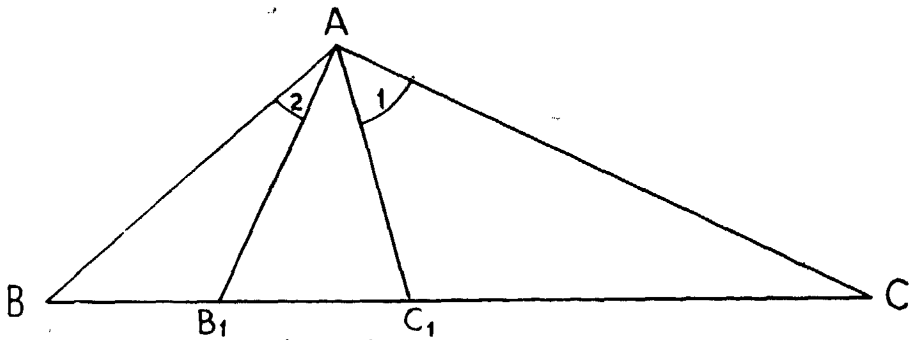
RELACIONES METRICAS EN LOS TRIANGULOS (*)

Por FRANCISCO BERNARDO CANCHO
(Inspector de Enseñanza Media del Estado)

Lecciones explicadas a los alumnos de tercer curso del Instituto "Ramiro de Maeztu", en la Cátedra de Metodología y Didáctica de la Matemática, de la que está encargado el Catedrático de dicho Instituto D. José Royo López.

I. Sea el triángulo ABC, obtusángulo en A. Esto es: $A > B + C$ (figura 1). Tracemos por A las rectas AB_1 y AC_1, tales que $\widehat{BAB_1} = \widehat{C}$ y $\widehat{CAC_1} = \widehat{B}$. Se forman así los triángulos BAB_1 y CAC_1, semejantes al triángulo dado y, por tanto, semejantes entre sí, por tener dos ángulos iguales.



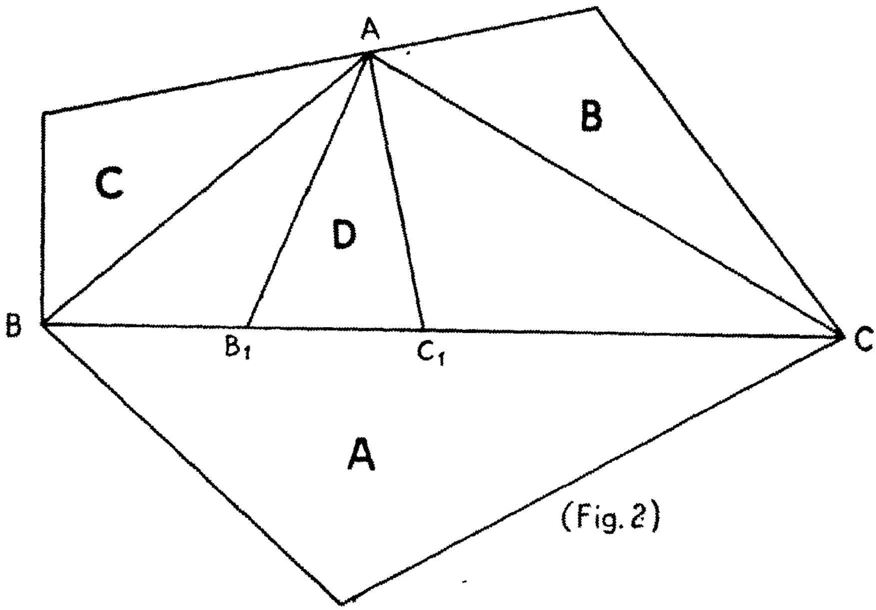
(Fig. 1)

Convendremos en designar los triángulos ABC, CAC_1 y BAB_1 por A, B y C, respectivamente; y el B_1AC_1 por D.

