

CURSO  
PREUNIVERSITARIO

# OPTICA PARAXIAL

Por JUSTINIANO CASAS

(Catedrático de Optica en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza)

## INTRODUCCION DIDACTICA

AL ponerse en vigor con el curso 1960-61 las nuevas normas sobre Preuniversitario, a él pasó la Optica geométrica, que se venía explicando en el Selectivo de las Facultades de Ciencias. La disposición al efecto señalaba que su explicación se hiciera utilizando la notación contenida en las normas DIN 1,335; pero como en los escasos libros españoles de Optica apenas se han usado estas normas de símbolos y signos, era natural que se ignorasen, por lo que nuestros colegas dedicados a la enseñanza del Bachillerato nos hicieran muchas peticiones de ellas.

Para resolver el problema, hicimos estos apuntes que, de acuerdo con la Inspección de Enseñanza Media, fueron distribuidos a todos los Centros del Distrito Universitario de Zaragoza.

Hoy la misma Inspección, sin duda por considerar de utilidad su divulgación, nos invita con insistencia a publicarlos en la revista ENSEÑANZA MEDIA, a lo cual accedemos gustosos, pero no sin ciertos temores, por lo que queremos hacer algunas advertencias previas.

En principio, diremos con toda seriedad que no tenemos, ni muchísimo menos, la pretensión de que estos apuntes sean un modelo de capítulo de un libro de Bachillerato, pues no ignoramos que la literatura dirigida a muchos ha de ser muy diferente de esto. Sobradamente sabemos que las páginas que van a continuación son demasiado densas para ellos, y que pudieran no tener más interés que el de contener sistematizada con arreglo a las normas legales, una materia que, en general, en nuestros libros se encuentra con una ordenación que deja bastante que desear.

Por ello dejamos al cuidado de los profesores la importante tarea de exponerla en forma adecuada a los alumnos, y únicamente nos permitiremos hacer algunas observaciones de tipo didáctico fundadas en la experiencia adquirida enseñando Optica durante varios lustros.

*Experimentos.*—Es imprescindible que los alumnos vean, acompañando a la explicación del profesor en clase, una colección de experiencias para que se den cuenta de que las cuestiones que se explican corresponden a realidades físicas; para que cuando se induce una ley fundada en la experiencia les que-

de la tranquilidad de que realmente la experiencia apoya a la ley establecida. Esto es particularmente importante en los primeros años, cuando por falta de formación matemática no se puede apelar con tanta generalidad a este poderoso medio de síntesis y hay que atenerse a la justificación casuística de las cuestiones a enseñar.

Conviene, sin embargo, tomar ciertas precauciones cuando la clase se acompaña de experiencias, pues pudiera ocurrir que los efectos fueran más nocivos que provechosos.

En primer lugar, las experiencias deben ser correctas y convincentes sin lugar a dudas; que cuando el profesor diga que va a salir tal o cual cosa, salga efectivamente. Si no se tiene esta seguridad, lo mejor es no hacerla. Y si después de hecha, los alumnos no exclaman: «¡Estupendo!», lo mejor hubiera sido haberla evitado.

Los fallos en las experiencias de Óptica suelen tener su origen en la pobreza de luz o en la falta de monocromaticidad, por lo que aconsejamos para experiencias con luz blanca usar el arco eléctrico alimentado con corriente continua, tomando como fuente de luz el carbón positivo. Si se necesita luz monocromática, lo mejor es utilizar la lámpara de sodio o el mismo arco con un buen filtro.

Por otra parte, la experiencia debe ser oportuna, es decir, debe hacerse cuando realmente es necesaria para el conocimiento de un fenómeno, aclaración de un concepto físico o resultado de difícil interpretación. El hacer experiencias cuando la necesidad no lo requiere, es decir, cuando en la cara de los alumnos no se refleja la incredulidad o la incomprensión, es bastante inútil, pues aparte de producir generalmente la indisciplina de la clase, aburre al alumno de espíritu científico, al que ya su elaboración mental le había llevado al convencimiento de que las cosas debían suceder así, a la vez que detiene el discurso del mediocre, que invariablemente se queda en los detalles accesorios.

Estas experiencias es preferible sustituirlas por una invitación y conducción a pensar en hechos de la vida cotidiana sobre los cuales, al menos en su significado científico, los alumnos en general no han reparado.

Nos producen cierto temor esos escritos sobre didáctica de las ciencias experimentales en los que se aboga por una intuición masiva. El científico latino está invariablemente dotado de una imaginación extraordinaria que hemos de explotar al máximo, y no sólo no necesita de esa intuición, sino que la desprecia prefiriendo la abstracción. La intuición pestalozziana, de magníficos resultados para los pueblos nórdicos, debe ser cambiada en lo posible por una intuición abstracta para los latinos. Sin embargo, nuestros alumnos siempre están con deseo de poner manos en todo, y esto debe darnos la clave de nuestro sistema educativo: abstracción en la elaboración mental y, junto a ello, buenas dosis de laboratorio y taller.

No se nos oculta que la enseñanza llevada por estos procedimientos tro-

pieza con serias dificultades. La primera, la dedicación del profesor; después, la falta de tiempo. La dedicación del profesor no necesita comentario, y por lo que respecta a la falta de tiempo, sólo podemos decir que cuando los planes de estudios tienen seis u ocho asignaturas en cada curso, no se puede hacer otra cosa que despachar a los alumnos con abundante palabrería; o, lo que es igual, con mucha información pero sin formación, a pesar de que las últimas pruebas se llaman «pruebas de madurez».

Afortunadamente, se ha iniciado ya una reducción sustancial en los cursos de Bachillerato, que esperamos continúe con toda valentía.

*Problemas.*—Otro importante complemento de la clase son los problemas. La reacción del alumno ante un problema propuesto, le da al profesor la exacta información de los resultados de su obra.

Cuando el alumno puede recitar el libro, aun con claras muestras de que lo entiende, pero es incapaz de atacar con brío un problema, lo que sucede con frecuencia, el profesor debe pensar que le ha quedado algo muy importante por hacer. La educación científica debe conducirse de tal modo que el alumno, no sólo sepa resolver problemas, pues en esto consiste la preparación para la vida posterior, sino en que sienta verdadera complacencia en que se le propongan, pues el goce de haberlo resuelto adecuadamente siempre es inmediato.

Al iniciar a los alumnos en problemas de Óptica geométrica, es muy importante ser fieles a las normas de signos. ¡No se permita nunca operar con valores absolutos de las magnitudes! Esto es imprescindible. Nuestra experiencia nos dice que si se les consiente esta indisciplina, jamás harán un problema correctamente, y que, después de resolverlo «a su modo», tampoco sabrán dónde anda una imagen, si es real o virtual, directa o invertida.

No se nos oculta que meter a un muchacho en el molde de unas normas es tarea difícil y de paciencia, pero hay que hacerlo a toda costa so pena de perder el tiempo.

Para resolver esta cuestión, creemos necesario acompañar a las lecciones de clase de una extensa colección de problemas cuidadosamente ordenados por grado de dificultad. Los primeros ejemplos numéricos debe hacerlos el profesor. Después los hará el alumno ante el profesor para que se acostumbre al uso correcto de las normas; pero mientras no se tenga la seguridad de que se saben usar, no deberá dejarse que los alumnos hagan los problemas solos, confiando en los efectos de los buenos consejos.

Téngase en cuenta la tendencia natural de los alumnos, sin duda por su educación matemática, a razonar sobre las figuras en la Física como en las de la Geometría, sin darse mayor cuenta de que la Matemática no es la Física, sino una poderosa herramienta a la vez que un lenguaje claro y preciso para ella.

Muy conveniente consideramos que después de los ejemplos de problemas que se resuelvan en clase se les propongan algunos, dándoles de antemano

las soluciones para que, sabiendo a dónde tienen que llegar, puedan hacer autocrítica del camino elegido. El alumno habrá alcanzado la madurez cuando por sí solo sepa buscar el camino más adecuado y llegar a la solución correcta por sus propios medios.

Importante es hacer notar que no se debe permitir la resolución de un problema de óptica sin antes hacer un esquema de la posición de los datos, y, muy frecuentemente, ayudándose de los útiles de dibujo, resolver gráficamente los problemas numéricos.

La resolución gráfica, que es algo así como el esquema de una resolución experimental, debe poner al alumno en la realidad de los hechos, permitiéndole la crítica del resultado con un sentido claro de su valoración. Esta educación exige que el profesor cuide mucho al poner los datos con el fin de que respondan a realidades físicas.

Cuando el alumno no se sonroja, por ejemplo, al encontrar siete unidades para el valor de un índice de refracción, o que una esfera de 10 cm. de radio a 5 voltios carga 50 coulombios, hay que pensar que el muchacho está bastante lejos de haber adquirido el sentido común necesario para ser un físico.

