se descompone el ortoedro en seis tetraedros iguales, uno de ellos sería $D \cdot ABC$, $m'(Or) = 6m'(T)$. La medida de

D · ABC $\longrightarrow$ 1/3 · (área base ABC) · DB = 1/3 · ½ · m = m′(T).
Luego,

$$m'(\mathrm{Or}) = 6 \cdot \frac{1}{6} m \cdot (\Sigma \mathrm{P}).$$

Cada prisma se puede transformar en un ortoedro, pero el tetraedro T estaba descompuesto en varios prismas, luego ha de venir multiplicado por (ΣP):

$$m'(\mathrm{Or}) = m(\Sigma \mathrm{P}),$$

y sustituyendo

$$m'(\mathrm{T}) = m(\Sigma \mathrm{P}) + m'(\mathrm{Q});$$

$m'(\mathrm{Q})$ es un número que se puede hacer tan pequeño como se quiera; luego en el límite $m'(\mathrm{T}) = \text{lím. } m(\Sigma \mathrm{P})$.

Si resulta difícil de comprender, a los alumnos se les podría decir que son dos formas de medir, establecer, que es lo mismo, son equivalentes, pues tal vez les cueste captar todo. Convendría ver hasta dónde pueden llegar.