CONCEPTO DE MAGNITUD ESCALAR

Por JOAQUIN ARREGUI
(Del Consejo Superior de Investigaciones Científicas)

En algún libro de texto se ha definido la magnitud así: "Magnitud es una cantidad que puede aumentar y disminuir."

Un análisis de esta definición nos hace ver que apoya el concepto de magnitud en el de cantidad. Define la cantidad como "todo aquello que se puede medir", con lo que se hace necesario el concepto de medida para definir el de magnitud.

De esta forma se viene a caer en un círculo vicioso, pues es anterior el concepto de magnitud al de medida de una magnitud.

Continuemos el análisis de la definición anterior de magnitud. Si una cantidad aumenta o disminuye pasa a ser otra cantidad, por lo que podemos considerar una magnitud como el conjunto de todas las cantidades que se obtienen cuando una dada aumenta o disminuye.

Por otra parte, entendemos que una cantidad aumenta cuando se le añade otra cantidad, por lo que la idea de aumentar y disminuir presupone la posibilidad de sumar cantidades y de tener un criterio de igualdad y ordenación entre las cantidades de una magnitud. Es decir, dada una magnitud, M, y dos cantidades, $ab \in M$, debe existir un criterio por el que sea $a < b$, $a = b$, o bien $a > b$, y también una ley de suma por la que está determinada la cantidad $a + b \in M$, cantidad que debe depender sólo de los sumandos, y no del modo en que se realice la suma; es decir, esta suma ha de ser conmutativa y asociativa.

Este análisis nos ha llevado al resultado de que se aclara la definición dada, diciendo que una magnitud es un conjunto de cantidades en el que está definido un criterio de igualdad, está definida una ordenación, y una suma con las propiedades asociativa y conmutativa.

Se puede escribir esto más rápidamente diciendo que magnitud es un semigrupo aditivo abeliano y ordenado, cuyos elementos son cantidades.

Existen magnitudes que contienen la cantidad nula y cantidades negativas, por lo que adquieren la estructura de grupo.

Claro es que aún sigue en pie la dificultad nacida de la definición de cantidad, que nos lleva a un circulo vicioso.

Otra definición conocida de magnitud, más completa que la anterior, es la siguiente: "Magnitudes son entes abstractos entre los cuales se puede definir la igualdad y la suma." (J. Rey Pastor, curso cíclico de Matemáticas.)

Observamos que, según esta definición, no se puede decir qué es una magnitud hasta no haber definido un criterio de igualdad y haber establecido una definición de suma entre elementos, que después, por medio de estas definiciones de igualdad y suma, llevan al concepto de magnitud.

Es claro, que para no caer en círculo vicioso al tratar de fundamentar los conceptos, la igualdad y la suma citados en la definición anterior, no están definidos entre magnitudes, sino entre ciertos elementos dados, que, una vez definidas la igualdad y la suma, conducen al concepto de magnitud.

En la aclaración que hace de la definición, el propio autor define el concepto de cantidad (estado de una magnitud) por una igualdad de elementos y después por observación intuitiva establece la cantidad nula, ordenación arquimediana de cantidades y también la suma asociativa y conmutativa.

A partir de esta definición se llega también, entonces, a que las cantidades, es decir, los distintos estados de una magnitud, constituyen un semigrupo aditivo abeliano ordenado y con elemento nulo.

Después de estos comentarios a las definiciones citadas del concepto de magnitud, vamos a fundamentar de modo adecuado una definición de magnitud escalar.

RELACION DE IGUALDAD EN UN CONJUNTO φ

Consideremos un conjunto φ entre cuyos elementos está definida una relación **R**; si a, b son elementos de φ relacionados por **R**, se escribe $a\mathrm{R}b$, o bien $(a, b)\epsilon\mathrm{R}$.

Una relación **R** se llama una relación de equivalencia o igualdad cuando tiene estas tres propiedades:

I. Para todo $a\epsilon\varphi$ es $a\mathrm{R}a$ (propiedad reflexiva).
II. Si es $a\mathrm{R}b$, entonces también $b\mathrm{R}a$ (propiedad simétrica).
III. Si es $a\mathrm{R}b$ y $b\mathrm{R}c$, es también $a\mathrm{R}c$ (propiedad transitiva).

Dos elementos, a, $b\epsilon\varphi$, tales que $a\mathrm{R}b$, se dice que son equivalentes, iguales o congruentes respecto de la relación de equivalencia R.