## OPTICA GEOMETRICA

Si tenemos un punto, O (fig. 1), que emite luz en todas las direcciones y ponemos ante él un diafragma, D, con un agujero, por dicho agujero pasa un cono de luz que recibe el nombre de *haz*. Si detrás se pone una pantalla P,

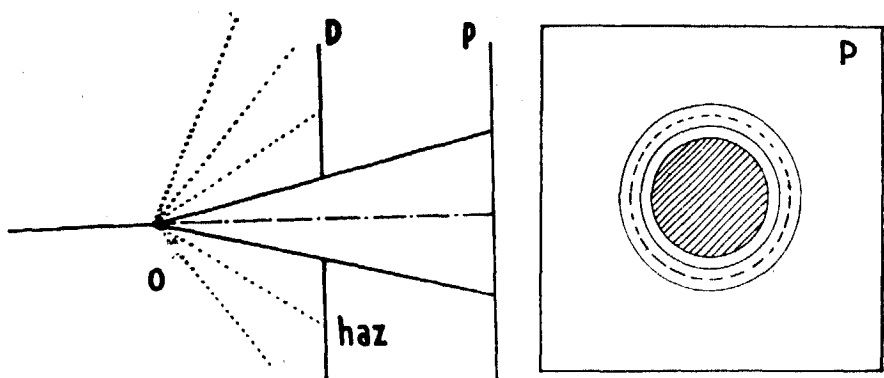


Fig. 1

en ella aparece un círculo iluminado que, a primera vista, tiene el diámetro que le corresponde por la geometría de la figura. Sin embargo, si se observa con aparatos de gran aumento, en sus bordes aparecen anillos de *difracción*,

debido al carácter ondulatorio de la luz, y que sólo se hacen perceptibles a simple vista cuando los agujeros son muy pequeños.

No obstante este fenómeno, haremos la suposición, que sólo es aproximada, de que la luz en los medios homogéneos e isótropos se propaga en *línea recta*, y definiremos el *rayo* de luz como una abstracción del haz suponiendo que es el límite de éste cuando el diámetro del agujero que lo delimita en la figura 1 tiende a cero. En este caso, una línea recta.

*Índice de refracción.*—Si la velocidad de la luz en el vacío es  $c$  y en un medio cualquiera es  $v$ , se define como índice de refracción de dicho medio,  $n$ , el cociente:

$$n = \frac{c}{v} \quad [1]$$

Un medio se llama *homogéneo* cuando tiene el mismo índice en todos los puntos; en caso contrario, *heterogéneo*. Si la luz tiene igual velocidad en todas las direcciones se llama *isótropo*; en caso contrario, *anisótropo*. En lo que sigue, mientras no se advierta lo contrario, supondremos que tratamos siempre con medios homogéneos e isótropos.

*Leyes de la Óptica geométrica.*—Las leyes por las que se rige esta parte de la Óptica son las llamadas *leyes de Descartes*, que dan la dirección de los rayos de luz cuando atraviesan superficies separadoras de medios de distinto índice.

Si llamamos (fig. 2)  $n$  y  $n'$  a los índices de los medios que separa la superficie  $S$ ,  $\epsilon$  y  $\epsilon'$  a los ángulos que el rayo incidente y refractado forman con la normal a  $S$  en el punto de incidencia  $I$ , las leyes de Descartes establecen:

I. En los medios homogéneos e isótropos, las trayectorias de la luz son rectas.

II. El rayo incidente, la normal y el rayo refractado están en el mismo plano.

III. Entre los ángulos de incidencia y de refracción existe la relación siguiente:

$$n \operatorname{sen} \epsilon = n' \operatorname{sen} \epsilon' \quad [2]$$

IV. Si se trata de una reflexión, el rayo incidente y el reflejado están en el mismo medio; por tanto,  $n = n'$ , y la reflexión puede considerarse como un caso particular de la refracción regida por la ley:

$$\epsilon = \epsilon' \quad [3]$$

Una consecuencia de la III es que si el rayo va en sentido contrario, formando un ángulo  $\epsilon'$  con la normal,  $\epsilon$  y  $\epsilon'$ , así como  $n$  y  $n'$  permutan sus papeles en la [2]; por tanto, las *trayectorias son reversibles*.

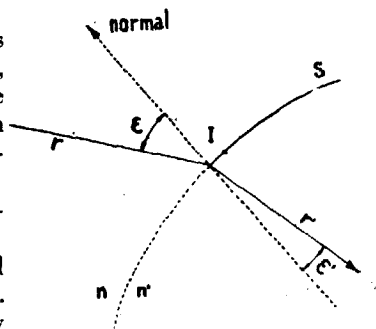


Fig. 2

**Camino óptico.**—Si la luz recorre en un medio de índice  $n$  un trayecto  $l$ , recibe el nombre de camino óptico la expresión

$$C. O. = nl \quad [4]$$



Si la trayectoria es una línea quebrada (fig. 3 b) con trayectos  $l_i$  en medio de índices  $n_i$ , el camino será:

$$C. O. = \sum n_i l_i \quad [5]$$

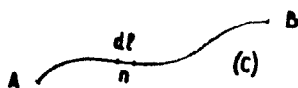


Fig. 3

Si se trata de un medio heterogéneo, con variación continua del índice, la trayectoria en general será curva, por lo que habrá que descomponer-  
la [5] en intervalos diferenciales,  $dl$ , dentro de los cuales el índice  $n$  pueda considerarse constante, e integrar:

$$C. O. = \int_A^B n dl = \int_A^B \frac{c}{v} dl = c \int_A^B \frac{dl}{v} = c \int_A^B dt = ct \quad [6]$$

Es decir, *el camino óptico puede interpretarse como el espacio que la luz recorrería en el mismo tiempo en el vacío.*

**Principio de Fermat.**—El principio de Fermat podría tomarse como postulado único de la Óptica geométrica, pues admitiéndolo resultan como teoremas todas las leyes de Descartes. Dicho principio establece que «*la trayectoria real que la luz sigue para ir de un punto A a otro B es tal, que el tiempo que emplea en ello es mínimo, o lo que es igual, según la (6), el camino óptico es mínimo*». A veces es máximo, pero como la investigación analítica de los máximos y mínimos es la misma (anular la primera derivada), esto no importa.

Con este criterio, obtengamos la ley de la refracción. Sea A un punto (fig. 4) que emite luz en todas las direcciones y tratemos de hallar el punto de inci-

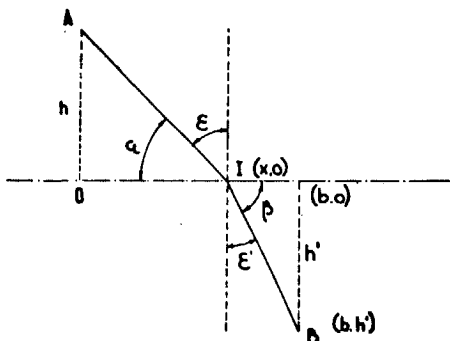


Fig. 4

dencia I, de coordenadas  $(x, o)$  del rayo que después de refractarse en la superficie de separación de los medios de índices  $n$  y  $n'$  pasa por B.

Si tomamos origen de coordenadas en O, el camino óptico será:

$$C. O. = n \overline{AI} + n' \overline{IB},$$

y de la figura se deduce fácilmente:

$$C. O. = n \sqrt{x^2 + h^2} + n' \sqrt{(b-x)^2 + h^2}$$

Derivando respecto a la única variable  $x$  y anulando la derivada:

$$\frac{d(C. O.)}{dx} = n \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} - n' \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + h^2}}$$

o bien  $n \cos \alpha - n' \cos \beta = 0,$

o sea  $n \sin \epsilon = n' \sin \epsilon'$

### SISTEMAS OPTICOS CENTRADOS

Un conjunto de superficies que separan medios de distinto índice (fig. 5) constituyen un *sistema óptico*. Si, como caso particular, estas superficies son

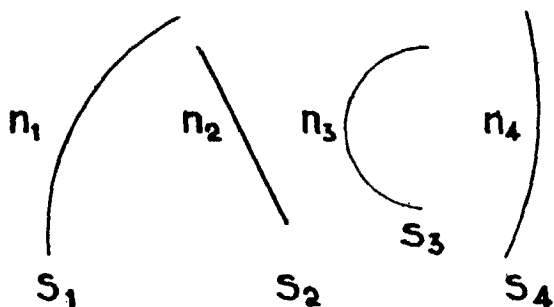


Fig. 5

esféricas y tienen todas sus centros en una recta, se tienen los *sistemas centrados*. La recta de centros se llama *eje del sistema*.

*Objeto e imagen*.—Si tenemos un punto O, emisor de rayos de luz ante

un sistema (fig. 6), puede ocurrir que después de reflejarse o refractarse en las distintas superficies los rayos que arrancando de  $O$  penetran en él, vuelvan a juntarse a la salida en otro punto  $O'$ . Si esto sucede, al punto  $O'$  se le llama

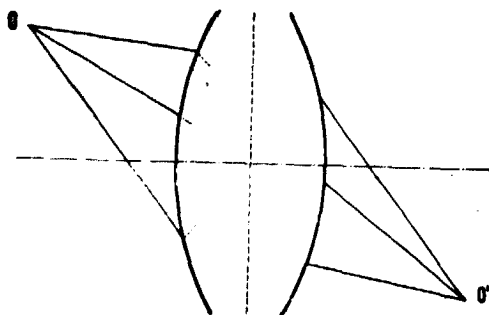


Fig. 6

imagen de  $O$  respecto del sistema, y a  $O$  punto objeto. Si, como en este caso, los rayos salen realmente de  $O$  y se cortan realmente en  $O'$ ,  $O$  es punto objeto real y  $O'$  punto imagen real.

Puede ocurrir (fig. 7) que los rayos a la salida sean divergentes, pero

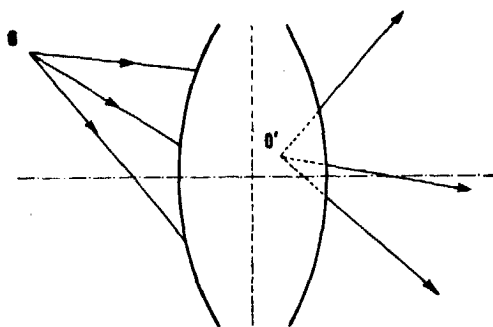


Fig. 7

que sus prolongaciones en sentido contrario al de propagación se corten en  $O'$ , en este caso  $O'$  se llama imagen virtual de  $O$ .