Como es $A > B + C$, o, lo que es lo mismo, $A > \hat{1} + \hat{2}$, entre los triángulos A, B y C, se verifica:

(*) Días antes de su repentino fallecimiento, nos entregó el inolvidable compañero para su publicación en la Revista el presente trabajo, una muestra más de su inquietud didáctica, que supo —siempre alerta a las nuevas tendencias de la Matemática— conjugar con sus múltiples tareas en la Inspección Central (**N. de R.**).

$$A > B + C \quad ; \quad \text{o más concretamente:} \quad A = B + C + D$$

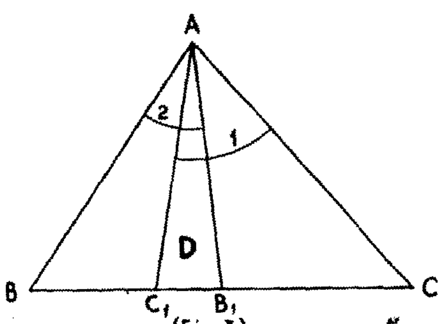


(Fig. 2)

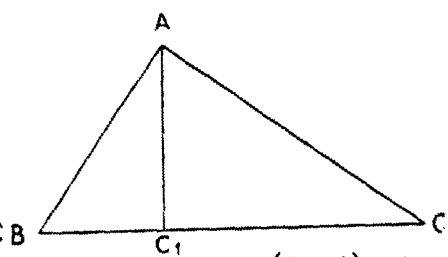
En la figura 2 se han construido los triángulos A, B y C exteriormente al triángulo dado. Preferible es un modelo en cartulina, con el que, mediante dobleces, comprueba el alumno muy sencillamente la relación anterior.

Si el triángulo es acutángulo, esto es, $A < B + C$ (fig. 3), será:

$$A < B + C, \text{ o, con mayor precisión: } A = B + C - D$$



(Fig. 3)



(Fig. 4)

Por último, si el triángulo es rectángulo en A (fig. 4), la recta AC_1, se confunde con la AB_1 por ser $A = B + C$.

Y se tiene: $A = B + C$.

Y se puede resumir: *Si sobre los lados de un triángulo escaleno construimos triángulos semejantes al dado, el triángulo construido sobre el lado mayor es mayor, igual o menor, que la suma de los otros dos, según que el triángulo dado sea obtusángulo, rectángulo o acutángulo.*

II. El triángulo D es isósceles, puesto que sus ángulos en B_1 y C_1 son iguales, al ser suplementarios de ángulos iguales (homólogos en la semejanza entre B y C).

De la semejanza entre A y B se deduce (fig. 1):

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CC_1} \qquad [1]$$

Y de la semejanza entre B y C:

$$\frac{CC_1}{AC_1} = \frac{AB_1}{BB_1}$$

Teniendo en cuenta que D es isósceles, esto es, $AB_1 = AC_1$, puede escribirse:

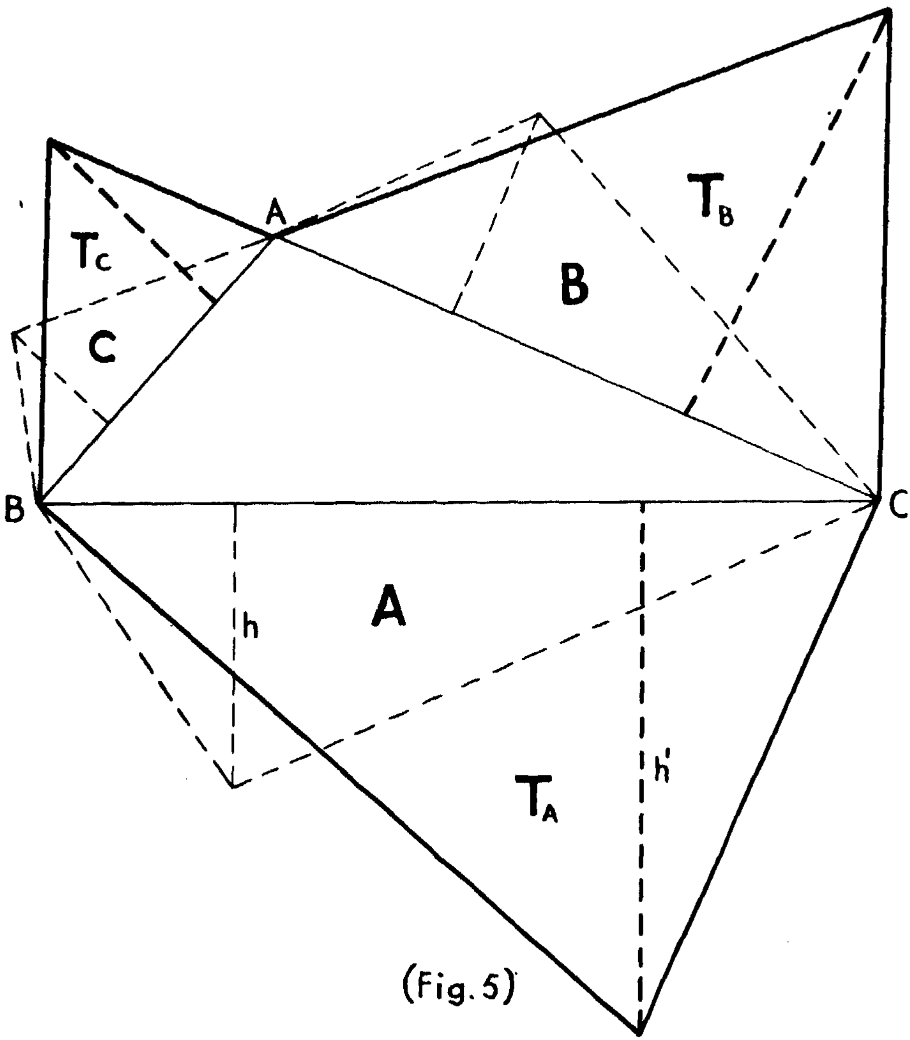
$$\frac{CC_1}{AC_1} = \frac{AC_1}{BB_1} \qquad [2]$$

