SUCESIONES RACIONALES. EL NUMERO REAL

MATEMATICAS

Por GONZALO CALERO ROSILLO
Catedrático del Instituto "Ramiro de Maeztu" de Madrid.

INTRODUCCION

En el presente artículo desarrollamos la teoría del número real de análoga manera a la seguida en los libros citados en la bibliografía y con él pretendemos dar ideas para que después de una elaboración más cuidada pueda servir a los alumnos de nuestro bachillerato actual.

Sean N y Q los conjuntos de los números naturales y racionales respectivamente.

Suponemos conocido:

1.° Las estructuras algebraicas de N y de Q.
2.° La ordenación en el conjunto de los números racionales.
3.° Las siguientes propiedades del valor absoluto en Q:

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$$
$$|\alpha \times \beta| = |\alpha| \times |\beta|$$
$$|\alpha| < k \longleftrightarrow -k < \alpha < k$$
$$|\alpha - a| < k \longleftrightarrow -k < \alpha - a < k \longleftrightarrow a - k < \alpha < a + k$$

Con todas estas relaciones conviene que trabaje el alumno, con ejercicios propuestos adecuadamente por el profesor, hasta que haya logrado un perfecto dominio de las mismas.

EJERCICIOS.—1. Escribe de todas las maneras que sepas el conjunto de los números racionales α tales que $|\alpha| < 8$.

2. Escribe de las diferentes maneras que conozcas el conjunto de los números racionales α tales que $|\alpha - 5| < 2$.

3. Representa en la recta los números racionales del ejercicio anterior.

4. Compara los conjuntos $|\alpha - 3| < 5$ y $|\alpha - 3| \leqslant 5$. ¿Qué diferencia hay entre ellos?

5. Expresa analíticamente de otras maneras el conjunto de números racionales $0 < |\alpha - 4| < 3$.

6. Representa en la recta el conjunto de puntos correspondiente al ejercicio anterior.

7. Representa los números racionales tales que $|\alpha| \geqslant 9$.

8. ¿Qué diferencia hay entre los conjuntos $|\alpha| \geqslant 6$ y $|\alpha| > 6$?

4.º Es conveniente conocer la noción de entorno simétrico del punto a en la recta racional

$$E(a, \varepsilon) = \{\alpha \in Q \mid |\alpha - a| < \varepsilon\}$$

(Al número racional ε se le llama amplitud del entorno). Y la noción de entorno en la recta natural:

$$N(n_0) = \{n \in N \mid n > n_0\}$$

EJERCICIOS.—9. Escribe un entorno del punto 4 de amplitud 6. Haz la representación gráfica en la recta racional.

10. Representa analíticamente de todas las maneras el conjunto E (2, 8). Haz la representación gráfica.

11. Representa los conjuntos N (5), N (20), N (8) $\cap$ E (5, 10).

12. ¿Qué conjuntos de puntos on los siguientes:

a) E (2, 5) $\cup$ E (4, 6)

b) E (2, 5) $\cap$ E (4, 6)

c) E (3, 2) $\cup$ E (9, 3)

d) E (3, 10) $\cap$ E (9, 2)

Todos estos ejercicios y cuantos se ocurran análogos son muy convenientes antes de entrar en el estudio de las sucesiones.

SUCESIONES RACIONALES

El conjunto de las sucesiones de números racionales.—*Def. 1.* Llamamos sucesión de números racionales a cada aplicación de N en Q. Las representaremos por letras minúsculas. Así, por ejemplo, diremos la sucesión i

$$\begin{aligned} N &\xrightarrow{\ i\ } Q \\ n &\longrightarrow i(n) \end{aligned}$$

La imagen $i\,(n)$ se suele representar por i_n e $i_n \in Q$.

El conjunto $\{i\,(n)\}$ de imágenes se suele ordenar así:

$$i_j \leqslant i_k \quad \Leftrightarrow \quad j \leqslant k \qquad\qquad j, k \in N$$

Dada una sucesión i se puede construir el conjunto ordenado de sus imágenes

$$i\,(1),\ i\,(2),\ i\,(3),\ \ldots,\ i\,(n),\ \ldots \tag{1}$$

y recíprocamente dado el conjunto ordenado de las imágenes se conoce perfectamente la sucesión i. Por ello se suele llamar también sucesión al conjunto ordenado de las imágenes [1].

A las imágenes $i\,(n) = i_n$ se les suele llamar términos de la sucesión. Al término n-esimo $i\,(n)$ se le llama también término general.

Hay sucesiones cuyos términos siguen leyes sencillas y fácilmente expresables.

EJEMPLOS.—1. Las sucesiones cuyos términos generales son:

$$i\,(n) = \frac{1}{n} \qquad\qquad j\,(n) = \frac{3+n}{1+n} \qquad\qquad k\,(n) = 2^n$$

Otras sucesiones pueden seguir leyes completamente arbitrarias, de tal manera que sus términos no sigan una ley representable matemáticamente por una ley sencilla como

$$i\,(1) = 2 \quad , \quad i\,(2) = 0{,}5 \quad , \quad i\,(3) = 6 \quad , \quad i\,(4) = 0{,}02 \quad , \quad \ldots\ldots\ldots$$

Al conjunto de todas las sucesiones de números racionales lo representaremos por S.

Podemos dar en el conjunto S la siguiente relación de igualdad.

Def. 2.—Dados

$$i, j \in \mathrm{S} \qquad i \sim j \quad \Leftrightarrow \quad i\,(n) = j\,(n) \qquad \forall\, n \in \mathrm{N}$$

fácilmente se comprueba que la relación anterior es una relación de igualdad y en lugar de escribir $i \sim j$ podemos escribir $i = j$.