Cuando se acoplan dos sistemas (fig. 8), la imagen del primero sirve de objeto para el segundo. Si, como ocurre en este caso, el objeto para el segundo sistema,  $O_2$ , no llega a formarse realmente porque los rayos antes de concurrir en el punto  $O'_1 \equiv O_2$ , son desviados ya por el sistema II, se dice



que el segundo sistema trabaja con *objeto virtual*. El objeto virtual sólo puede existir en el caso de acoplamiento si ocurre lo que en la figura 8.

*Espacio objeto y espacio imagen.*—Se considera como *espacio objeto* de un sistema todo el espacio geométrico donde puede haber objetos, tanto reales

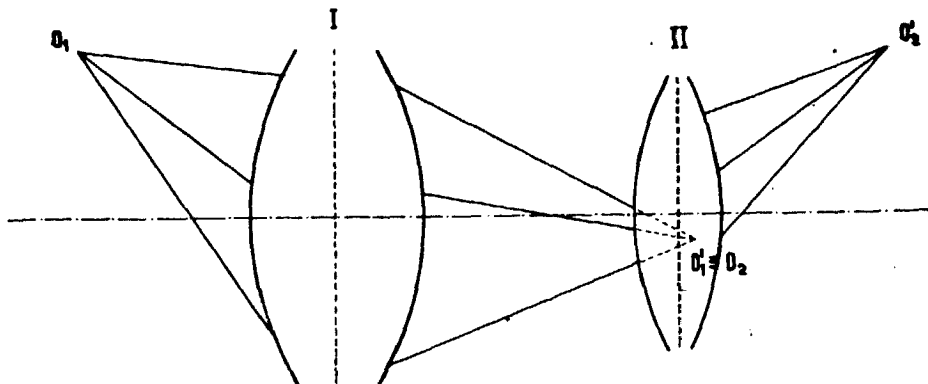


Fig. 8

como virtuales, y *espacio imagen* el espacio geométrico donde puede haber imágenes, tanto reales como virtuales; por tanto, todo el espacio es a la vez espacio objeto e imagen.

Aunque suele entenderse como espacio objeto toda la parte izquierda de un sistema, suponiendo que la luz va de izquierda a derecha, los objetos virtuales lo prolongan por la derecha, pero siempre en el entendimiento de que aunque un objeto virtual quede a la derecha o aparentemente dentro del sistema, se considera sumergido en el índice del medio de la izquierda. Lo mismo diríamos de las imágenes cambiando las palabras derecha e izquierda.

Si un punto  $O'$  es imagen de  $O$  respecto de un sistema óptico,  $O$  y  $O'$  se dice que son *puntos conjugados*. En general, dos figuras cualesquiera que son una imagen de la otra se dice que son conjugadas respecto del sistema.

*Sistema óptico perfecto.*—Un sistema óptico se dice que es perfecto para dos planos,  $\pi$  y  $\pi'$ , normales al eje (fig. 9), cuando tiene el siguiente comportamiento:

- 1) Todos los rayos que entran en el sistema procedentes de un punto cualquiera  $A$  del plano  $\pi$ , concurren a la salida en un punto  $A'$  de otro plano  $\pi'$  (condición de stigmatismo).
- 2) A los puntos de una recta contenida en  $\pi$  corresponden como imágenes los de otra recta contenida en  $\pi'$ .
- 3) A toda figura contenida en  $\pi$  corresponde como imagen otra conte-

nida en  $\pi'$ , semejante a la figura objeto, con razón de semejanza constante para cualquier par de figuras..

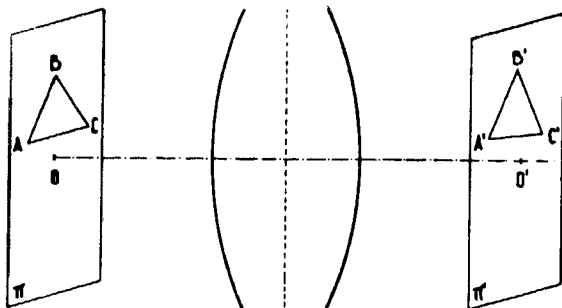


Fig. 9

Los sistemas que estudiaremos a continuación serán exclusivamente los centrados y supondremos que son siempre perfectos.

#### OPTICA PARAXIAL DE LOS SISTEMAS CENTRADOS

Supongamos (fig. 10) un sistema centrado ante el cual ponemos en O un objeto normal al eje, de tamaño  $y$ , tan pequeño como queramos. Pongamos

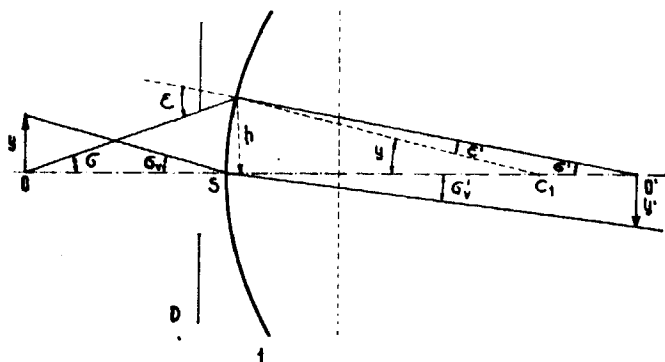


Fig. 10

también ante el sistema, para fijar ideas, un diafragma D con un agujero de diámetro muy pequeño, con lo cual las alturas de incidencia  $h$  de todos

los rayos que procedentes de los puntos de  $y$  penetran en el sistema serán también muy pequeñas.

En estas condiciones, si  $SO$  es finito, los ángulos de incidencia  $\epsilon$  y  $\epsilon'$ , los de los rayos con el eje,  $\sigma$  y  $\sigma'$ , y los ángulos de las normales con el eje,  $\varphi$ , serán también muy pequeños.

Si el tamaño del objeto y el diámetro del diafragma son tan pequeños y a su vez lo son los ángulos citados, que pueden sustituirse sus senos y tangentes por los arcos, se dice que el sistema trabaja en *zona paraxial* o *zona de Gauss*.

Puede demostrarse que en esta zona todos los sistemas centrados son perfectos para cualquier par de planos.

Como se ha dicho que cuando los agujeros son pequeños la difracción invalida totalmente las leyes de la Óptica geométrica, pudiera creerse a primera vista que la óptica paraxial es inútil, lo cual no es cierto, pues con ella no tratamos de resolver los problemas de sistemas donde las lentes trabajan con muy pequeños objetos y aberturas, sino los problemas de la zona central de sistemas que trabajan con grandes campos y aberturas. Si realmente los agujeros por donde ha de pasar la luz son muy pequeños, la Óptica geométrica es inútil. La Óptica paraxial es de gran utilidad, pues es la que se usa siempre para hacer los anteproyectos de los instrumentos ópticos.

*Superficie esférica.*—Supongamos una superficie esférica única de cen-

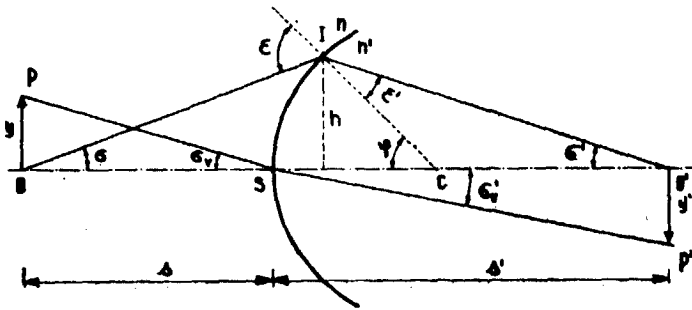


Fig. 11

tro  $C$  que separa dos medios de índices,  $n$  y  $n'$  (fig. 11), ante la cual ponemos un objeto,  $OP$ , lineal, de tamaño  $y$ .

Para hallar la imagen de  $y$  bastará hallar la imagen de  $O$  por medio de dos rayos cualesquiera. Tomemos el  $OS$ , que no se desviará por ser normal a todas las superficies del sistema, y el  $OI$ ; el punto  $O'$ , donde se cortan después de la refracción, será la imagen de  $O$ . La imagen  $y'$  estará en la perpendicular al eje por  $O'$ : Para hallar  $P'$  bastará trazar un rayo cualquiera des-

de P; por ejemplo, el PS. La intersección de su refractado con dicha perpendicular será P'.

NOTACIÓN.—En lo que sigue utilizaremos NORMAS DIN 1.335, que establecen lo que sigue:

Los elementos que hacen referencia al objeto se señalan con las mismas letras que los correspondientes de la imagen, pero los últimos acentuados.

Para las distancias en el eje se tomará como sentido positivo el de la luz incidente, que siempre será de izquierda a derecha, mientras no se advierta lo contrario. Así, las *distancias frontales*  $s$  y  $s'$  del vértice al objeto e imagen serán positivas si están a la derecha de S y negativas si a la izquierda, pues para ellas siempre se toma S como origen.

Los segmentos normales al eje serán positivos si están hacia arriba y negativos hacia abajo.

Los ángulos de incidencia  $\epsilon$  y  $\epsilon'$  serán positivos si al llevar el rayo, por giro, a coincidir con la normal por el camino más corto, se va en el sentido de las agujas de un reloj.

Los ángulos con el eje son positivos si al llevar la recta que los forma a coincidir con el eje, el giro se hace en sentido contrario al de las agujas del reloj.