Dado el conjunto φ y una relación de equivalencia R en φ, todos los elementos de φ quedan clasificados en subconjuntos de elementos, de tal forma que los elementos de cada uno de estos subconjuntos son iguales o equivalentes entre sí respecto de la relación R. Estos subconjuntos se llaman clases de equivalencia en φ respecto de R.

Si $a \in \varphi$ vamos a representar por $[a]$ el subconjunto de elementos de φ que son equivalentes a a. Se demuestra que dos clases de equivalencia distintas $[a] \neq [b]$ no tienen ningún elemento común.

Dado el conjunto φ y la relación de equivalencia R entre sus elementos, el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de φ respecto de R se llama conjunto cociente y se suele representar

por $\dfrac{\varphi}{R}$.

Queda así establecido un criterio de igualdad en un conjunto φ cuando se da una relación entre los elementos de φ que cumple las tres propiedades I, II y III.

Por ejemplo, consideremos como conjunto φ el conjunto de todos los segmentos de una recta. Establezcamos como relación R entre segmentos la congruencia; es decir, dos segmentos están relacionados por R cuando se pueden llevar a coincidir por medio de una traslación.

Esta relación R cumple, efectivamente, las tres propiedades I, II y III, por lo que es una relación de equivalencia, en φ, o una igualdad. Dos segmentos congruentes se llaman entonces iguales y se dice que tienen igual longitud.

Otro ejemplo es el siguiente: Sea φ el conjunto de todos los polígonos de un plano. Definimos la relación R del siguiente modo: decimos que dos polígonos están relacionados por R cuando son congruentes, es decir, se pueden llevar a coincidir por un movimiento, o bien se pueden descomponer en el mismo número de polígonos, de forma que sean congruentes cada uno de un polígono con uno del otro. Es fácil ver también que esta relación R cumple las tres propiedades I, II y III, y, por lo tanto, es una igualdad o equivalencia en φ. Dos polígonos que son equivalentes según R se dice que tienen el mismo área.

Una relación de equivalencia establece, pues, un criterio de igualdad respecto de algo que tienen en común todos los elementos de cada clase de equivalencia. Este algo suele recibir un nombre propio, como longitud en el primer ejemplo anterior, y área en el segundo.

DEFINICION DE SUMA EN UN CONJUNTO CUALQUIERA A

Suma o adición en el conjunto A es una ley de composición por la que a dos elementos cualesquiera $a, b, \in A$ se hace corresponder un elemento $c \in A$. Se suele escribir: $c = a + b$.

Se dice que la suma tiene la propiedad asociativa cuando se verifica que $(a+b)+c=a+(b+c)$ para tres elementos a, b, c cualesquiera de A; y se dice que es conmutativa cuando es siempre $a+b=b+a$.

DEFINICION DE SEMIGRUPO ADITIVO

Un conjunto A de elementos es un semigrupo aditivo cuando entre sus elementos está definida una suma con la propiedad asociativa. Si además la suma tiene la propiedad conmutativa, se dice que el semigrupo es abeliano o conmutativo.

CONJUNTOS TOTALMENTE ORDENADOS

Un conjunto φ se llama totalmente ordenado cuando entre sus elementos existe una relación, que podemos representar por el signo $\leqq$, que tiene las siguientes propiedades:

I′. $a \leqq a$ para todo elemento $a \in \varphi$.

II′. Si $a \leqq b$ y $b \leqq a$, es $a = b$ para $a, b \in \varphi$.

III′. Si $a \leqq b$ y $b \leqq c$, es $a \leqq c$ para $a, b, c \in \varphi$.

IV′. Dados dos elementos cualesquiera, $a, b \in \varphi$, se tiene siempre una al menos de estas relaciones: $a \leqq b$, o bien $b \leqq a$.

La relación $\leqq$ es una relación de orden o una ordenación en el conjunto.

SEMIGRUPOS ORDENADOS

Si φ es un semigrupo aditivo, en él se puede definir una relación de orden así: dados dos elementos $a, b \in \varphi$, se dice que es $a \leqq b$ cuando existe un elemento $x \in \varphi$, tal que $a+x=b$. Este elemento x se suele escribir $b-a$, y se llama diferencia de b y a.