En el caso particular del triángulo rectángulo, la igualdad [1] nos dice:

Un cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella. (Teorema del cateto.)

Y la [2] nos da el teorema de la altura: *En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es medio proporcional entre los dos segmentos en que descompone a ésta.*

III. Construyamos triángulos semejantes entre sí, tomando como homólogos los lados del triángulo ABC. Designémoslos por T_A; T_B; T_C (figura 5).



(Fig. 5)

Si comparamos T_A con A, que tienen común el lado BC, sus áreas son proporcionales a sus alturas, *h'* y *h*. Esto es:

$$\frac{T_A}{A} = \frac{h'}{h}$$

Y, análogamente, las áreas de T_B y B y T_C y C están en la misma razón $\frac{h'}{h}$. Luego:

$$\frac{T_A}{A} = \frac{T_B}{B} = \frac{T_C}{C} = \frac{h'}{h} \qquad [3]$$

Y, según que

$$A \gtreqless B + C \qquad [4]$$

será:

$$T_A \gtreqless T_B + T_C \qquad [5]$$

O, más concretamente: Si en un triángulo es

$$A = B + C \pm D \qquad [6]$$

(Si el triángulo es rectángulo, D = 0).
es

$$T_A = T_B + T_C \pm D \cdot \frac{h'}{h} \qquad [7]$$

Obsérvese que las relaciones [5] y [7] se deducen de las [4] y [6], respectivamente, multiplicando los dos miembros de éstas por la razón $\frac{h'}{h}$.

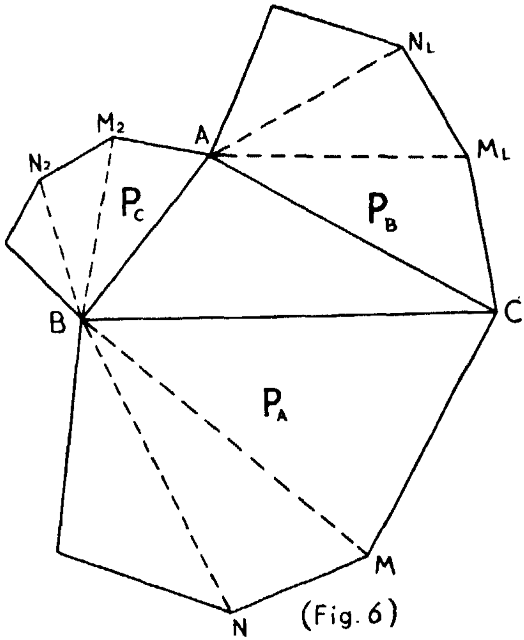
IV. Construyamos polígonos semejantes entre sí, tomando como homólogos los lados del triángulo ABC (fig. 6). Designémoslos por P_A; P_B; P_C:

Las diagonales BM y BN descomponen a P_A en tres triángulos respectivamente semejantes a los tres en que son descompuestos los polígonos P_A y P_C por las diagonales homólogas AM_1, AN_1 y BM_2, BN_2.