Dado $a \in \mathrm{Q}$ podemos obtener la sucesión $\mathbf{a} \in \mathrm{S}$ tal que

$$\mathbf{a}\,(n) = a \qquad \forall n \in \mathrm{N}$$

Si establecemos entre Q y S la correspondencia c definida así:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Q} & \xrightarrow{\quad c \quad} & \mathrm{S} \\ \Cup & & \Cup \\ a & \longrightarrow & \mathbf{a} \end{array}$$

es decir, tal que $c\,(a) = \mathbf{a}$ resulta que c es una inyección, pues si $\mathbf{a} = c\,(a)$ $\mathbf{b} = c\,(b)$ siendo $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ por la Def. 2 y por la forma de definir $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad a = \mathbf{a}\,(n) = \mathbf{b}\,(n) = b \qquad \text{luego} \qquad a = b.$$

Según lo anterior hay en S un subconjunto propio S' que es biyectivo con Q y, por tanto, podemos identificar Q con S', con lo que las sucesiones del tipo $\mathbf{a}$ las podemos representar por a.

A las sucesiones de S' les llamaremos *sucesiones constantes.*

EJERCICIOS.—14. Escribe 8 términos de la sucesión **2**.

15. ¿Es un número racional **7**? ¿Qué es?

Estructura algebraica del conjunto S.—Vamos a construir las siguientes operaciones en S.

Def. 3.—Dadas $i, j \in$ S definamos $i + j$ e $i \times j$ por las siguientes igualdades:

a) $(i + j)(n) = i(n) + j(n)$

b) $(i \times j)(n) = i(n) \times j(n)$

(Obsérvese que en las igualdades anteriores el signo + (el signo ×) del primer miembro no tiene el mismo significado que el signo + (el signo ×) del segundo miembro.)

PROPOSICIÓN 1.—El conjunto S con las operaciones anteriores tiene estructura de anillo conmutativo y con unidad.

Demostración. Propiedades de la adición:

Asociativa

$$[(i + j) + k](n) = (i + j)(n) + k(n) = [i(n) + j(n)] + k(n) =$$

$$= i(n) + [j(n) + k(n)] = i(n) + (j + k)(n) =$$

$$= [i + (j + k)](n)$$

de donde

$$(i + j) + k = i + (j + k)$$

Conmutativa

$$(i + j)(n) = i(n) + j(n) = j(n) + i(n) =$$

$$(j + i)(n) \quad \Rightarrow \quad i + j = j + i$$

Elemento neutro. Es la sucesión $i_o(n) = 0$, pues

$$(i + i_o)(n) = i(n) + i_o(n) = i(n) + o = i(n) \quad \Rightarrow \quad i + i_o = i$$

Elemento opuesto. La sucesión opuesta de i es la sucesión $-i$ definida así:

$$(-i)(n) = -i(n).$$

En efecto:

$$[i + (-i)](n) = i(n) + (-i)(n) = i(n) - i(n) = o = i_o(n) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad i + (-i) = i_o$$

Propiedades de la multiplicación.

Asociativa.

$$[(i \times j) \times k](n) = (i \times j)(n) \times k(n) = [i(n) \times j(n)] \times k(n) =$$

$$= i(n) \times [j(n) \times k(n)] = i(n) \times (j \times k)(n) = [i \times (j \times k)](n) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (i \times j) \times k = i \times (j \times k)$$

Conmutativa.

$$(i \times j)(n) = i(n) \times j(n) = j(n) \times i(n) = (j \times i)(n) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad i \times j = j \times i$$

Elemento neutro. Es la sucesión $\mathbf{1}$ definida así: $\mathbf{1}(n) = 1$. Según el convenio establecido para las sucesiones constantes, podemos representarla por 1.

$$(i \times 1)(n) = i(n) \times 1(n) = i(n) \quad \Rightarrow \quad i \times 1 = i$$

Propiedad distributiva.

$$[(i + j) \times k] (n) = (i + j) (n) \times k (n) = [i (n) + j (n)] \times k (n) =$$

$$= i (n) \times k (n) + j (n) \times k (n) = (i \times k) (n) + (j \times k) (n) =$$

$$= [(i \times k) + (j \times k)] (n) \quad \Rightarrow \quad (i + j) \times k = (i \times k) + (j \times k)$$

Elemento inverso. Dada la sucesión i se puede definir la sucesión inversa i^{-1}; así:

$$i^{-1} (n) = \frac{1}{i (n)} \qquad \text{si} \qquad i (n) \neq 0 \qquad \forall\, n \in N$$

y se verifica que

$$(i \times i^{-1}) (n) = i (n) \times i^{-1} (n) = i (n) \times \frac{1}{i (n)} = 1 = (n)$$

$$\Rightarrow \quad i \times i^{-1} = 1$$

Evidentemente no siempre existe la sucesión inversa de una sucesión $i \neq i_0$ pues puede suceder que algún $i (n) = 0$.

EJEMPLO 2.—La sucesión cuyos términos son

$$i (1) = 3 \quad , \quad i (2) = 5 \quad , \quad i (3) = 0 \quad , \quad i (4) = 8 \quad , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

no tiene sucesión inversa.

Nota.—Es muy importante que en las demostraciones anteriores el alumno no dé ningún paso sin que exprese la propiedad o definición que ha empleado para darlo e incluso que escriba debajo de cada signo igual la propiedad empleada. Así, por ejemplo, en la propiedad asociativa de la adición demostrada anteriormente, tendría que decir en cada uno de los signos de igualdad: "El primer signo igual se ha puesto por la defición de adición de sucesiones, el segundo signo igual por la definición de adición de sucesiones, el tercero por la propiedad asociativa de la adición de números racionales, el cuarto y el quinto por la definición de adición de sucesiones de números racionales." (*).

Subanillos importantes del anillo S.—*Def. 4.* Una sucesión $i \in S$ se dice acotada si y solamente si existe un número racional k, tal que:

$$|i_n| < k$$

EJERCICIOS.—16. Comprobar que las sucesiones 1.ª y 2.ª definidas en el ejemplo 1 son acotadas.