En la figura 11 son positivos  $s'$ ,  $r$ ,  $h$ ,  $y$ ,  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$ ,  $\sigma'$  y el ángulo central  $\varphi$ . Son negativos  $y'$ ,  $s$ ,  $\sigma$  y también  $\sigma_0$  y  $\sigma'_0$ , considerados como ángulos de incidencia y refracción.

Los demás símbolos y convenios que se introducen en las páginas siguientes también corresponden a normas DIN.

Con este convenio, en la reflexión (fig. 12)  $\epsilon$  y  $\epsilon'$  serán siempre de signo

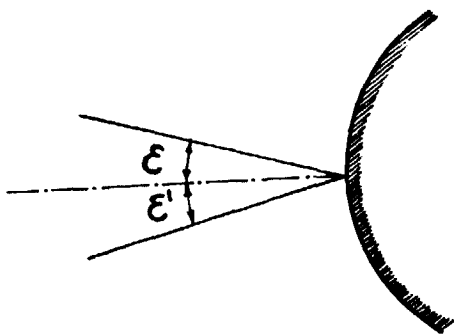


Fig. 12

contrario; por tanto, dicha ley se escribirá en la forma  $\epsilon = -\epsilon'$ , lo que equivale a una refracción con índices  $n$  y  $-n'$ , o sea,

$$n = -n'$$

*Invariante de Abbe.*—Tratemos de resolver el problema de hallar la posición de la imagen por su distancia frontal,  $s'$ , cuando se conoce la del objeto,  $s$ . En la figura 13 tomamos un punto objeto virtual,  $O$ , hacia el cual

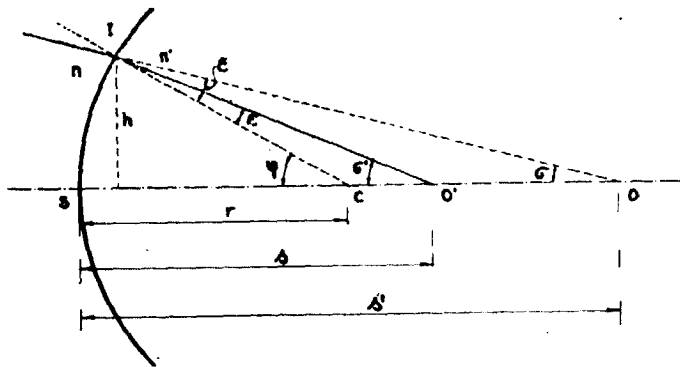


Fig. 13

apuntan los rayos  $IO$  y  $SO$ , que después de refractados se cortan en  $O'$  (imagen real). Esta figura tiene la ventaja de que aunque el objeto sea virtual, lo cual no resta generalidad, en ella todas las magnitudes son positivas.

Teniendo en cuenta que operamos en zona paraxial, es decir, el punto  $I$  está infinitamente próximo a  $S$ , y que los senos pueden sustituirse por los arcos, la ley de refracción será:

$$n\varepsilon = n'\varepsilon' \quad [8]$$

De la figura se deducen fácilmente las siguientes relaciones paraxiales:

$$\varepsilon = \varphi - \sigma \quad , \quad \varepsilon' = \varphi - \sigma' \quad , \quad \varphi = \frac{h}{r} \quad , \quad \sigma = \frac{h}{s} \quad , \quad \sigma' = \frac{h}{s'}$$

Sustituyéndolas todas en la [8] hasta no dejar ningún ángulo, se llega fácilmente a la siguiente igualdad:

$$n \left( \frac{h}{r} - \frac{h}{s} \right) = n' \left( \frac{h}{r} - \frac{h}{s'} \right) \quad [9]$$

Esta relación nos demuestra que la esfera en zona paraxial se comporta estigmáticamente para cualquier par de puntos conjugados,  $O$  y  $O'$ , pues fijado  $O$ , o lo que es igual,  $s$ , la [9] produce un valor único de  $s'$ , independientemente de  $h$ , ya que figura como factor común. Es decir, que cualquier rayo que sale de  $O$ , fijado por su  $h$ , irá a  $O'$ . El mismo razonamiento se puede aplicar a un sistema formado por varios dioptrios.

Suprimiendo  $h$  en la [9] se tiene:

$$n \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = n' \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right) \quad [10]$$

La expresión

$$n \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right)$$

que no varía de valor al escribirla para el espacio objeto o con los elementos correspondientes del espacio imagen, recibe el nombre de *invariante de Abbe*.

*Posición de la imagen.*—A partir de la [10] tenemos la siguiente relación:

$$\frac{1}{s'} = \frac{n}{n'} \frac{1}{s} + \frac{n' - n}{n'} \frac{1}{r} \quad [11]$$

que permite hallar  $s'$ , suponiendo conocido todo lo demás.

#### CASOS PARTICULARES

1. *Superficie plana.*—Haciendo en la [11]  $r = \infty$ , se tiene:

$$s' = \frac{n'}{n} s \quad [12]$$

2) *Reflexión. Espejo esférico.*—Haciendo en la [11]  $n = -n'$ ,

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \quad [13]$$

3) *Espejo plano.*—Haciendo en la [13]  $r = \infty$ , tenemos:

$$s' = -s \quad [14]$$

*Superficie esférica fuera de la zona paraxial* (altura de incidencia y ángulos finitos).

Si tratamos de resolver el mismo problema que anteriormente, pero fuera de la zona paraxial, no se podrán sustituir senos por ángulos. De la figura 14, en la cual suponemos conocidos  $n$ ,  $n'$ ,  $r$ ,  $s$  y  $\sigma$ , que son los datos que definen la superficie óptica y la posición del objeto y el rayo, obtenemos las siguientes relaciones:

Del triángulo ICO

$$\frac{CO}{\text{sen } \varepsilon} = \frac{CI}{\text{sen } \sigma}$$

o bien

$$\frac{s-r}{\text{sen } \epsilon} = \frac{r}{\text{sen } \sigma}$$

de donde

$$\text{sen } \epsilon = \frac{(s-r) \text{sen } \sigma}{r},$$

de la cual se obtiene  $\epsilon$ .

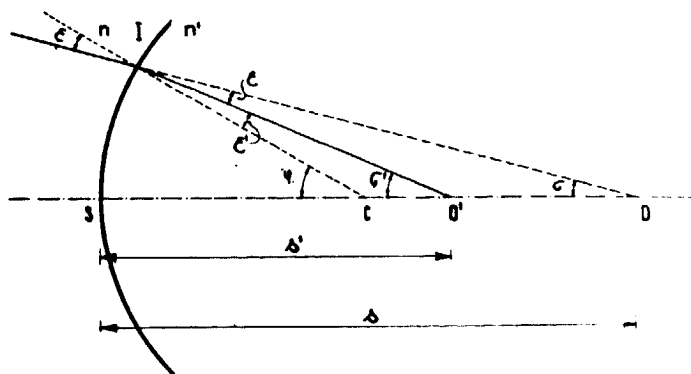


Fig. 14

Por la ley de refracción,  $n \text{ sen } \epsilon = n' \text{ sen } \epsilon'$ , obtenemos  $\epsilon'$ . Del triángulo  $ICO'$ :

$$\frac{CO'}{\text{sen } \epsilon'} = \frac{CI}{\text{sen } \sigma'}$$

o bien

$$\frac{s'-r}{\text{sen } \epsilon'} = \frac{r}{\text{sen } \sigma'}$$

pero

$$\sigma' = \varphi - \epsilon' \quad \text{y} \quad \varphi = \epsilon + \sigma,$$

o sea

$$\sigma' = \epsilon + \sigma - \epsilon'$$

todo conocido, por tanto,

$$s' = r + \frac{r \text{ sen } \epsilon'}{\text{sen } \sigma'}$$

con lo cual tenemos  $s'$ , que es lo que queríamos hallar.

*Ecuación de Lagrange-Helmholtz (zona paraxial).*—Esta ecuación relaciona el índice del espacio objeto, el tamaño del objeto y el ángulo  $\sigma$ , que un rayo que arranca del pie del objeto forma con el eje, con las magnitudes homólogas de la imagen. Si consideramos un sistema óptico de una sola

superficie (fig. 15), aplicando la ley de la refracción paraxial a los ángulos  $\sigma$  y  $\sigma'$ , se tiene:

$$n \sigma = n' \sigma' \quad [15]$$

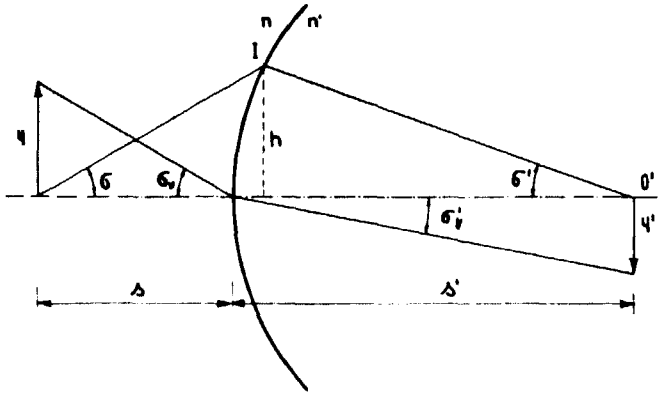


Fig. 15

De la figura

$$\sigma = \frac{y}{s} = \frac{y\sigma}{h}$$

pues

$$s = \frac{h}{\sigma}$$

y análogamente

$$\sigma' = \frac{y'}{s'} = \frac{y'\sigma'}{h}$$

Sustituyendo éstas en la [15] obtenemos:

$$ny\sigma = n'y'\sigma' \quad [16]$$

que es la ecuación para una sola superficie.