Si φ es un semigrupo, se dice que es arquimediano o que tiene una ordenación arquimediana cuando dados dos elementos cualesquiera $a \leqq b$, existe un número entero n tal que es

$$b \leqq n \cdot a = a + a + \ldots\ldots + a \quad (n \text{ sumandos}).$$

Después de la introducción de estos conceptos, se puede dar una definición de magnitud.

DEFINICION DE MAGNITUD

Magnitud es un semigrupo aditivo abeliano con una ordenación arquimediana. Los elementos de una magnitud se llaman cantidades.

En el primer ejemplo anterior, en el que φ es el conjunto de todos los segmentos de una recta, hemos definido el conjunto cociente $\frac{\varphi}{R}$ formado por clases de segmentos de igual longitud; pues bien, en este conjunto cociente $\frac{\varphi}{R}$ se puede definir la suma de dos clases, $[a]$ y $[b]$, así: sea AB un segmento de la clase $[a]$ y BC un segmento de la clase $[b]$ que tiene en común con el segmento AB únicamente el punto B; la clase $[a] + [b]$ está formada por el segmento AC y todos sus equivalentes.

El semigrupo de clases de equivalencia $\frac{\varphi}{R}$ es la magnitud llamada longitud de segmentos.

Si φ es el conjunto de todos los polígonos del plano y $\frac{\varphi}{R}$ es el conjunto de clases formadas por polígonos del mismo área, se puede definir en $\frac{\varphi}{R}$ una suma así: Si A es un polígono de la clase $[a]$ y B es otro de la clase $[b]$, la clase $[a] + [b]$ está formada por el polígono $A + B$, en el que A y B tienen en común únicamente un lado de uno de ellos. En este caso, el semigrupo de clases de equivalencia $\frac{\varphi}{R}$ es la magnitud llamada área de polígonos planos.

Observamos que, dada una magnitud, no existen los conceptos de producto y cociente de cantidades de esa magnitud como cantidades de la misma magnitud.

RAZONES DE CANTIDADES DE UNA MAGNITUD

Teniendo en cuenta que no existe el concepto de cociente de cantidades en una magnitud, vamos a definir lo que es una razón de cantidades. Si M es una magnitud, vamos a considerar pares ordenados de cantidades de M; por ejemplo, el par (a, b), donde el orden de colocación de a y b es esencial. Se suele llamar MxM el conjunto formado por todos estos pares ordenados de cantidades de M.

En este conjunto MxM definimos una relación de equivalencia S, así: el par (a, b) y el par (c, d) son equivalentes cuando para todo par de números enteros m, n se tiene al mismo tiempo $ma > nb$ y $mc > nd$, o bien, $ma = nb$ y $mc = nd$, o bien, $ma < nb$ y $mc < nd$.

Esta relación cumple, en efecto, las tres propiedades de una equivalencia. El conjunto de todos los pares equivalentes al par (a, b) es una clase de equivalencia respecto de la relación S, que representaremos por el símbolo $\frac{a}{b}$, y que llamaremos rezón de las cantidades a y b. Escribir por tanto, que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es lo mismo que decir que los dos pares (a, b) y (c, d) son equivalentes respecto de la relación S.

El conjunto de todas las razones $\frac{a}{b}$ formadas con cantidades a y b de la magnitud M se llama conjunto cociente $\frac{MxM}{S}$ de MxM respecto de la relación S.

Se demuestra que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, es $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ y también $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. También que para todo entero r es: $\frac{a}{b} = \frac{ra}{rb}$.

POSTULADO DE EUDOXO-KRULL

Admitiremos que en toda magnitud M se cumple que dada una razón cualquiera $\frac{a}{b}$ y una cantidad arbitraria x, existe siempre otra cantidad y tal que $\frac{a}{b} = \frac{y}{x}$.

Con la introducción del postulado de Eudoxo-Krull, una razón $\dfrac{a}{b}$ adquiere un significado de gran interés, pues determina una correspondencia biunívoca entre las cantidades de la magnitud M.

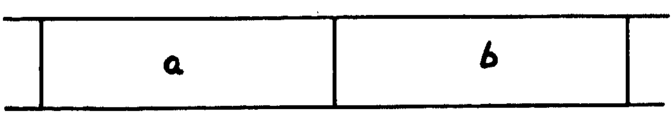
Efectivamente, fijada la razón $\dfrac{a}{b}$, dado cualquier elemento $x \varepsilon M$, la razón determina un único elemento, y, tal que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{y}{x}$.