17. Comprobar que $i(n) = 2^n$ no es acotada.

18. Comprobar que las sucesiones $i(n) = \frac{1}{n}$ y $j(n) = \frac{n}{n+2}$ son acotadas.

Si llamamos S_A al conjunto de todas las sucesiones acotadas se verifica que

$$S_A \subset S \qquad [2]$$

y el contenido es propio (Ejercicio 17).

19. Comprobar que S_A es un subanillo de S. (Basta demostrar que la suma de sucesiones acotadas es acotada, que el producto de sucesiones acotadas es acotada y que la opuesta de una sucesión acotada es acotada.)

Def. 5. Decimos que $i \in S$ es una sucesión nula si se verifica lo siguiente:

A todo $E(o, \varepsilon)$ le corresponde un $N(n_o)$ tal que para todo $n \in N(n_o)$ se verifica que $i(n) \in E(o, \varepsilon)$

$$\begin{array}{ccc} E(o, \varepsilon) & \longrightarrow & N(n_o) \\ \Cup & & \Cup \\ i(n) & \longleftarrow & n \end{array}$$

* Este criterio se sigue en los libros piloto de 1.º y 2.º y en "Elementos de Matemática" del profesor Abellanas.

Como decir

$$\alpha \in E(o, \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \alpha < \varepsilon$$

resulte que decir

$$i(n) \varepsilon E(o, \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad |i(n)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < i(n) < \varepsilon$$

Además

$$n \in N(n_o) \quad \Leftrightarrow \quad n > n_o$$

Con todo lo anterior, la def. 5 se puede expresar así:

Def. 5'. La sucesión i es nula equivale a decir que a todo $\varepsilon > o$ le corresponde un $n_o \in N$ tal que $\forall\, n > n_o$ se verifica que $|i(n)| < \varepsilon$.

O también así:

Def. 5''. A todo $\varepsilon > o$ le corresponde un $n_o \in N$ tal que

$$\forall n > n_o \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < i(n) < \varepsilon$$

EJERCICIO 20. Comprobar si la sucesión $i(n) = (-1)^n \dfrac{3}{n+8}$ es sucesión nula.

Solución:

$$\left|(-1)^n \frac{3}{n+8}\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{n+8} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\varepsilon} < n + 8 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{\varepsilon} - 8 < n \Rightarrow \quad \frac{3 - 8\varepsilon}{\varepsilon} < n$$

Sea $P\left(\frac{3-8\varepsilon}{\varepsilon}\right) = n_o$ la parte entera de $\frac{3-8\varepsilon}{\varepsilon}$.

(Si $P\left(\frac{3-8\varepsilon}{\varepsilon}\right) < 0$ baste tomar $n_o = 0$.)

Se verifica que a cada

$$\varepsilon \longrightarrow n_o = P\left(\frac{3-8\varepsilon}{\varepsilon}\right) \text{ tal que si}$$

$$n > n_o \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{(-1)^n \times 3}{n+8}\right| < \varepsilon$$

Si por ejemplo elegimos $\varepsilon = 0{,}04$

$$\frac{3 - 8 \times 0{,}04}{0{,}04} = \frac{3 - 0{,}32}{0{,}04} = \frac{2{,}68}{0{,}04} = \frac{268}{4} = 67$$

$$P(67) = 67$$

por tanto, para que

$$|i(n)| < 0{,}04$$

ha de ser:

$$n > 67$$

Lo anterior es equivalente a decir que (Det. 5"):

$$-0{,}04 < \frac{(-1)^n\, 3}{n+8} < 0{,}04 \text{ siempre que } n > 67.$$

Nota.—Es muy conveniente que los alumnos empleen las diferentes formas de la definición 5 con ejercicios adecuados.

21. En la sucesión del ejercicio anterior, calcular el n_o para que $|i(n)| < 0{,}003$.

22. Demostrar que las sucesiones

$$i(n) = \frac{2}{n+5} \quad \text{y} \quad j(n) = \frac{3}{n^2}$$

son sucesiones nulas.

23. Demostrar que la sucesión $i(n) = \dfrac{n}{n+1}$ no es nula.

Al conjunto de sucesiones nulas lo representaremos por S_o.

COROLARIO 1.°—Toda sucesión nula es acotada, pues si $i \in S_o \Rightarrow$ $\Rightarrow i_n \in E(0, \varepsilon)$ para $n \in N(n_o)$, lo cual es equivalente a decir:

$$|i_n| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > n_o$$

o también que

$$-\varepsilon < i_n < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > n_o$$

luego fuera del intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ hay, a lo sumo, los términos de i

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$$

y basta tomar como cota el mayor de los números

$$|i_1|, |i_2|, |i_3|, \ldots, |i_n|, \varepsilon$$

El recíproco no es cierto. Es decir, toda sucesión acotada no es nula.

$$S_o \subset S_A \tag{3}$$

24. Comprobar que la sucesión $i_n = \frac{n}{n+1}$ es acotada y no es nula.

COROLARIO 2.—Reuniendo los resultados obtenidos en [2] y [3] se verifica que:

$$S_0 \subset S_A \subset S \tag{4}$$

y los contenidos son propios.

COROLARIO 3.—Si

$$i \in S_0 \quad \text{y} \quad a \in S_A \quad \Rightarrow \quad i \times a \in S_0$$

En efecto: Decir que

$$i \in S_0 \quad \Leftrightarrow \quad |i\,(n)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{para} \quad n > n_0 \quad , \quad \forall \varepsilon$$

Decir que

$$a \in S_A \quad \Leftrightarrow \quad |a\,(n)| < k$$

De lo anterior

$$|a \times i\,(n)| = |a\,(n)|\ |i\,(n)| < K \frac{}{K} = \varepsilon \quad \text{para} \quad n > n_0$$

PROPOSICIÓN 2.—El conjunto de sucesiones nulas es un subanillo de S (y por tanto de S_A).