Si en lugar de una sola superficie tenemos un sistema de varias (fig. 16), podríamos escribir para cada una de ellas las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} n_1 y_1 \sigma_1 &= n'_1 y'_1 \sigma'_1 \\ n_2 y_2 \sigma_2 &= n'_2 y'_2 \sigma'_2 \\ \dots\dots\dots \\ n_k y_k \sigma_k &= n'_k y'_k \sigma'_k \end{aligned}$$



y teniendo en cuenta por la figura, que es el segundo miembro de cada una es igual al primero de la siguiente, ya que la imagen de una es objeto para la que le sigue, así como los índices y ángulos. Sumando y simplificando se tiene:

$$n_1 y_1 \sigma_1 = n'_k y'_k \sigma'_k \quad [17]$$

es decir, que el producto  $ny\sigma$  es invariante a través de un sistema de superficies. La [17] es la ecuación de L—H para un sistema completo.

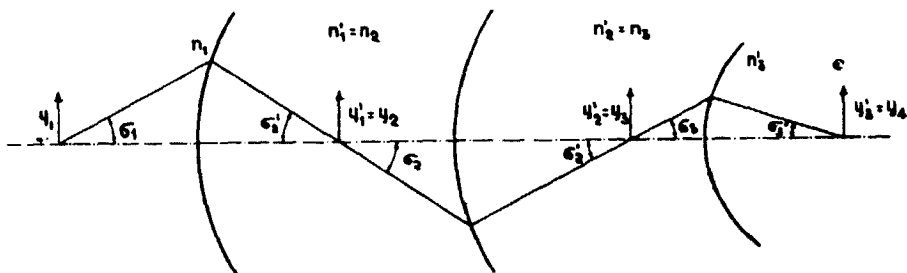


Fig. 16

*Aumentos.*—Si ante un sistema (fig. 17) ponemos un objeto lineal de tamaño  $y_1$  normal al eje, el sistema dará de él una imagen,  $y'_k$ , asimismo normal al eje.

La razón  $\frac{y'_k}{y_1} = \beta'$  recibe el nombre de *aumento lateral*.

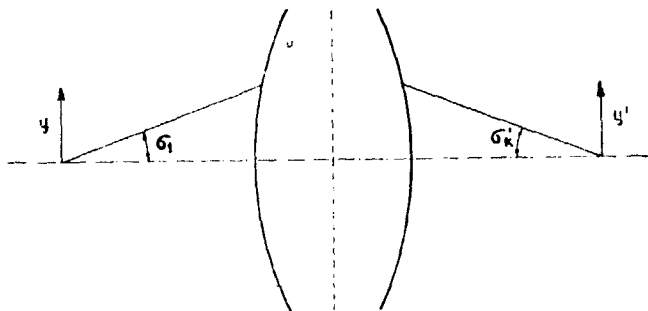


Fig. 17

Si del pie del objeto sale un rayo formando con el eje un ángulo  $\sigma_1$ , el

emergente irá al pie de la imagen formando un ángulo,  $\sigma'_k$ . La razón  $\frac{\sigma'_k}{\sigma_1} = \gamma'$  recibe el nombre de *aumento angular*.

De la relación de Helmholtz [17] se deducen las siguientes relaciones entre  $\beta'$  y  $\gamma'$ :

$$\beta' = \frac{y'_k}{y_i} = \frac{n_1}{n'_k} \frac{\sigma_1}{\sigma'_k} \quad [18]$$

y para sistemas sumergidos en medios de igual índice,  $n_1 = n'_k$ , se tiene:

$$\beta' = \frac{1}{\gamma'} \quad [19]$$

y si  $n_1 \neq n'_k$  ,  $\beta' = \frac{n_1}{n'_k} \frac{1}{\gamma'}$  [20]

*Elementos cardinales.*—Existen en los sistemas ópticos tres pares de puntos y otros tres de planos, que tienen especial importancia, a saber: los *focos y planos focales*, los *puntos y planos principales* y los *puntos y planos nodales*. Estos elementos se suelen llamar *cardinales*, y en ellos los aumentos toman valores particulares.

*Focos y planos focales.*—Si tomamos como punto objeto el del infinito del eje,  $O_\infty$  (fig. 18), el haz de rayos que procede de él entra en el sistema

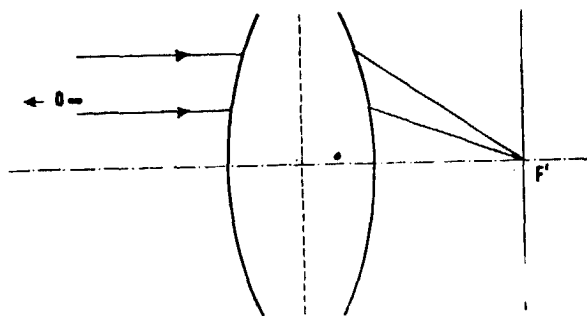


Fig. 18

será paralelo al eje. La imagen de  $O_\infty$ , cuando la luz va de izquierda a derecha, se llama *foco imagen* del sistema, y se designa por  $F'$ . El plano normal al eje por  $F'$  es el plano *focal imagen*.

Análogamente existe un punto  $F$ , tal que todos los rayos que arrancan de él salen del sistema paralelos al eje, o bien, que si entran paralelos al eje

por la derecha, a la salida concurren en F. Este punto F es el *foco objeto*, y el plano normal al eje por él es el *plano focal objeto* (fig. 19).

Por la relación de ángulos con el eje entre los rayos incidentes y emergentes, en estos casos, se ve que el aumento angular es infinito en el foco

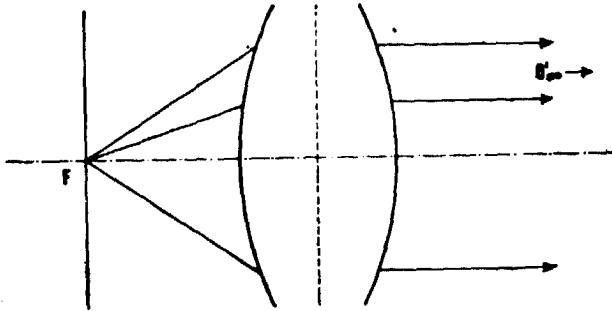


Fig. 19

imagen y cero en el foco objeto. Tanto el foco objeto como el imagen pueden ser reales o virtuales.

De la definición se deduce que el plano focal imagen es la imagen del plano del infinito, y el plano del infinito es la imagen del plano focal objeto; por tanto, todo haz que arranca de un punto P del plano focal objeto (figura 20 a) saldrá del sistema en forma de haz paralelo hacia el punto ima-

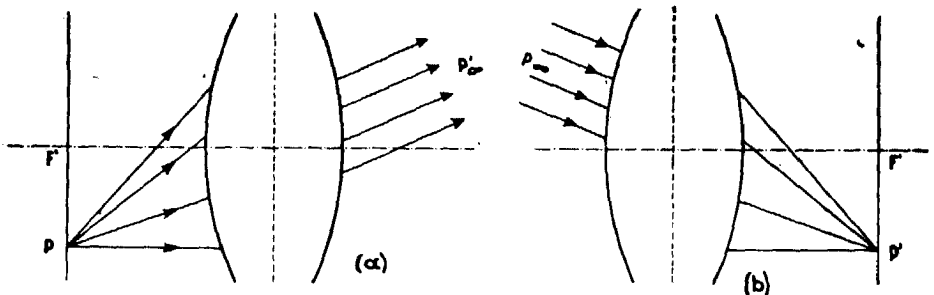


Fig. 20

gen  $P'_{\infty}$ , y análogamente, todo haz paralelo que en cualquier dirección penetra en el sistema, irá a concurrir a la salida en un punto del plano focal imagen,  $P'$  (fig. 20b).

*Planos y puntos principales.*—Se llaman planos principales, dos planos con-

jugados (uno imagen del otro) normales al eje, con aumento lateral  $+1$ . Sus puntos de intersección con el eje,  $H$  y  $H'$ , son los *puntos principales*, y al igual que los focos, pueden ser reales o virtuales.

De la definición se deduce que en todo haz de rayos que arranque de un punto del plano principal objeto y penetre en el sistema, o bien que entre en el sistema apuntado a un punto  $P$  del plano principal objeto (fig. 21),

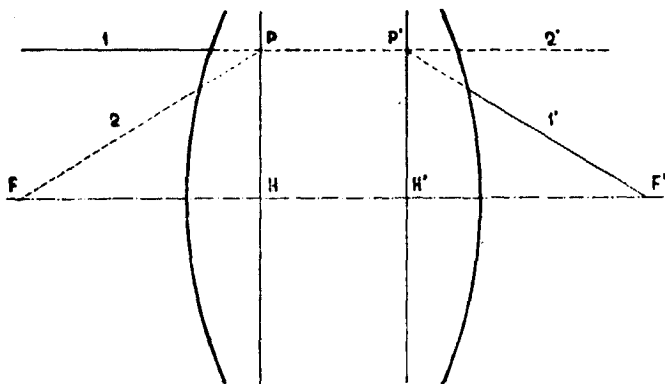


Fig. 21

emergerá concurriendo real o virtualmente en un punto  $P'$  del plano principal imagen, que está a la misma distancia del eje y en el mismo sentido que  $P$ .