(La demostración de que y es único puede verse en P. Abellanas: "Matemática para Físicos e Ingenieros", pág. 64.)

Recíprocamente, dado el elemento y, está determinado un único elemento x, tal que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{y}{x}$. Este x es el que verifica:

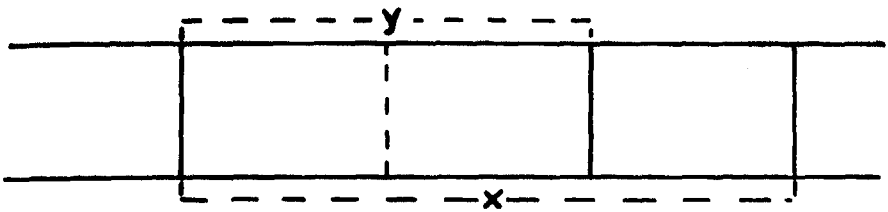
$$\frac{b}{a} = \frac{x}{y}.$$

Así, pues, una razón $\dfrac{a}{b}$ determina una correspondencia biunívoca entre las cantidades de M, que se suele expresar así: si $\dfrac{a}{b}$ hace corresponder el elemento y al x, escribimos $y = \dfrac{a}{b}(x)$. Se puede considerar un ejemplo sencillo que aclara el sentido de esta correspondencia definada por una razón $\dfrac{a}{b}$. Supongamos que la magnitud M sea una tira de papel de anchura constante, y sus cantidades



los trozos de papel obtenidos al cortar perpendicularmente a los bordes; por ejemplo, la a y la b. Siendo así esto, consideremos una razón, por ejemplo, la formada por las dos cantidades segunda y tercera: $\dfrac{2a}{3a}$. ¿Cuál es la correspondencia que define en la magnitud M?

Si es x una cantidad cualquiera de la tira de papel, vamos a ver cuál es la cantidad $y = \dfrac{2a}{3a}(x)$.



Se obtiene la cantidad y dividiendo la x en tres partes iguales y tomando dos de ellas; es decir, la cantidad y es lo que se conoce como los dos tercios de x.

La correspondencia $\dfrac{a}{b}$ así definida tiene esta interesante propiedad: si

$$y = \frac{a}{b}(x), \qquad y' = \frac{a}{b}(x'), \qquad \text{es} \qquad y + y' = \frac{a}{b}(x + x');$$

es decir, $\dfrac{a}{b}(x) + \dfrac{a}{b}(x') = \dfrac{a}{b}(x + x')$.

En efecto, siendo a la vez $m \cdot a \gtreqless nb$ y $m \cdot y \gtreqless nx$, y también $ma \gtreqless nb$ y $my' \gtreqless nx'$, se tiene también a la vez $ma \gtreqless nb$ y

$$m(y + y') \gtreqless n(x + x').$$

Una correspondencia biunívoca, con esta propiedad, se conoce con el nombre de insomorfismo. Así, una razón $\dfrac{a}{b}$ representa un insomorfismo de la magnitud M.

Operaciones en $\frac{MxM}{S}$. El hecho de que una razón $\frac{a}{b}$ represente una correspondencia o transformación en M permite definir dos operaciones entre los elementos de $\frac{MxM}{S}$.

Suma de razones.—Dadas dos razones, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, para cualquier cantidad x se tiene:

$$y = \frac{a}{b}(x), \qquad y' = \frac{c}{d}(x).$$

Se puede entonces establecer una correspondencia por la que a la cantidad x se le hace corresponder la cantidad

$$y + y' = \frac{a}{b}(x) + \frac{c}{d}(x).$$

Esta correspondencia la llamaremos suma de las correspondencias determinadas por $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, y la escribiremos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \quad (x) = \frac{a}{b}(x) + \frac{c}{d}(x).$$

Se demuestra que esta correspondencia suma está definida por una razón $\frac{u}{v}$ de $\frac{MxM}{S}$, es decir, $y + y' \frac{u}{v}(x)$, por lo que decimos que la razón

$$\frac{u}{v} = \frac{y + y'}{x} \quad \text{es la suma} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d}.$$

Vamos a ver, siguiendo con nuestro ejemplo de la tira de papel, cómo obtendríamos la suma de dos razones; por ejemplo, $\frac{2a}{3a} + \frac{a}{4a}$.