Demostración: Bastará demostrar que si

$$i, j \in S_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} i - j \in S_0 \\ i \times j \in S_0 \end{cases}$$

En efecto:

$$i \in S_o \quad \longleftrightarrow \quad |i(n)| < \frac{\ }{2} \quad \text{para} \quad n > n_o$$

$$j \in S_o \quad \longleftrightarrow \quad |j(n)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para} \quad n > n'_o$$

Tomando el mayor de los números n y n'_o (máx. (n_o, n'_o)) se verifica que

$$|(i - j)(n)| = |i(n) - j(n)| \leqslant$$

$$\leqslant |i(n)| + |j(n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

es decir:

$$|(i - j)(n)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > \text{máx.}\,(n_o, n'_o)$$

para todo ε elegido arbitrariamente.

Def. 6. Decimos que $i \in S$ tiene por límite $a \in Q$ si y solamente si $i - a \in S_o$.

Las sucesiones nulas son sucesiones que tienen por límite cero.

Que la sucesión i tiene por límite $a \in Q$ se expresa también de estas formas:

$$i \longrightarrow a \quad , \quad i_n \longrightarrow a \quad , \quad \lim_{n \to \infty} i(n) = a \quad , \quad \lim i = a$$

Al conjunto de sucesiones con límite racional lo llamaremos S_L

COROLARIO. Si $\qquad i \in S_L \quad \Rightarrow \quad i \in S_A$

La demostración es análoga a la del colorario 1 de la Def. 5.

EJERCICIOS.—25. Comprobar que la sucesión $\frac{2n}{n+1}$ tiene por límite 2.

26. Comprobar que la sucesión $\frac{5n+3}{2n-1}$ tiene por límite $\frac{5}{2}$.

27. Comprobar que la sucesión $i(n) = (-1)^n\, 5$ es acotada y que, sin embargo, no tiene.

Este último ejercicio, unido al corolario, nos dice que:

$$S_L \subset S_A \qquad [5]$$

y el contenido es propio.

Las relaciones [4] y [5] unidas a la observación que sigue a Def. 6, nos permite escribir:

$$S_o \subset S_L \subset S_A \subset S \qquad [6]$$

EJERCICIO 28. Dar para las sucesiones de límite racional definiciones análogas a las Def. 5, Def. 5' y Def. 5'', dadas para las sucesiones nulas.

PROPOSICIÓN 3.—El subconjunto S_L de sucesiones con límite racional es un subanillo de S.

Demostración: Basta demostrar que si

$$i, j \in S_L \quad \Rightarrow \quad i + j \in S_L \quad ; \quad i \times j \in S_L$$

y que si

$$i \in S_L \quad \Rightarrow \quad -i \in S_L$$

En efecto:

a)

$$\left.\begin{array}{lll} i \in S_L & \Leftrightarrow & \exists\, a \in Q \mid i - a \in S_o \\ j \in S_L & \Leftrightarrow & \exists\, b \in Q \mid j - b \in S_o \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (i + j) - (a + b) \in S_o$$

b)

$$\left.\begin{array}{lllll} i - a \in S_o & \Rightarrow & i - a = m \in S_o & \Rightarrow & i = a + m \\ j - b \in S_o & \Rightarrow & j - b = n \in S_o & \Rightarrow & j = b + n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad i \times j = a \times b + (a \times n + b \times m + m \times n)$$

pero

$$an + bm + mn \in S_o$$

teniendo en cuenta corolario 3 de la Def. 5 y la proposición 2, con lo que

$$ij - ab \in S_o \quad \longleftrightarrow \quad ij \in S_L$$

(Como es costumbre se puede suprimir el signo $\times$).

c) Si

$$i \in S_L \quad \exists\, a \in Q \mid i - a \in S_o \quad \Rightarrow \quad -(i - a) \in S_o$$

$$\Rightarrow \quad (-i) - (-a) \in S_o \quad \longleftrightarrow \quad -i \in S_L$$

En la demostración anterior hemos también obtenido:

Corolario: Si

$$\lim i = a \quad \text{y} \quad \lim j = b \quad \Rightarrow \quad \lim (i + j) = \lim i + \lim j =$$

$$= a + b \quad , \quad \lim i \times j = \lim i \times \lim j = a \times b \quad ,$$

$$\lim (-i) = -\lim i = -a.$$

Ejercicio 29. Calcular el límite de las sucesiones:

a)

$$\frac{2n}{n+1} + \frac{5n+3}{2n-1}$$

b)

$$\frac{2n}{n+1} \times \frac{5n+3}{2n-1}$$

teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los ejercicios 25 y 26.

Def. 7. Decir que la sucesión $i \in S$ es una sucesión convergente equivale a decir que:

a todo $E(0, \varepsilon)$ le corresponde un $N(n_0)$ tal que para todos los pares $n, m \in N(n_0)$ se verifica que

$$i(n) - i(m) \in E(0, \varepsilon)$$

$$E(0, \varepsilon) \longrightarrow N(n_0) \mid n, m \in N(n_0) \quad \Rightarrow \quad i(n) - i(m) \in E(0, \varepsilon)$$

Def. 7'. A cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $n_0 \in N$ tal que para $n > n_0$ y $m > n_0$ se verifica que $|i(n) - i(m)| < \varepsilon$.

$$\varepsilon \longrightarrow n_0 \mid n > n_0, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |i(n) - i(m)| < \varepsilon$$

Ejemplo. Obténganse tantas cifras como se quiera de $\sqrt{2}$ por el procedimiento habitual

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

A partir de esta expresión decimal podemos obtener la sucesión h definida así:

$$h(1) = 1 \quad , \quad h(2) = 1{,}4 \quad , \quad h(3) = 1{,}41 \quad , \quad h(4) = 1{,}414 \quad , \quad \ldots$$

La sucesión h es convergente pues (si $m > n$ por ejemplo)

$$|h(n) - h(m)| = 0{,}000 \overset{n-1}{\ldots\ldots} opq \overset{m-n}{\ldots\ldots\ldots} r$$

y basta tomar n, m suficientemente grandes ($n, m > n_0$) para que $|h(n) - h(m)| < \varepsilon$ siendo ε prefijado.