Y es fácil probar que, según el triángulo, sea obtusángulo, rectángulo o acutángulo, será:

$$P_A \gtreqless P_B + P_C \qquad [8]$$

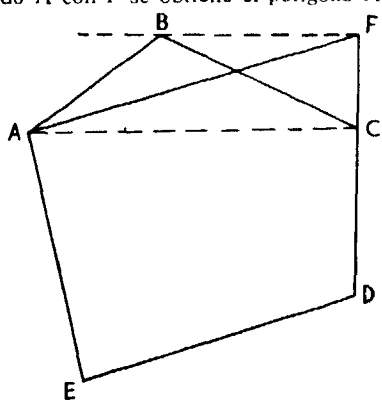
Construyamos los triángulos respectivamente equivalentes a P_A; P_B; P_C;



(Fig. 6)

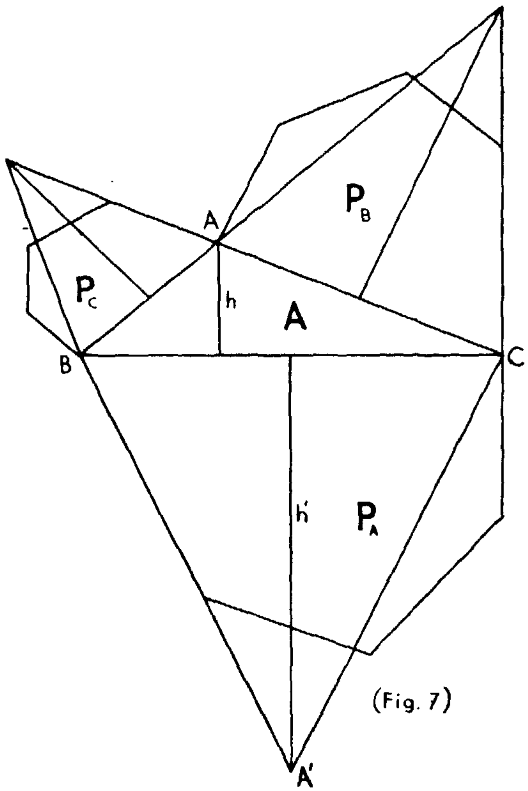
de modo que tengan por bases los lados del triángulo ABC (fig. 7). Sea *h'* la altura del triángulo equivalente a P_A:

Recordemos que un polígono convexo puede transformarse en otro equivalente con un lado menor mediante esta construcción: Se traza una diagonal que aisle un solo vértice, por ejemplo, la AC. Por el vértice aislado B, trazamos la paralela a la diagonal y prolongamos el lado DC hasta que la encuentre en F. Uniendo A con F se obtiene el polígono AFDE, equivalente al lado y con un lado menor.



Esta equivalencia se prueba observando que los dos polígonos tienen común el AEDC y que el triángulo ACD del primero se ha sustituido por el ACF en el segundo; y que dichos triángulos son equivalentes por tener la base común, AC, y la misma altura, por ser BF paralela a AC.

Construido un cuadrilátero equivalente a un pentágono, el mismo procedimiento nos llevaría a un triángulo equivalente.



(Fig. 7)

Es inmediato que

$$\frac{\text{Area A'BC}}{\text{Area ABC}} = \frac{h'}{h}$$

o, también,

$$\frac{P_A}{A} = \frac{h'}{h}$$

y que, análogamente, es también $\frac{h'}{h}$ la razón entre P_B y B y entre P_C y C.