Sabemos ya quiénes son las cantidades $y = \dfrac{2a}{3a}(x)$ y también

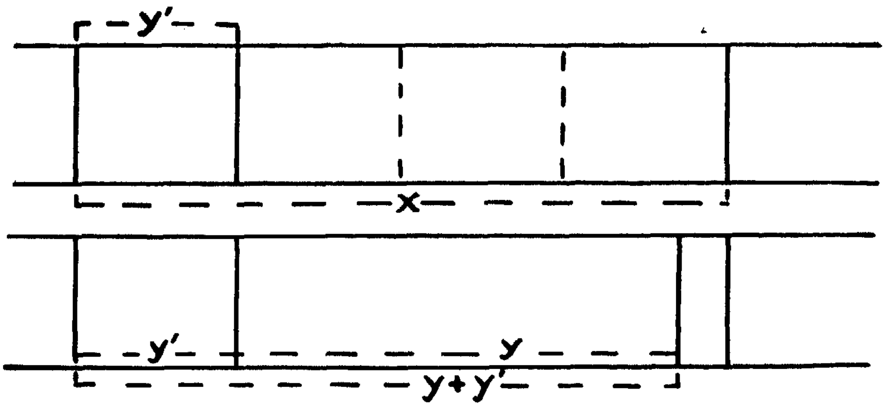
$$y' = \frac{a}{4a}(x).$$

Pues bien, $\dfrac{2a}{3a} + \dfrac{a}{4a}$ es la razón que nos da

$$y + y' = \frac{2a}{3a} + \frac{a}{4a}\ (x),$$

es decir,

$$\frac{2a}{3a} + \frac{a}{4a} = \frac{y + y'}{x} = \frac{2/3x + 1/4x}{x} = \frac{8x + 3x}{12x} = \frac{11x}{12x}.$$



Producto de razones.—Dadas las razones $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$, sea

$$y = \frac{a}{b}(x), \qquad z = \frac{c}{d}(y) = \frac{c}{d}\ \frac{a}{b}(x)\ .$$

Se puede establecer la correspondencia por la que a la cantidad x se hace corresponder la cantidad z. Se escribe:

$$z = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}(x).$$

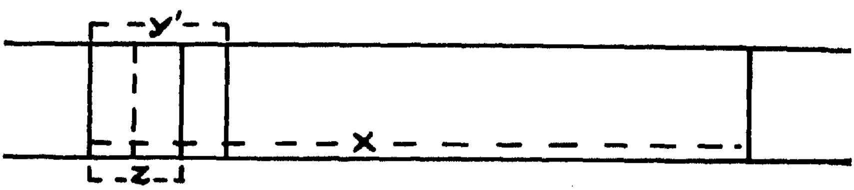
Se demuestra también que existe una razón $\frac{p}{q}$ tal que:

$$z = \frac{p}{q}(x),$$

por lo que se dice que $\frac{p}{q} = \frac{z}{x}$ es el producto de $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, y se escribe:

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

Un ejemplo del producto de razones se puede hacer de la misma forma. Sean las razones $\frac{a}{4a}$ y $\frac{2a}{3a}$. Si aplicamos primero la razón $\frac{a}{4a}$ tenemos $y' = \frac{a}{4a}(x)$; y se tiene $z = \frac{2a}{3a}(y')$ por el procedimiento explicado:



El resultado obtenido coincide con la cantidad:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} x = \frac{2}{12} x.$$

En el libro citado (P. Abellanas, "Matemática para Físicos e Ingenieros") se pueden ver las demostraciones de que el producto de razones así definido tiene las propiedades asociativa, conmutativa, distributiva respecto de la suma, que la razón $\frac{a}{a}$ es la unidad del producto, y que la razón $\frac{b}{a}$ es la inversa de $\frac{a}{b}$.

MEDIDA DE UNA MAGNITUD ESCALAR

Hemos visto que no se puede multiplicar ni dividir cantidades de una misma mignitud, ni tampoco se puede operar con cantidades de dos magnitudes distintas. Para resolver estas dificultades se pasa de las cantidades de las magnitudes que se consideran a sus medidas.

Como hemos hecho al introducir la definición de magnitud, también aquí comentaremos algunas de las ideas existentes acerca del concepto de medida, lo que ayudará a comprender más fácilmente la definición que damos.