Al conjunto de todas las sucesiones convergentes le vamos a llamar S_c.

EJERCICIOS.—30. Dada la sucesión h definida antes, determinar n_0 para que $|h(n) - h(m)| < 0{,}0025$.

31. Obtener con $\sqrt{3}$ una sucesión convergente de manera análoga a la seguida para obtener h a partir de $\sqrt{2}$.

32. Hacer lo mismo con $\sqrt{5}$.

COROLARIO 1. Si $\quad i \in S_L \Rightarrow i \in S_c$

Demostración:

$$i \in S_L \quad \Leftrightarrow \quad i - a \in S_0 \quad \Leftrightarrow \quad |i(n) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } n > n_0$$

Si elegimos

$$m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |i(m) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de aquí:

$$|i(m) - i(n)| = |(i(m) - a) - (i(n) - a)| \leqslant$$

$$\leqslant |i(m) - a| + |i(n) - a| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{para} \quad n, m > n_0 \text{ (y para todo } \varepsilon)$$

El recíproco no es cierto, pues la sucesión h anteriormente estudiada es convergente y, sin embargo, no hay un $a \in Q$ que sea límite de h. Si así fuera, sería $\sqrt{2}$ un número racional.

COROLARIO 2. Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración: Sea $i \in S_c$, elijamos un $\varepsilon > 0$ al que corresponderá n_o tal que para

$$n, m > n_c \;\Rightarrow\; |i(n) - i(m)| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; i(m) \quad \varepsilon < i(n) < i(m) + \varepsilon$$

Si fijamos el m todo los términos $i(n)$ excepto un número finito, tienen que estar en el intervalo $(i(m) - \varepsilon, i(m) + \varepsilon)$ y la demostración se termina como en el corolario 1 de la Def. 5.

EJERCICIO 33. Comprobar que la sucesión $(-1)^n\, 5$ es acotada y no es convergente.

Teniendo en cuenta [6], los corolarios 1 y 2 anteriores y el ejercicio 33 podemos escribir:

$$S_o \subset S_L \subset S_c \subset S_A \subset S \qquad [7]$$

y todos los contenidos son propios.

PROPOSICIÓN 4. El conjunto S_c es un subanillo de S.

Demostración: Como en las proposiciones anteriores bastará demostrar que si $i, j \in S_c \Rightarrow \begin{cases} i - j \in S_c \\ i \times j \in S_c \end{cases}$

$$i \in S_c \;\Leftrightarrow\; |i(m) - i(n)| < \frac{\ }{2} \text{ para } n, m > n_o \text{ (y } \Delta\varepsilon)$$

$$j \in S_c \;\Leftrightarrow\; |j(m) - j(n)| < \frac{\ }{2} \text{ para } n, m > n'_o$$

$$|(i - j)(m) - (i - j)(n)| = |(i(m) - i(n)) - (j(m) - j(n))| <$$

$$< |i(m) - i(n)| + |j(m) - j(n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para $n, m >$ máx. (n_o, n'_o).

Si $i, j \in S_c$

$$\left|i \times j\,(m) - i \times j\,(n)\right| = \left|i\,(m)\,j\,(m) - i\,(n)\,j\,(n)\right| =$$

$$= i\,(m)\,j\,(m) - i\,(m)\,j\,(n) + i\,(m)\,j\,(n) - i\,(n)\,j\,(n)\right| =$$

$$= \left|i\,(m)\,(j\,(m) - j\,(n)) + (i\,(m) - i\,(n))\,j\,(n)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|i\,(m)\right| \left|j\,(m) - j\,(n)\right| +$$

$$+ \left|j\,(n)\right| \left|i\,(m) - i\,(n)\right| < k\,\frac{\varepsilon}{2k} + k'\,\frac{\varepsilon}{2k'} = \varepsilon$$

para

$$n, m > \text{máx.}\,(n_0, n'_0)$$

siendo k y k' cotas de i, j (ya que al ser convergentes son acotadas) y siendo

$$\left|j\,(m) - j\,(n)\right| < \frac{\varepsilon}{2k} \quad \text{para} \quad n, m > n_0$$

$$\left|i\,(m) - i\,(n)\right| < \frac{\varepsilon}{2k'} \quad \text{para} \quad n, m > n'_0$$

De los anillos escritos en [7] los más interesantes para nosotros son S_0 y S_c.

EL NUMERO REAL

Relación de igualdad en S_c. *Conjunto de clases.*—Definamos en S_c la relación R de esta manera:

Def. 8. Dados $i, j \in S_c$

$$i\,\mathrm{R}\,j \iff i - j \in S_0$$

COROLARIO: La relación R es de igualdad.

Demostración: *Reflexiva.*

$$i \,R\, i \iff i - i = i_0 \in S_0$$

Simétrica. Si

$$i \,R\, j \iff i - j \in S_0 \Rightarrow j - i \in S_0 \iff j \,R\, i$$

Transitiva. Si

$$i \,R\, j \quad \text{y} \quad j \,R\, k \Rightarrow i \,R\, k$$

En efecto:

$$i \,R\, j \iff i - j \in S_0 \;,\; j \,R\, k \iff j - k \in S_0$$

de las dos

$$\Rightarrow (i + j) + (j - k) \in S_0 \Rightarrow i - k \in S_0 \iff i \,Rk$$

Consecuencia de ser R una relación de igualdad en S_c es que este conjunto se puede clasificar. Cada clase estará formada por las sucesiones convergentes relacionadas entre sí por R.

EJERCICIOS.—34. Comprobar que las sucesiones

$$1 \;,\; 1{,}9 \;,\; 1{,}99 \;,\; 1{,}999 \;,\; \ldots \quad \text{y} \quad \mathbf{2}$$

son sucesiones iguales.