La obtención de estos planos por método gráfico es sencilla, basta (fig. 21) trazar un rayo cualquiera paralelo al eje, como el 1, el cual, a la salida, pasará por el foco imagen  $F'$ . El punto  $P'$ , donde se cortan las prolongaciones del incidente y emergente,  $1$  y  $1'$ , pertenece al plano principal imagen, y éste será el normal al eje por  $P'$ , que determina el punto principal  $H'$ .

De igual modo, el rayo  $2'$ , que trazamos paralelo al eje, pero ahora de derecha a izquierda, saldrá por  $F$ . El punto  $P$ , donde el emergente corta la prolongación del que entra, determinará el plano principal objeto y el punto principal objeto,  $H$ .

Es fácil comprobar que los planos principales están bien determinados de este modo. En efecto, si trazamos los rayos  $1$  y  $2$  apuntando al punto  $P$  del plano principal objeto, éstos emergerán según  $1'$  y  $2'$  con intersección en  $P'$ ; por tanto,  $P'$  es la imagen de  $P$ , y  $HP = H'P'$ , luego la definición se cumple.

Hay que insistir en que los planos principales, así como los focales, no tienen existencia más que como entes paraxiales. En una superficie esférica; por ejemplo (fig. 22), un rayo como el 1, paralelo al eje, y el refractado  $1'$ , se cortan en  $P$ , y análogamente, el 2 y el  $2'$ ; luego los puntos de los dos

planos principales son los de la propia superficie (no plana). Los puntos principales están confundidos en el vértice.

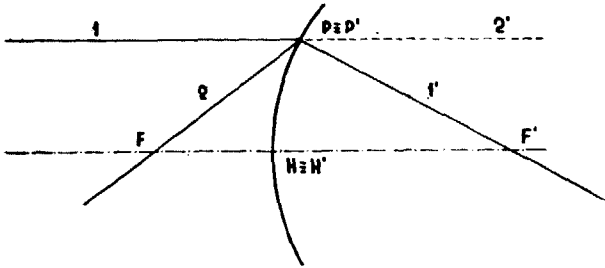


Fig. 22

En una lente delgada (fig. 23), haciendo la misma construcción que anteriormente, se ve que los planos principales están confundidos en la propia

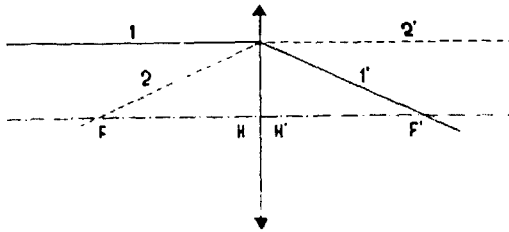


Fig. 23

lente. En un espejo, por la misma razón que en la superficie refringente, están en el propio espejo.

En una lente plano convexa gruesa de índice  $n$ , el plano principal imagen está en la superficie curva, ya que en ella se cortan los rayos paralelos al eje con sus emergentes; por tanto, el punto principal imagen  $H'$  estará en el vértice de dicha superficie. El punto principal objeto  $H$  será la imagen de  $H'$  dada por la superficie plana, considerando que la luz entra por la derecha, es decir,  $s_H = \frac{d}{n}$ , siendo  $d$  el espesor de la lente.

*Utilidad de los planos principales y focos.*—El conocimiento de las posiciones de planos principales y focos de un sistema es de tal utilidad que ello basta para resolver *todos* los problemas que se puedan presentar en la óptica paraxial, como son: trazado de rayos, posición de las imágenes, aumentos, etc.

En efecto, supongamos (fig. 24) un sistema del cual conocemos  $F$ ,  $F'$ ,  $H$  y  $H'$ . Supongamos un rayo cualquiera  $1$ , que entra en el sistema, y tratemos

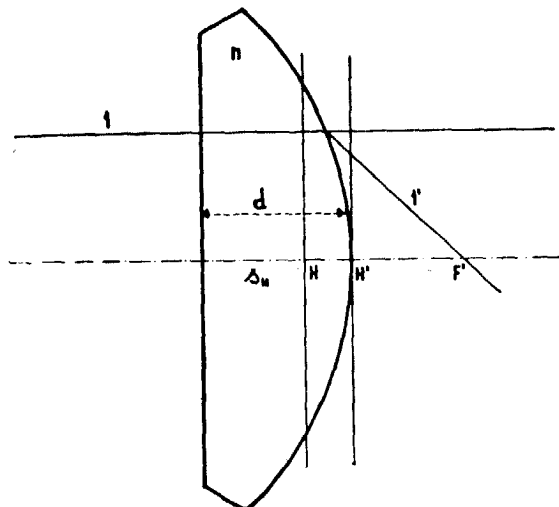


Fig. 23'

de hallar el emergente. Una vez que dicho rayo penetra en el sistema, no sabemos qué trayectoria seguirá, pero sí sabemos que si al entrar apunta

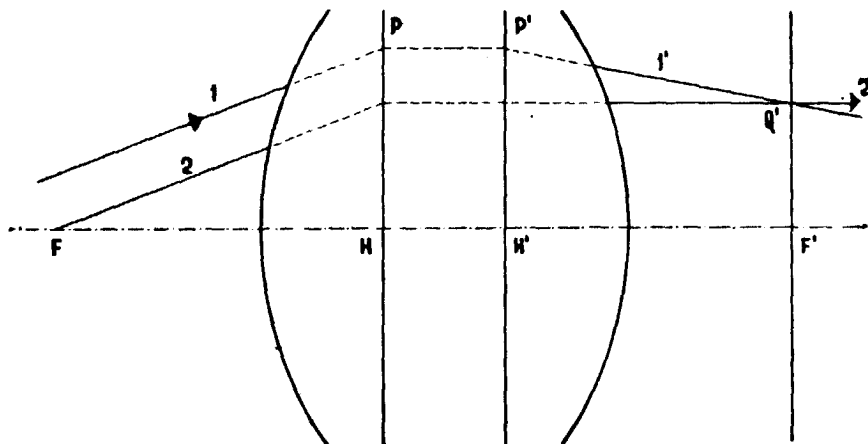


Fig. 24

al punto P del plano principal objeto, al salir lo hará pasando por P', a la misma altura que P, bien realmente o en su prolongación. Para hallar su dirección basta trazar por F otro paralelo al 1, como el 2, que saldrá según el 2', paralelo al eje. Pero como 1 y 2 son paralelos entre sí a la entrada, a la salida se cortarán en el mismo punto Q' del plano focal imagen, luego el rayo emergente del 1 pasará por P' y Q', y así queda determinado. Sabiendo trazar cualquier rayo se sabe hallar la imagen de cualquier punto, y todo está resuelto.

*Focal y potencia de un sistema.*—Se llama *distancia focal imagen*, o simplemente *focal imagen* de un sistema, a la distancia (fig. 25) H'F' desde el

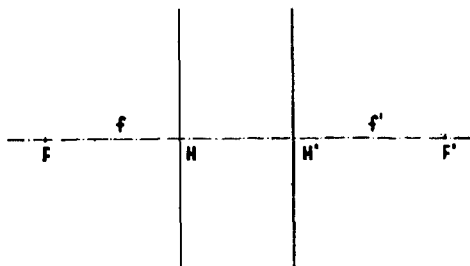


Fig. 25

punto principal imagen hasta el foco imagen, *precisamente* en este sentido, es decir,  $H'F' = f'$ .

Análogamente, la *focal objeto* es  $HF = f$ . Si estos segmentos con origen *siempre* en los puntos principales están dirigidos en el sentido de la luz, las focales son positivas, y si en sentido contrario, negativas.

El sistema de la figura 24 y el de la 25 tienen  $f$  negativa y  $f'$  positiva; el de la figura 26 tiene  $f$  positiva y  $f'$  negativa.

Se define como *potencia* de un sistema la *recíproca de la focal*. Designaremos la *potencia objeto* por  $\varphi = \frac{1}{f}$ , y la potencia imagen por  $\varphi' = \frac{1}{f'}$ .

Cuando la focal se mide en metros, la potencia se expresa en *dioptrías*.

Para obtener las focales de un dioptrio, teniendo en cuenta que los puntos principales están confundidos en el vértice, bastará hacer en la [11] sucesivamente  $s = \infty$ ,  $s' = \infty$ , con lo que se tendrá:

$$f' = r \frac{n'}{n' - n} \quad f = -r \frac{n}{n' - n}$$

y las potencias

$$\varphi' = \frac{n' - n}{n'r} \quad \text{y} \quad \varphi = \frac{n' - n}{nr}$$

Para el espejo, de la [13],

$$f = f' = -\frac{r}{2}$$

En general, procuraremos poner todas las ecuaciones de sistemas de modo que sólo intervengan las focales y potencias imagen por ser más cómodo.

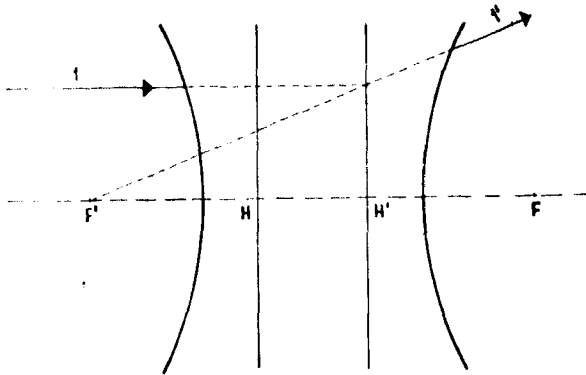


Fig. 26

*Relación entre las distancias focales objeto e imagen en un sistema.*—  
Sea (fig. 27) un sistema del que conocemos sus focos y puntos principales.