En el libro citado de J. Rey Pastor, "Curso cíclico de Matemáticas", se da la siguiente definición: "Medir una magnitud es representar por un número cada una de sus cantidades o estados particulares, de modo que a cada cantidad corresponda un número y recíprocamente."

Observamos que según esta definición es necesario disponer de un conjunto de números tal que se pueda establecer una correspondencia biunívoca entre las cantidades de la magnitud que se pretende medir y los números del conjunto en cuestión. Llamaremos K este conjunto de números.

Ahora bien, evidentemente no toda correspondencia biunívoca entre cantidades y números tiene el carácter de medida de la magnitud, pues debe existir alguna relación entre las cantidades y sus medidas además de esta correspondencia exigida en la definición anterior de que a una cantidad le corresponda un número y recíprocamente. Es decir, es necesario aclarar cómo se averigua a una cantidad el número que nos da su medida. Por esto, el citado autor añade: "esto—es decir, la correspondencia—se logra casi siempre por comparación con una magnitud u homogénea con ella, llamada unidad o módulo. Así, si $a = u + u + \dots + u = hu$, el número abstracto h, que cuenta el número de veces que a contiene a u se llama medida de a respecto de la unidad u".

De este criterio establecido para hacer la correspondencia entre cantidades y sus medidas se deduce una serie de consecuencias de interés, que nos permiten conocer algo acerca del conjunto K de medidas:

1.° A la propia cantidad u le corresponde el número 1; por tanto, K debe contener la unidad.

2.° Si $a = b$, y es $a = hu$, también $b = hu$, es decir, dos cantidades iguales tienen medidas iguales.

3.° Si $a = hu$ y $b = ku$, es $a + b = (h + k)\,u$; es decir, una cantidad suma de dos tiene por medida la suma de sus medidas.

4.º También se deduce que si a, b, c y d son cuatro cantidades de una magnitud, y es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se tiene:

$$\frac{\text{medida }(a)}{\text{medida }(b)} = \frac{\text{medida }(c)}{\text{medida }(d)}.$$

Este cociente de números se puede llamar valor de la razón $\frac{a}{b}$.

5.º En particular, si es $d = u$, $a = hu$, $b = ku$, $c = ru$, de $\frac{a}{b} = \frac{c}{u}$ resulta $\frac{h}{k} = \frac{r}{1}$, y de aquí, $h = k \cdot r$, y también $r = \frac{h}{k}$.

Esto permite escribir: $\frac{a}{b} = \frac{hu}{ku} = \frac{hu}{ku}$.

Por lo tanto, el conjunto K de las medidas de las cantidades de una magnitud: I) contiene el elemento unidad, y II) si h y k son dos números de K, su suma $h + k$ y su producto $h \cdot k$ también son número de K.

Un conjunto de elementos con estas propiedades I y II suele llamarse un semicuerpo con elemento unidad; de donde se deduce que las medidas de una magnitud forman un semicuerpo con elemento unidad. Además, las propiedades 2.ª y 3.ª antes citadas nos dicen que la medida, o correspondencia que asigne a una cantidad un número de K, es un isomorfismo de la magnitud en el semicuerpo K.

Por tanto, estableceremos como definición de medida de una magnitud escalar la siguiente:

Definición.—Medir una magnitud escalar M es establecer un isomorfismo N de M en un semicuerpo con elemento unidad K, del conjunto de números reales. El isomorfismo queda unívocamente determinado por un par de elementos homólogos. Es decir, cuando se concreta la cantidad u, a la que corresponde la medida 1 : $N(u) = 1$. El isomorfismo M definido por esta condición se llama medida de la magnitud M respecto de la unidad de medida u.

Cambio de medida.—Dada la magnitud M, consideremos dos medidas N y N′ determinadas por la elección de las cantidades u, v, tales que $N(u) = 1$ y $N'(v) = 1$.

Se trata de hallar la relación que existe entre estas dos medidas, es decir, entre los números $N(x)$ y $N'(x)$ para cualquier cantidad $x \varphi M$.