35. Comprobar que las sucesiones

$$\begin{array}{l} 3 \;,\; 3{,}5 \;,\; 3{,}52 \;,\; 3{,}525 \;,\; 3{,}5252 \;,\; \ldots \\ 4 \;,\; 3{,}6 \;,\; 3{,}53 \;,\; 3{,}526 \;,\; 3{,}5253 \;,\; \ldots \end{array}$$

son sucesiones iguales.

36. Pon otros ejemplos de sucesiones iguales.

PROPOSICIÓN 5.—La relación de igualdad R es compatible con las operaciones de adición y de multiplicación en S_c (leyes uniformes).

Demostración:

$$i \mathrm{R} i' \Leftrightarrow i - i' \in S_0 \Leftrightarrow i = i' + n \qquad n \in S_0$$

$$j \mathrm{R} j' \Leftrightarrow j - j' \in S_0 \Leftrightarrow j = j + m \qquad m \in S_0$$

$$(i - i') + (j - j') = (i + j) - (i + i') \in S_0 \Leftrightarrow i + j \mathrm{R} i' + j'$$

que demuestra la compatibilidad con la adición. De manera análoga

$$ij = i'j' + (i'm + j'n + nm)$$

y como

$$i'm + j'n + nm \in S_0 \Rightarrow ij - i'j' \in S_0 \Leftrightarrow ij \mathrm{R} i'j'$$

Al conjunto de las clases le llamaremos *conjunto de los números reales* y lo representaremos por $S_c/\mathrm{R} = R$ y a cada clase *número real*.

EJERCICIOS.—37. Dar una sucesión de la misma clase que cada una de las siguientes:

a) 1,4 , 1,41 , 1,414 , 1,4141 , ...

b) $i(n) = \dfrac{1}{n}$

c) $j(n) = \dfrac{n+1}{n+2}$

Estructura algebraica de *R*.—Sean **i, j, k**, ... las clases *a* que pertenecen *i, j, k*, ... respectivamente.

Definamos la correspondencia natural

$$\alpha : S_c \longrightarrow R$$

tal que $\alpha(i) = \mathbf{i}$. La correspondencia α es una aplicación de S_c sobre R lo cual es consecuencia de la forma de construir R.

La correspondencia α^{-1} no es unívoca, pues en cada una de las clases hay más de una sucesión como hemos comprobado con los ejercicios 34 y 35.

Con α podemos construir la correspondencia $\alpha \times \alpha$ definida así:

$$S_c \times S_c \xrightarrow{\alpha \times \alpha} R \times R$$

en la cual

$$\alpha \times \alpha (i, j) = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$$

evidentemente $\alpha \times \alpha$ es unívoca mientras que $(\alpha \times \alpha)^{-1} = \alpha^{-1} \times \alpha^{-1}$ no lo es.

Representaremos por *ad* la correspondencia adición en S_c

$$ad : S_c \times S_c \longrightarrow S_c$$

tal como se definió en Def. 3.

Def. 8. Dados $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in$ R definamos la adición de números **reales** como la correspondencia producto $\mathbf{ad} = \alpha \circ ad_o + o\, (\alpha \times \alpha)^{-1}$.

Las operaciones *ad* y **ad** podemos relacionarlas con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} S_c \times S_c \arrow[r, "ad"] & S_c \arrow[d, "\alpha"] \\ R \times R \arrow[u, "(\alpha \times \alpha)^{-1}"] \arrow[r, "\mathbf{ad}"] & R \end{tikzcd}$$

Dados $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in R \times R$ la forma de obtener $\mathbf{s} = \mathbf{ad}\,(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, teniendo en cuenta la definición dada, es la siguiente:

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \xrightarrow{(\alpha \times \alpha)^{-1}} (i, j) \xrightarrow{ad} i + j \xrightarrow{\alpha} \mathbf{s} = \mathbf{ad}\,(\mathbf{i}, \mathbf{j})$$

en lugar de escribir la característica **ad** delante se suele escribir en medio, así:

$$\mathbf{s} = \mathbf{i}\ \mathbf{ad}\ \mathbf{j}$$

y en lugar de **ad** se suele escribir el signo +, pudiendo, por tanto, expresarse **s** de las siguientes formas:

$$\mathbf{s} = \mathbf{ad}\,(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \mathbf{i}\ \mathbf{ad}\ \mathbf{j} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

la última de las cuales es la habitual.

Como el signo + se utiliza con diferentes significados (según se advirtió ya en la Def. 3), conviene distinguir cada uno de los conceptos que representamos con el mencionado signo distinguiendo con claridad su significado en cada caso. En el presente, el signo + significa la característica funcional **ad** mientras que en el primer miembro de la igualdad *a*) de la definición 3 significa la característica funcional *ad*.

La correspondencia *ad* (operación de adición en *R*) es una aplicación de $R \times R$ sobre R. Es decir que la suma de dos números reales no depende de las sucesiones que tomemos para obtenerla.

Si tomamos $i, i' \in \mathbf{i}$ $\ j, j' \in \mathbf{j}$ podemos ver que

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} (i, j) & \longrightarrow & i + j \\ (i'\ j') & \longrightarrow & i' + j' \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbf{s} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

En efecto:

$$\left. \begin{array}{lcl} i, i' \in \mathbf{i} & \longleftrightarrow & i \mathrel{R} i' \\ j, j' \in \mathbf{j} & \longleftrightarrow & j \mathrel{R} j' \end{array} \right\} \Rightarrow \quad i + j \mathrel{R} i' + j'$$

$\Rightarrow \quad i + j \quad$ e $\quad i' + j'\ $ pertenecen a la misma clase **s**.