Esto es:

$$\frac{P_A}{A} = \frac{P_B}{B} = \frac{P_C}{C} = \frac{h'}{h}$$

Luego si

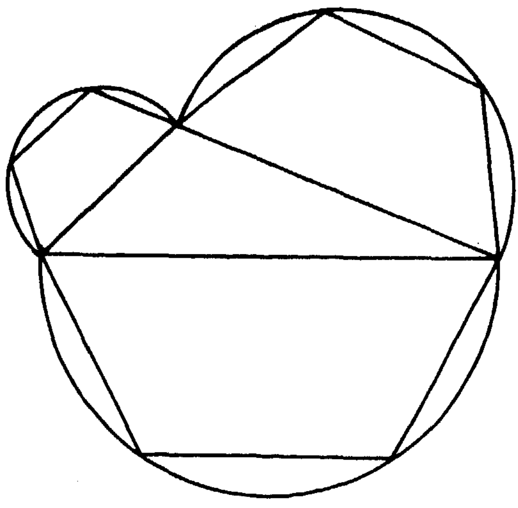
$$A = B + C \pm D \text{ (si el triángulo es rectángulo, } D = 0)$$

es

$$P_A = P_B + P_C \pm D : \frac{h'}{h} \qquad [9]$$

Las relaciones [8] y [9] nos dicen: *Si sobre los lados de un triángulo, considerados como homólogos, construimos polígonos semejantes, el polígono construido sobre el lado mayor es mayor, igual o menor que la suma de los otros dos, según que el triángulo sea obtusángulo, rectángulo o acutángulo.*

En particular, esta propiedad es cierta cuando se trata de polígonos regulares o de porciones de polígonos regulares. Asimismo, si se construyen, tomando los lados del triángulo como cuerdas, segmentos circulares de la misma graduación. Y más general si se construyen figuras cualesquiera, siempre que sean semejantes entre sí.

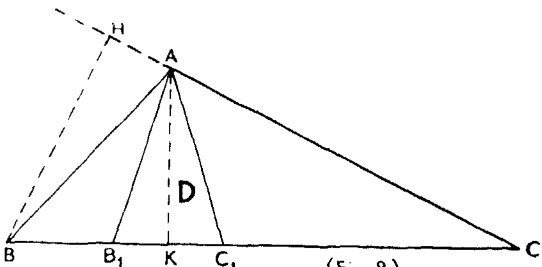


V Calculemos el área del triángulo D (fig. 8).

$$\text{Area } D = \frac{1}{2} B_1 C_1 \cdot AK = B_1K \cdot AK$$

Tracemos la altura BH relativa al lado AC. Los triángulos rectángulos AB_1K y BAH son semejantes, al ser $\widehat{AB_1K} = \widehat{BAH}$, por suplementarios de ángulos iguales. Luego:

$$\frac{B_1K}{AH} = \frac{AK}{BH},$$



(Fig. 8)

de donde

$$B_1K = AH \cdot \frac{AK}{BH} = AH \cdot \frac{AC}{BC},$$

por la semejanza entre AKC y BHC. Por tanto:

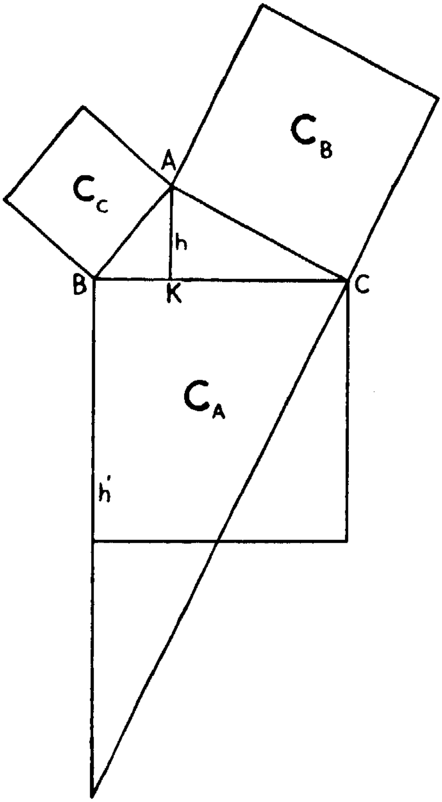
$$\text{Area de } D = AH \cdot AK \cdot \frac{AC}{BC}.$$

Y la igualdad $A = B + C \pm D$ se transforma en

$$A = B + C \pm AH \cdot AK \cdot \frac{AC}{BC}$$

Cuando se trata de polígonos, si, como se ha dicho antes, es h' la altura del polígono equivalente a P_A, la igualdad [9] se convierte en

$$P_A = P_B + P_C \pm AH \cdot AK \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{h'}{h} \qquad [10]$$