Para resolver esta cuestión, observamos que para toda razón $\dfrac{a}{b}$ se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{N(a)u}{N(b)u} = \frac{N(a)}{N(b)}\,\frac{u}{u},$$

y también

$$\frac{a}{b} = \frac{N'(a)v}{N'(b)v};$$

de aquí:

$$\frac{N(a)}{N(b)}\,\frac{u}{u} = \frac{N'(a)}{N'(b)}\,\frac{v}{v}.$$

Pero siendo $\dfrac{u}{u} = \dfrac{v}{v}$ resulta que:

$$\frac{N(a)}{N(b)} = \frac{N'(a)}{N'(b)}.$$

Considerando la razón $\dfrac{x}{v}$, se tiene entonces

$$\frac{N(x)}{N(v)} = \frac{N'(x)}{N'(v)},$$

de donde $N'(x) = \dfrac{N(x)}{N(v)}$ para toda cantidad $x \varphi M$.

Además considerando la razón $\dfrac{u}{v}$ se deduce: $\dfrac{N(u)}{N(v)} = \dfrac{N'(u)}{N'(v)}$

y de aquí $N(v) \cdot N'(u) = 1$.

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Es conocida la definición de magnitudes proporcionales como "aquellas que corresponden biunívocamente en la igualdad y en la suma".

Consideremos dos magnitudes, M y M′, tales que entre ellas se puede establecer una correspondencia biunívoca y que cumple estas dos propiedades. Es decir, si a y b son dos cantidades de M, $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ sus correspondientes en M′ se verifica:

I) Si $a = b$, entonces $\varphi(a) = \varphi(b)$.

II) Si $a + b = c$, entonces $\varphi(a + b) = \varphi(c) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Según hemos visto, esta correspondencia biunívoca φ entre M y M′ que tiene las propiedades I y II es un isomorfismo entre dos semigrupos. Por esto damos la siguiente definición:

Definición.—Dos magnitudes M y M′ son proporcionales cuando existe un isomorfismo de una sobre la otra.

Medidas de magnitudes proporcionales.—Observamos que si M y M′ son dos magnitudes proporcionales, una medida de una de ellas determina una medida de la otra.

Sea n una medida de M, φ el isomorfismo de M sobre M′ y x una cantidad cualquiera de M. En M′ está determinada una medida n así: si es $\varphi(x) = x'$, entonces llamamos $n(x') = n(x)$. En particular, si es uMφ, tal que $\mathrm{N}(u) = 1$, y es $\varphi(u) = u'$, entonces $n(n') = 1$, y esta cantidad $u' = \varphi(u)$ determina el isomorfismo de M′ en el semicuerpo de sus medidas.

Según esto, las medidas N y N dan los mismos valores para cantidades de M y M′ que se corresponden en el isomorfismo φ.

Por otra parte, si N es cualquier medida de M, tal que $\mathrm{N}(u) = 1$, siendo $u' = \varphi(u)$ y $v' = \varphi(v)$, se tiene:

$$\frac{\mathrm{N}(a)}{\mathrm{N}(b)} = \frac{\mathrm{N}'(a')}{\mathrm{N}'(b')}, \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{N}(a)}{\mathrm{N}'(a')} = \mathrm{N}(v),$$

que se llama razón de proporcionalidad de M y M′ correspondiente a las medidas N y N′.

En efecto, en M′ existe la medida N por la que $\mathrm{N}(a) = \mathrm{N}(a')$, y con ella,

$$\frac{\mathrm{N}(a)}{\mathrm{N}(b)} = \frac{\mathrm{N}(a')}{\mathrm{N}(b')};$$

por otra parte, también se tiene, como hemos visto:

$$\frac{N(a')}{N(b')} = \frac{N'(a')}{N'(b')},$$

luego

$$\frac{N(a)}{N(b)} = \frac{N'(a')}{N'(b')}.$$

Además,

$$\frac{N(a)}{N(a')} = 1, \quad \text{y} \quad \frac{N(a')}{N'(a')} = \frac{N(v')}{N'(v')} = \frac{N(v)}{N'(v')} = N(v),$$

luego

$$\frac{N(a)}{N'(a')} = N(v).$$

Puesto que todos los semicuerpos K que contienen las medidas de magnitudes están contenidos en el cuerpo de los números reales, éste adquiere una gran importancia, pues sirve para medir todas las magnitudes escalares, y permite, por consiguiente, relacionarlas.

El conjunto de las ideas expuestas en estos apuntes, y la justificación de algunas afirmaciones que aquí se hacen sin demostrar, puede encontrarse en el libro del Prof. Abellanas "Matemática para Físicos e Ingenieros". Editorial Romo. Madrid.