La aplicación **ad** es sobre ya que dada $\mathbf{i} \in R$ podemos tomar una sucesión representante $i \in S_c$ y la podemos descomponer en $i = i_1 + i_2$ con lo que $\mathbf{i} = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2$. (La i_2 puede ser por ejemplo la sucesión nula i_0.)

PROPOSICIÓN 6.—El conjunto R con la operación **ad** $(+)$ es un grupo aditivo abeliano.

Demostración: Es asociativo

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{k}) \longrightarrow (i + j, k) \longrightarrow (i + j) + k \longrightarrow \mathbf{s} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \mathbf{k}$$

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j} + \mathbf{k}) \longrightarrow (i, j + k) \longrightarrow i + j\,(j + k) \longrightarrow \mathbf{s}' = \mathbf{i} + (\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

pero como S_c es un grupo aditivo

$$(i + j) + k = i + (j + k)$$

con lo que $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$ o lo que es lo mismo

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \mathbf{k} = \mathbf{i} + (\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Conmutativa. Si

$$i, j \in S_c \quad \Rightarrow \quad i + j = j + i$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{i}, \mathbf{j}) \longrightarrow (i, j) \longrightarrow i + j \longrightarrow \mathbf{s} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \\ (j, i) \longrightarrow (j, i) \longrightarrow j + i \longrightarrow \mathbf{s}' = \mathbf{j} + \mathbf{i} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{s} = \mathbf{i} + \mathbf{j} = \mathbf{j} + \mathbf{i} = \mathbf{s}'$$

El elemento neutro es la clase $\mathbf{i}_0$ a la que pertenece $i_0 \in S$. En efecto:

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbf{i}, \mathbf{i}_0) & \longrightarrow & (i, i_0) & \longrightarrow & i + i_0 & \longrightarrow & \mathbf{s} = \mathbf{i} + \mathbf{i}_0 \\ & & & & \| & & \| \\ & & & & i & \longrightarrow & \mathbf{s} = \mathbf{i} \end{array}$$

Si $i \in \mathbf{i}$ el elemento opuesto de $\mathbf{i}$ es el $-\mathbf{i}$ al que pertenece $-i$

En efecto

$$(\mathbf{i}, -\mathbf{i}) \longrightarrow (i, -i) \longrightarrow i + (-i) = i_o \longrightarrow \mathbf{i}_o = \mathbf{i} + (-\mathbf{i})$$

El elemento i_o es único pues si i'_o fuese otro elemento neutro

$$\mathbf{i}_o + \mathbf{i}'_o = \mathbf{i}_o = \mathbf{i}'_o$$

El elemento opuesto es único, pues si dado $\mathbf{i}$ tuviese los dos opuestos $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{i}_1$,

$$\mathbf{i} + (-\mathbf{i}) = \mathbf{i}_o \quad \Rightarrow \quad (-\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}) + (-\mathbf{i}) = -\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_o$$
$$\Rightarrow \quad -\mathbf{i} = -\mathbf{i}_1$$

Def. 9. Definamos la multiplicación de números reales como la correspondencia producto $\mathbf{m} = \alpha \circ m_o \circ (\alpha \times \alpha)^{-1}$ en donde m es la multiplicación en S_c (Def. 3, b).

$$m : S_c \times S_c \longrightarrow S_c \qquad m\,(i, j) = i \times j$$

La multiplicación de números reales viene definida de acuerdo con lo anterior por el siguiente diagrama:

$$\text{(B)} \qquad \begin{array}{ccc} S_c \times S_c & \xrightarrow{\;\;m\;\;} & S_c \\ {\scriptstyle (\alpha \times \alpha)^{-1}} \big\uparrow & & \big\uparrow {\scriptstyle \alpha} \\ R \times R & \xrightarrow[\;\;\mathbf{m}\;\;]{} & R \end{array}$$

y, por tanto, dados $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in R$ el $\mathbf{m}\,(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ se obtiene así:

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \longrightarrow (i, j) \longrightarrow i \times j \longrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{m}\,(\mathbf{i}, \mathbf{j})$$

El producto $\mathbf{p}$ análogamente al caso de la adición se puede expresar sucesivamente así:

$$\mathbf{p} = \mathbf{m}\,(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \mathbf{i}\,\mathbf{m}\,\mathbf{j} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$$

El signo $\times$ significa aquí la característica funcional $\mathbf{m}$ y no debe de confundirse con los otros significados del mismo signo como las dadas en b) Def. 3.

La correspondencia $\mathbf{m}$ es una aplicación de $R \times R$ sobre R. En efecto, sean $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathrm{R}$

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} (i, j) & \longrightarrow & i \times j \\ (i', j') & \longrightarrow & i' \times j' \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$$

En efecto:

$$\left. \begin{array}{lll} i, i' \in \mathbf{i} & \longleftrightarrow & i \,\mathrm{R}\, i' \\ j, j \in \mathbf{j} & \longleftrightarrow & j \,\mathrm{R}\, j \end{array} \right\} \Rightarrow \quad i \times j \,\mathrm{R}\, i' \times j$$

Esto es lo mismo que decir que el diagrama (B) es conmutativo.

EJERCICIOS. 36. Dadas las sucesiones

$$\begin{array}{lll} i(1) = 1{,}3 \quad , & i(2) = 1{,}33 \quad , & i(3) = 1{,}333 \quad , \quad \ldots \\ j(1) = 4{,}7 \quad , & j(2) = 4{,}77 \quad , & j(3) = 4.777 \quad , \quad \ldots \end{array}$$

obtener las sucesiones $i + j$ e $i \times j$.

37. Obtener una sucesión de la misma clase que la $i + j$.

38. Comprobar que las sucesiones $i' = \dfrac{4}{3}$, $j' = \dfrac{43}{9}$ son de la misma clase que las i y j del ejercicio 36.

39. Comprobar que la sucesión $i' + j' = \dfrac{4}{3} + \dfrac{43}{9}$ es de la misma clase que la $i + j$ del ejercicio 36.