VI. Si los polígonos son cuadrados, C_A; C_B; C_C; observemos que C_A se transforma en triángulo equivalente de altura doble de BC. Luego:

$$\frac{h'}{h} = \frac{2 . BC}{AK}$$

y la igualdad [10] se convierte en

$$C_A = C_B + C_C \pm AH \;.\; AK \;.\; \frac{AC}{BC} \;.\; \frac{2 . BC}{AK},$$

que se reduce a

$$C_A = C \; + C \quad \pm 2 \;.\; AC \;.\; AH,$$

que nos dice: *El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más (o menos) el doble producto de* *uno de ellos por la proyección del otro sobre él, según se oponga a un ángulo obtuso (o agudo)*

Enunciado más correcto es éste: El cuadrado construido sobre un lado de un triángulo equivale a la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados más (o menos) el duplo del área del rectángulo que tiene por dimensiones uno de ellos y la proyección del otro sobre él, según se oponga a un ángulo obtuso (o agudo).

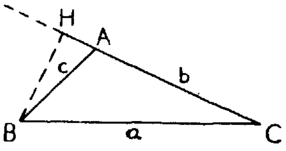
Si el ángulo opuesto es recto, el segmento AH es nulo, puesto que H coincide con A; y la relación anterior se reduce a

$$C_A = C_B + C_C \quad \text{que expresa el}$$

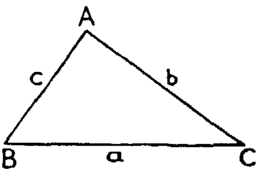
Teorema de Pitágoras.—*El cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.*

Este teorema se deduce fácilmente de la relación [8], o de la [9], sin más que suponer que el triángulo es rectángulo y que los polígonos son cuadrados.

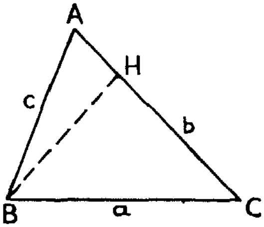
VII. Si, como de costumbre, se designan por *a, b, c* los números que miden los lados de un triángulo, referidos a una misma unidad, se tiene:



$a^2=b^2+c^2+2.b.\text{AH}$



$a^2=b^2+c^2$
(Pitágoras)



$a^2=b^2+c^2-2.b.\text{AH}$

VIII. APLICACIONES.—Las relaciones métricas estudiadas son de muy frecuente aplicación en la resolución de ejercicios. Entre estas aplicaciones vamos a citar las dos siguientes:

A) *Conocidas las medidas de los lados de un triángulo, determinar si es obtusángulo, rectángulo o acutángulo.*

Basta comprobar si el cuadrado del lado mayor es mayor, igual o menor que la suma de los cuadrados de los otros dos.

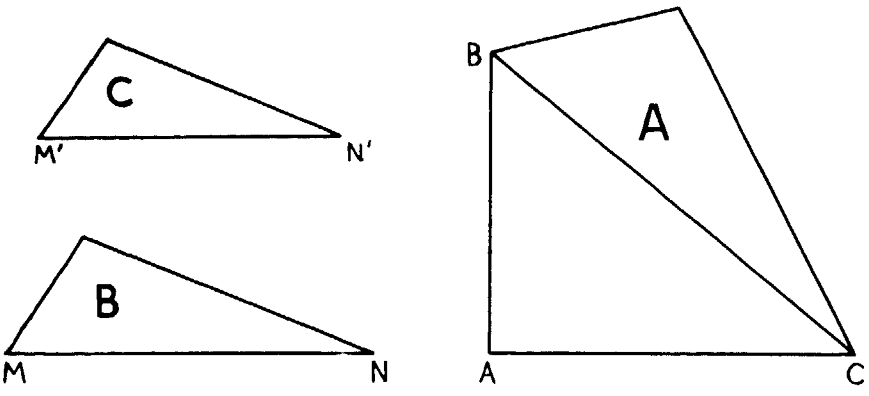
EJEMPLO: Si los lados de un triángulo miden: $a = 17$ cm., $b = 20$ cm.,

$c = 12$ cm.; como $20^2 < 17^2 + 12^2$, esto es, $b^2 < a^2 + c^2$, el lado mayor (el b) se opone a un ángulo agudo y, por tanto, el triángulo es acutángulo.