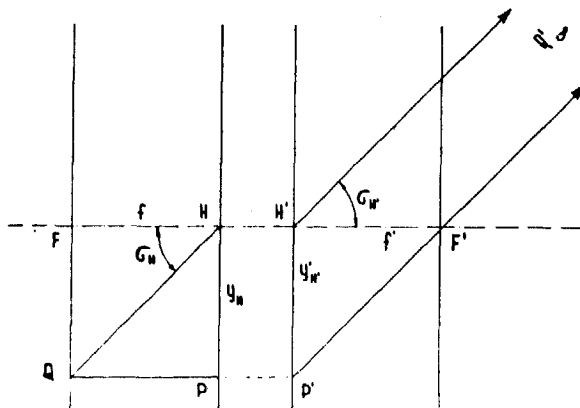


Fig. 27



Tomemos un punto Q en el plano focal objeto. Todos los rayos que arrancando de Q atraviesan el sistema (no dibujado), saldrán paralelos entre sí. Para fijar esta dirección tracemos el QP, paralelo al eje, que saldrá por P' a la misma altura en el plano principal imagen, y por entrar paralelo al eje, saldrá por el foco imagen F'. El rayo QH saldrá por H', imagen de H y paralelo a P'F'. Aplicando a los puntos H y H', en los que consideramos el objeto  $y$  y la imagen  $y'$ , por cuyos pies pasan los rayos que forman con el eje los ángulos  $\sigma$  y  $\sigma'$ , la ecuación de Helmholtz, en el supuesto de que los índices extremos del sistema son  $n$  y  $n'$ , será:

$$ny_H\sigma_H = n'y'_H\sigma'_H$$

pero 
$$\sigma_H = -\frac{y_H}{f} \quad \sigma_{H'} = \frac{y'_H}{f'} \quad y_H = y'_H$$

y sustituyendo éstas en la anterior, queda:

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \quad [22]$$

Para sistemas en aire o sumergidos en medios de índices iguales tendremos:

$$f = -f' \quad [23]$$

puede comprobarse que las [21] de la superficie esférica las satisfacen.

*Puntos nodales.*—Se llaman así dos puntos conjugados en el eje, N y N', para los cuales el aumento angular,  $\gamma'$ , es la unidad positiva. De la definición se deduce que todo rayo que entra en el sistema por el punto nodal objeto formando con el eje un ángulo  $\sigma$ , sale por el punto nodal imagen formando con el eje un ángulo  $\sigma' = \sigma$ .

Si en la figura 28 tratamos de hallar la imagen del punto Q situado en el plano focal objeto, sabemos que su imagen estará en el infinito Q', es decir, todos los rayos que parten de Q a la salida del sistema serán paralelos entre sí.

Tracemos el rayo QP paralelo al eje; el emergente suyo será P'F'. Todos los rayos que salen de Q emergerán paralelos a P'F'. Si en particular trazamos el QM, paralelo a P'F' su emergente saldrá paralelo a sí mismo; por tanto, este par de rayos determina los puntos nodales N y N' ya que en ellos es:

$$\sigma = \sigma'$$

De la figura se deduce por paralelismo e igualdad de triángulos que  $NH = N'H'$ ,  $NN' = HH'$ , y también que  $FN = f'$ , y que  $F'N' = f$ , ya que

los triángulos  $NHM$  y  $N'H'M'$  son iguales, como también lo son  $QFN$  y  $P'H'F'$ .

De lo cual se concluye que la distancia entre los puntos nodales es igual a la distancia entre los puntos principales y que en sistemas con índices extremos iguales, sus puntos principales y nodales coinciden, ya que

$$FN = f' = -f,$$

luego  $N$  coincide con  $H$ , y análogamente,  $N'$  con  $H'$ , y, en este caso, todo

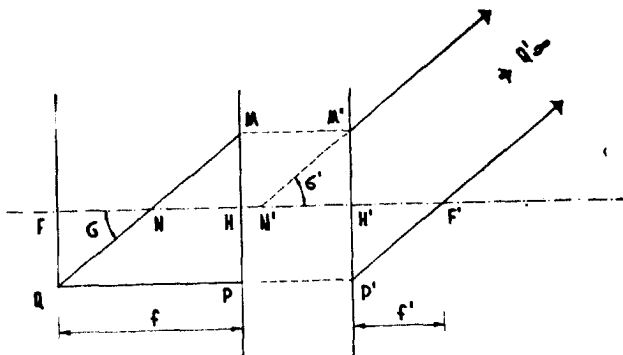


Fig. 28

rayo que apunta al punto principal objeto  $H$  sale por  $H'$  paralelo al entrante, lo cual tiene gran importancia para las construcciones gráficas.

### ECUACIONES DE CORRESPONDENCIA

Supongamos (fig. 29) un sistema definido por sus focos y puntos principales y tratemos de hallar las relaciones entre un objeto y con su imagen  $y'$ , tanto de posición como de aumento, etc.

1) *Orígenes en los focos.*—Si designamos por  $z$  y  $z'$  (fig. 29) las distancias  $FO$  y  $F'O'$ , precisamente en estos sentidos, y por  $a$  y  $a'$  las  $HO$  y  $H'O'$  (¡la focal siempre se toma de plano principal a foco, cualquiera que sea el origen para otras distancias!), teniendo en cuenta que  $HP = y'$  y que  $H'P' = y$ , de la semejanza de los triángulos  $OO_1F$  y  $FHR$  y de los  $P'H'F'$  y  $F'O'O'$ ; se deducen los siguientes sistemas de ecuaciones, teniendo en cuenta signos:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = -\frac{f}{a-f}, \quad \beta = \frac{y}{y'} = -\frac{z'}{f'} = -\frac{a'-f'}{f'} \quad [24]$$

(a)            (b)            (c)                    (a)            (b)            (c)

Estas ecuaciones resuelven *todos* los problemas que puedan plantearse. En efecto, por el solo hecho de conocer la posición del objeto o de la imagen respecto del foco objeto o imagen respectivamente, es decir,  $z$  o  $z'$ ,

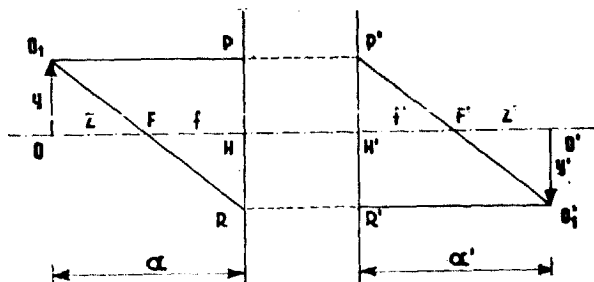


Fig. 29

se sabe el aumento según las (b) [24], y, por tanto, si la imagen es directa o invertida, teniendo en cuenta que a aumento positivo corresponde por definición imagen directa.

Igualando las (b), se tiene:

$$\frac{f}{z} = \frac{z'}{f'}, \quad \text{o bien} \quad zz' = ff' \quad [25]$$

que es la *ecuación de Newton*. Y para sistemas con índices extremos iguales ( $f = -f'$ ),

$$zz' = -f^2 \quad [26]$$

Lo que permite conocer  $z'$ , es decir, la distancia del foco imagen a la imagen y, por tanto, su posición cuando se conoce  $z$ . Nótese por la [26] que al ser siempre negativo su segundo miembro,  $O$  y  $O'$ , siempre están a distinto lado de  $F$  y  $F'$ , ya que  $z$  y  $z'$  son siempre de signo contrario.

2) *Orígenes en los puntos principales*.—Llamando  $a$  y  $a'$ , respectivamente, a las distancias de los puntos principales al objeto y a la imagen, e igualando las [24] (c), se tiene:

$$\frac{f}{a-f} = \frac{a'-f'}{f'}$$

y operando se llega fácilmente a la siguiente ecuación:

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1 \quad [27]$$

y poniendo 
$$f = \frac{-n}{n'} f'$$

se tiene 
$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{1}{f'} \quad [28]$$

y para sistemas con índices extremos iguales,

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} \quad [29]$$

que es la que se aplica ordinariamente a las lentes delgadas, siendo  $a$  y  $a'$  las distancias de la lente a objeto e imagen, ya que sus planos principales están confundidos en la propia lente.

*Aumento en función de las distancias ( $a$ ,  $a'$ ) de los puntos principales a objeto e imagen.*—De la segunda de las [24] (c) se tiene

$$\beta' = f' - a', \quad f' = 1 - \frac{a'}{f'}$$

y de la [28], multiplicando sus dos miembros por  $a'$ , dividiéndolos por  $n'$ , se saca  $\frac{a'}{f'}$ , lo que, sustituido en la anterior, da:

$$\beta' = \frac{n}{n'} \frac{a'}{a} \quad [30]$$

y para índices extremos iguales:

$$\beta' = \frac{a'}{a} \quad [31]$$

### SISTEMAS COMPUESTOS

Acoplemos dos sistemas, (1) y (2) (fig. 30), de los cuales se conocen sus focos y puntos principales. Sea  $t$  la distancia de acoplamiento entre el foco imagen del sistema (1) y el foco objeto del sistema (2), en el orden  $F'_1 F_2$ . A  $t$  se le llama *intervalo óptico*, y en la figura 30 es positivo. Si  $F'_1$  estuviera a la derecha de  $F_2$ ,  $t$  sería negativo.

Supongamos en principio conocidos los focos del sistema total  $F$  y  $F'$ . Para hallar la posición de los planos principales bastará trazar, como siempre, un rayo paralelo al eje del sistema a una altura  $h_1$ . Este rayo saldrá del sistema (1) por  $F'_1$ , y del (2) por  $F'$ , ya que entró paralelo al eje del sistema total.