Lema 1.—Sea $i \in \mathbf{i} \neq \mathbf{i}_o$; se verifica que i tiene un número finito de elementos imágenes que son cero.

Demostración: Ser

$$i \in S_c \iff |i(n) - i(m)| < \varepsilon \iff$$

$$\iff i(n) - \epsilon < i(m) < i(n) + \varepsilon$$

para $n, m > n_0$ (n_0 depende de ε). Si hubiese un número infinito de ceros podemos siempre encontrar un $i(n) = 0$ para $n > n_0$ y se verificará:

$$-\varepsilon < i(m) < \varepsilon \quad \text{para} \quad m > n_0$$

lo cual equivale a decir que $i \in S_0 = \mathbf{i}_0$ en contra de la hipótesis.

Lema 2.—Sea $i \in \mathbf{i} \neq i_0$ una sucesión que tiene términos nulos existe al menos una sucesión $i' \in \mathbf{i}$ ninguno de cuyos términos es nulo.

Demostración: Por el lema 1 la sucesión i tiene un número finito de términos iguales a cero, sea éstos

$$i(h_4) = i(h_2) = i(h_3) = \ldots = i(h_r) = 0$$

Construyamos la sucesión j tal que

$$j(n) = i(n) \quad \text{para} \quad n \neq h_i \quad i = 1, 2, \ldots, r$$
$$j(n) = a \neq 0 \quad \text{para} \quad n = h_i$$

esta sucesión j es tal que $i - j \in S_0$; luego $i \mathrel{R} j$ con lo que i y j pertenecen a la misma clase $\mathbf{i}$.

Como $j(n) \neq 0 \quad \forall n \in N$ se verifica que $\dfrac{1}{j(n)} = i'(n)$ es un numero racional. A la sucesión i' definida antes le llamaremos sucesión inversa de la j.

Proposición 7.—El conjunto $R - \{\mathbf{i}_0\}$ con la operación $\mathbf{m}$ es un grupo conmutativo y con unidad.

Demostración: Asociativa de $\mathbf{m}$

$$\begin{array}{l} (i \times j, k) \longrightarrow (i \times j, k) \longrightarrow \\ \\ (\mathbf{i}, \mathbf{j} \times \mathbf{k}) \longrightarrow (i, j \times k) \longrightarrow \end{array} \left| \begin{array}{ccc} (i \times j) \times k & \longrightarrow & \mathbf{p} = (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k} \\ \| & & \| \\ i \times (j \times k) & \longrightarrow & \mathbf{p}' = \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \end{array} \right|$$

pero $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ ya que $(i \times j) \times k = i \times (j \times k)$ por ser S_c un anillo.

(Proposición 4).

Conmutativa.

$$\begin{array}{l} (\mathbf{i}, \mathbf{j}) \longrightarrow (i, j) \longrightarrow \\ (\mathbf{j}, \mathbf{i}) \longrightarrow (j, i) \longrightarrow \end{array} \left| \begin{array}{ccc} i \times j & \longrightarrow & \mathbf{p} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} \\ \| & & \| \\ j \times i & \longrightarrow & \mathbf{p}' = \mathbf{j} \times \mathbf{i} \end{array} \right|$$

pero como $i \times j = j \times i \quad \Rightarrow \quad p = p'$.

Elemento neutro.—El elemento neutro es el número real $\mathbf{i}_1$ al que pertenece la sucesión i_1, en efecto:

$$(\mathbf{i}, \mathbf{i}_1) \longrightarrow (i, i_1) \longrightarrow i \times i_1 = i \longrightarrow \mathbf{i} = \mathbf{i} \times \mathbf{i}_1$$

Elementos inversos.—Dado $\mathbf{i} \neq \mathbf{i}_0$ existe $\mathbf{i}'$ tal que $\mathbf{i} \times \mathbf{i}' = \mathbf{i}_1$.

En efecto, por el Lema 2 y su consecuencia se puede elegir $i \in \mathbf{i}$ de manera que ninguno de sus términos sean nulos y construir i' tal que $i'(n) = \dfrac{1}{i(n)}$ para todo $n \in N$. El inverso $\mathbf{i}'$ es el número real al que pertenece i'. En efecto:

$$\mathbf{i}, \mathbf{i}' \longrightarrow (i, i') \longrightarrow i \times i' = i_1 \longrightarrow \mathbf{i}_1 = \mathbf{i} \times \mathbf{i}'$$

Proposición 8.—R es un cuerpo.

Demostración: De acuerdo con las proposiciones 6 y 7 basta con demostrar la propiedad distributiva

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times \mathbf{k} = (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$$

y esto es cierto, pues

$$[(\mathbf{i} + \mathbf{j}), \mathbf{k}] \longrightarrow (i + j, k) \longrightarrow (i + j) \times k = (i \times k) + j \times k) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times \mathbf{k} = (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$$

Al cuerpo R se le llama *cuerpo de los números reales.*

PROPOSICIÓ*k 9*.—El cuerpo Q de los números racionales es isomorfo a un subcuerpo de R.

Demostración: Recordemos que Q es isomorfo a $S' \subset S_c$ (lo siguiente a Def. 2). Por ello basta ver que la restricción a S' del homomorfismo canónico α es un isomorfismo.

$$Q \xrightarrow{c} S_c \xrightarrow{\alpha} R$$

Sean $a, b \in S'$ y $\mathbf{a} = \alpha(a)$ $\mathbf{b} = \alpha(b)$

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \iff a \, R \, b \iff a - b \in S_o$$

$$\iff a(n) - b(n) = a - b = 0 \iff a = b$$

con lo que queda efectivamente probado.

Debido a esta propiedad podemos identificar Q con $\alpha(S') = Q'$.

BIBLIOGRAFIA

ABELLANAS, P.: *Elementos de Matemática.*

DIRECCIÓN GENERAL DE ENSEÑANZA MEDIA: *Apuntes de Matemática Moderna. 6.º curso.*