B) *Construcción, con regla y compás, de una figura semejante a otras dos y que equivalga a su suma o a su diferencia.*

Se reduce a construir un triángulo rectángulo conocidos los dos catetos o conocidos la hipotenusa y un cateto. He aquí dos ejemplos:

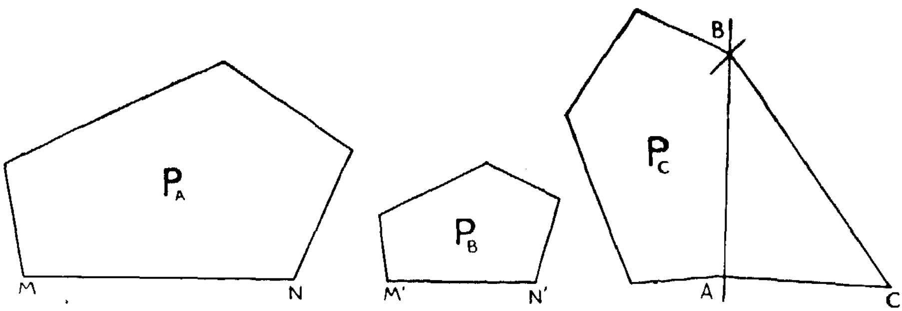
1.° Los triángulos B y C son semejantes. Se pide otro triángulo semejante a ellos y que equivalga a su suma.



Sobre dos semirrectas perpendiculares de origen A, se toman segmentos AC = MN y AB = M'N' (MN y M'N' son lados homólogos en la semejanza entre B y C). La hipotenusa BC del triángulo rectángulo ABC resuelve la cuestión. Y A es el triángulo pedido, semejante a B y C y equivalente a su suma.

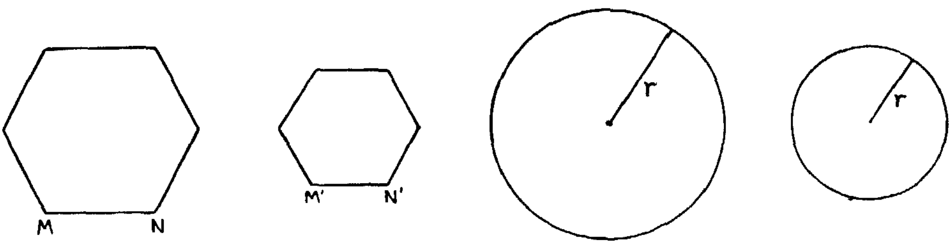
2.° Los polígonos P_A y P_B son semejantes. Se pide el polígono semejante a ellos que equivalga a su diferencia.

Se trazan dos semirrectas perpendiculares de origen A. Sobre una de ellas se toma AC = M'N', y con centro en C se traza un arco de radio MN, que corta a la otra semirrecta en B (MN y M'N' son lados homólogos en la semejanza entre P_A y P_B). El triángulo rectángulo ABC resuelve el problema; y P_C es el polígono semejante a P_A y P_B y equivalente a su diferencia.



Observación.—Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes. La razón de semejanza es igual a la razón de sus lados. Asimismo, todos los círculos son figuras semejantes. La razón de semejanza de dos círculos es igual a la razón de sus radios.

Por consiguiente, es inmediata la construcción, con regla y compás, del círculo equivalente a la suma o a la diferencia de otros dos.



$$\text{Razón de semejanza} = \frac{MN}{M'N'}$$

$$\text{Razón de semejanza} = \frac{\quad}{r'}$$

Como caso particular, para construir el círculo equivalente a una corona circular, de radios r y r', se construye el triángulo rectángulo de hipotenusa r y cateto r', como indica la figura. El círculo de radio PQ es equivalente a la corona.

Recuérdese, por otra parte, que si x es el radio del círculo pedido, como el área de la corona circular es

$$\pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

se ha de verificar:

$$\pi x^2 = \pi (r^2 - r'^2),$$

esto es:

$$x^2 = r^2 - r'^2,$$

los que nos lleva a la construcción antes indicada.