El punto  $P'$ , donde se corta la prolongación de  $l$  con  $l'$ , pertenecerá al

plano principal imagen del sistema total, que determina  $H'$ . Análogamente, si se traza el rayo  $m$  en sentido inverso, se determina el punto  $P$ , y con él el punto principal objeto  $H$ .

De la construcción se deduce que en todo acoplamiento como el de la

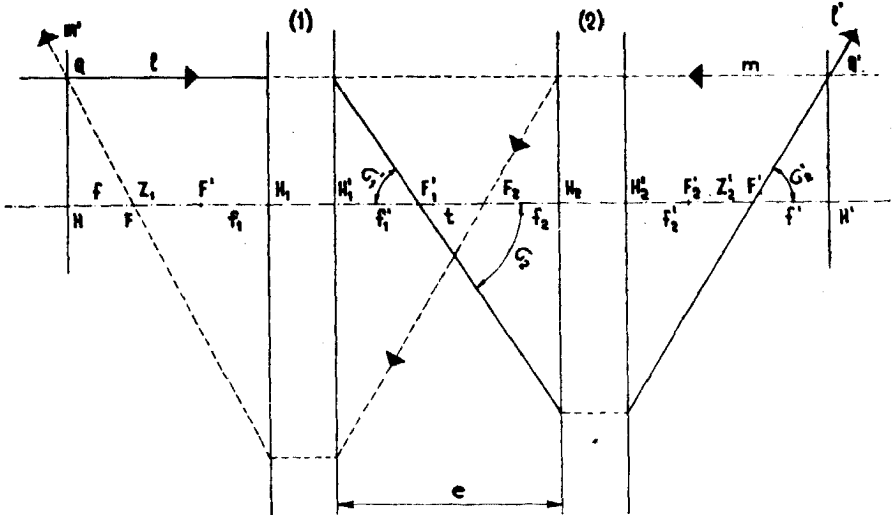


Fig. 30

figura 30,  $F$  y  $F_2$  son conjugados respecto del primer sistema, así como  $F'_1$  y  $F'$  lo son respecto del segundo.

Llamando  $z_1 = F_1F$  y  $z'_2 = F'_2F'$  y aplicando la ecuación de Newton a  $F$  y  $F_2$ , como conjugados respecto del sistema (1), se tiene:

$$z_1 t = f_1 f'_1$$

y análogamente, para  $F'_1$  y  $F'$  respecto de (2),

$$(-t) z'_2 = f_2 f'_2$$

de donde obtenemos las posiciones de los focos del sistema total referidas al foco objeto del primero y al foco imagen del segundo, pues de las anteriores se deduce:

$$z_1 = \frac{f_1 f'_1}{t} \quad , \quad z_2 = - \frac{f_2 f'_2}{t} \quad [32]$$

De la figura 30 se obtiene para las focales de sistema total:

$$f' = \frac{h_1}{\sigma'_2} = \frac{h_1}{\sigma'_1} \frac{\sigma_2}{\sigma'_2} \quad [33]$$

Ya que

$$\sigma'_1 = \sigma_2$$

Pero  $\sigma_2/\sigma'_1$  representa el recíproco del aumento angular que produciría el segundo sistema de un objeto situado en  $F'_1$ , cuyo aumento designaremos por  $\gamma'_2$ . Teniendo en cuenta esto y la figura, podemos escribir las siguientes igualdades:

$$\frac{h_1}{\sigma'_1} = f'_1, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma'_2} = \frac{1}{\gamma'_2}, \quad \frac{1}{\gamma'_2} = \frac{n'_2}{n_2} \cdot \beta'_2$$

En la última de ellas,  $\beta'_2$  representa el aumento lateral que de un objeto en  $F'_1$  produciría el segundo sistema, que, según la [20], está así relacionado con el angular. Por otra parte, según las [24] (b),

$$\beta'_2 = -f_2/(-t),$$

y también sabemos que las focales en un sistema están en la relación

$$f'_2 = -\frac{n'_2}{n_1} f_2$$

Llevando todo esto a la [33] se tiene fácilmente:

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{t} \quad [34]$$

Procediendo de modo análogo se obtiene para la focal objeto:

$$f = \frac{f_1 f_2}{t} \quad [35]$$

Conocidas las focales del sistema total, basta llevarlas, teniendo en cuenta el signo, a partir de los focos, para tener las posiciones de los planos principales.

Si en lugar de referir estas ecuaciones a la distancia de acoplamiento entre los focos, introducimos la de acoplamiento entre los puntos principales  $H'_1$  y  $H_2$ , llamando  $e = H'_1 H_2$ , y teniendo en cuenta por la figura 30 que:

$$t = e - f'_1 + f_2 \quad [36]$$

se tendrá por la [34]:

$$f = \frac{f'_1 f'_2}{e - f'_1 + f_2}$$

y para la potencia

$$\varphi' = \frac{1}{f'_1} = \frac{1}{f'_2} - \frac{f_2}{f'_1 f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2} = \varphi'_2 + \varphi'_1 \frac{n_1}{n'_2} - e \varphi'_1 \varphi'_2 \quad [37]$$

y si los sistemas se acoplan en el aire,

$$\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2 - e \varphi'_1 \varphi'_2 \quad [38]$$

*Lentes.*—Podemos considerar una lente (fig. 31) como un sistema compuesto, ya que las dos superficies de radios  $r_1$  y  $r_2$  son dos sistemas simples

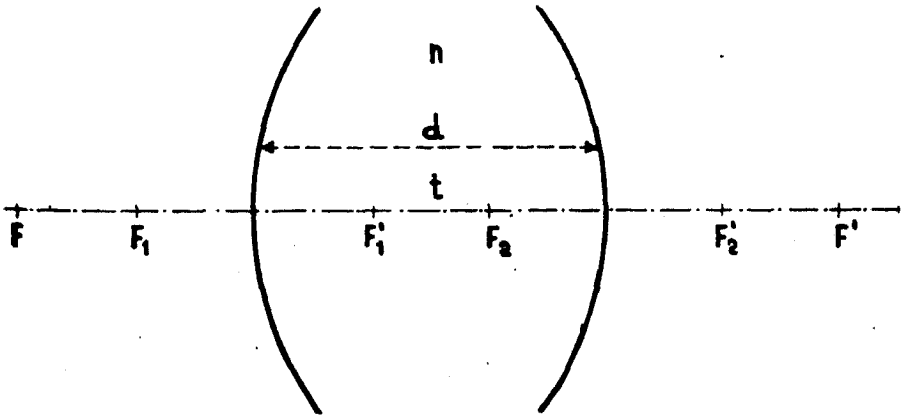


Fig. 31

en los cuales sus puntos principales coinciden en los vértices; por tanto, le será aplicable la [37]. Teniendo en cuenta las [21], se tendrá, supuesta la lente en aire,  $n_1 = n'_2 = 1$ , y que su índice es  $n$ :

$$\varphi'_1 = \frac{n-1}{nr_1} \quad , \quad \varphi'_2 = -\frac{n-1}{r_2} \quad [39]$$

sustituyendo éstas en la [37], teniendo en cuenta que  $e = H'_1H_2 = d$  (espesor), se tiene para la potencia:

$$\varphi' = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2} \quad [40]$$

*Lente delgada.*—Una lente se dice que es delgada cuando su espesor es

despreciable frente a cada uno de sus radios de curvatura. Para hallar su potencia bastará hacer en la [40]  $\frac{d}{r_1 r_2} = 0$ , con lo que se tendrá:

$$\varphi' = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad [41]$$

La focal vendrá dada por el recíproco de este valor.

La fórmula de la potencia en el acoplamiento de dos lentes delgadas en aire será la [38], poniendo en  $\varphi'_1$  y  $\varphi'_2$  las potencias de las lentes y en  $e$  la distancia entre ellas.

## Premios Nacionales de Bachillerato

El «B. O. E.» de 3 de enero publicó la siguiente Resolución de la Inspección General de Enseñanza Media por la que se convoca a todos los alumnos que hayan obtenido Premio extraordinario en el Grado Superior para realizar los ejercicios para Premios Nacionales de Bachillerato. Dice así: «A fin de dar cumplimiento a lo dispuesto al efecto, se convoca a todos los alumnos de ambos sexos que hayan obtenido Premio extraordinario en el Grado Superior del Bachillerato en el curso 1960 a 1961, para que hasta las 13 horas del día 20 de enero de 1962 entreguen en el Instituto Nacional de Enseñanza Media en el que hayan efectuado los exámenes de Grado Superior o en el de su residencia, si no fuese en la actualidad la misma de entonces, una instancia dirigida al Ilmo. Sr. Inspector Jefe de Enseñanza Media del Distrito Universitario que corresponda, solicitando tomar parte en los ejercicios para Premios Nacionales.

A la solicitud se acompañará el Libro de calificación escolar, en el que conste la diligencia manifestando haber sido concedido el Premio extraordinario a su titular.

Los ejercicios se realizarán en la capital del Distrito Universitario el día 1 de febrero de 1962, a las nueve en punto de la mañana y en el local que el Inspector-Jefe designe y haga público en los anuncios.

Madrid, 11 de diciembre de 1961.—El Inspector General, *Arsenio Pacios.*»

\* \* \*

Para juzgar dichos ejercicios ha sido nombrado un Tribunal integrado por los Inspectores de Enseñanza Media del Estado Ilmos. Sres. Don Félix García Blázquez, Doña Mercedes González de Heredia y Don Joaquín García Rúa, y Don Domingo Sánchez, como representante de la Comisaría General de Protección Escolar y Asistencia Social.