

LA MATEMÁTICA MODERNA Y LA ENSEÑANZA MEDIA

Por el Prof. PEDRO ABELLANAS CEBOLLERO
(Catedrático de la Universidad de Madrid)

I. INTRODUCCION.

Sean mis primeras palabras para agradecer a la Dirección General de Enseñanza Media y al Centro de Orientación Didáctica el honor de hablar en este Seminario organizado por dichos organismos y felicitarles por el acierto de haberlo promovido.

Hace bastantes años que constituye una preocupación de carácter universal el estudio de un conjunto de problemas de diversa índole relacionados con la enseñanza de la matemática en sus diversos grados. Mencionaré, a título de ejemplo únicamente, las reuniones organizadas por la Société Mathématique de Francia en colaboración con L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public en el año 1956; el Seminario sobre enseñanza de la matemática, que tuvo su sede en Royaumont, patrocinado por la O. E. C. E., en 1959; la reunión organizada por la American Mathematical Association, en 1959; la conferencia sobre la enseñanza de la matemática en el suroeste de Asia de 1960 y el Seminario sobre la enseñanza de la matemática a los ingenieros y físicos, organizado por la O. E. C. E. en París, en febrero del año en curso. El problema central que ha preocupado en todas estas reuniones ha sido el mismo: «¿Qué matemática debe enseñarse en la actualidad en los diversos grados y especialidades en los que interviene esta disciplina?»

Es interesante observar que la pregunta anterior surge con carácter universal, como resulta de la distinta localización geográfica de las reuniones. Esto indica que el problema tiene su origen también en un hecho universal. Tiene importancia esta observación porque, de no llegar a las entrañas mismas del problema, no puede aspirarse a darle una solución adecuada.

2. EL ORIGEN DEL PROBLEMA DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

En el último congreso que he citado hace un momento, uno de los delegados señaló el carácter de verdadera explosión que ha tenido recientemente el desarrollo de la matemática, tanto en su dirección meramente especulativa como en el sentido de sus aplicaciones. Dándose la mera circunstancia de que teorías que se habían desarrollado muy recientemente en el primer aspecto, esto es, de carácter exclusivamente teórico o abstracto, habían sido utilizadas inmediatamente para la solución de problemas

(*) Conferencia pronunciada en la Reunión de Catedráticos de Matemáticas (Madrid, marzo 1961).

técnicos. Piénsese, por ejemplo, en las aplicaciones de las álgebras de Boole a problemas de redes eléctricas o de comunicaciones; la aplicación de las nuevas lógicas a las calculadoras electrónicas, etc. Este hecho no se había producido anteriormente, siendo necesario el transcurso de siglos hasta que encontraban aplicación teórica matemática pura. Por otra parte, el aspecto puramente cuantitativo de la producción de trabajos originales de matemáticas en el mundo es impresionante; un vistazo al *Mathematical Reviews* muestra que en los últimos años la producción de trabajos originales de matemática en el mundo es del orden de los diez mil, frente a los dos mil escasos de hace veinte años. Todo esto plantea con carácter de urgencia una revisión de las materias objeto de la enseñanza de la matemática en el grado superior y, como consecuencia, en los grados medio y primario.

Una de las finalidades de la Enseñanza Superior es la de proporcionar a los alumnos una formación específica que les capacita para poder emplear las técnicas fundamentales de su especialidad. Al producirse la actual explosión de nuevas técnicas en el campo de la matemática se ha presentado el hecho de quedarse rápidamente insuficientes las ordenaciones de estudios de los Centros superiores, y esto, como se desprende de los motivos universales que lo han originado, con carácter general. De aquí la necesidad de volver a pensar, con objeto de su actualización, en qué materias deben enseñarse. El problema, como todo problema fundamental de enseñanza, es una cuestión de selección.

Ahora bien, al plantearse este problema de selección de materias para la enseñanza, nos encontramos que la matemática actual está formada por dos clases de matemáticas: una de ellas que ha seguido las normas clásicas de desarrollo, y otra, a la que se ha dado en llamar matemática moderna o abstracta, con la ingenuidad e imprecisión que ambos calificativos presentan, que tiene otras características distintas. La existencia de estos dos tipos de matemática en la actualidad complica más el problema de selección, porque se da el hecho de que, en general, el matemático o el usuario de la matemática, no es neutral ante estas dos clases de matemática, lo que produce muchas veces un mayor o menor apasionamiento en sus juicios.

Hemos llegado a la cuestión que yo quería tratar ante ustedes: ¿Qué influencia debe ejercer la matemática moderna en la enseñanza? En particular, ¿debe tenerse en cuenta la existencia de la matemática moderna en la Enseñanza Media? Pero antes de ocuparse de estas cuestiones no estará de más que nos pongamos de acuerdo sobre qué es la matemática moderna, pues de no proceder así corremos el riesgo de atribuir distinto contenido a las palabras, con lo que no habría posibilidad de discusión.

3. ¿QUE ES LA MATEMATICA MODERNA?

Es bien notorio que los calificativos de moderno o abstracto no definan nada por sí mismos; el primero por referirse de un modo vago al tiempo, y el segundo, porque toda la matemática, y aun todo pensamiento, es abstracto. No obstante, las impugnaciones de la matemática moderna no

cesan de repetir que su principal defecto, especialmente desde el punto de vista didáctico, es su abstracción. Puede darse sentido a este reproche interpretando que lo que con él se quiere decir es que la matemática moderna supone un mero proceso de abstracción respecto de la matemática que no lo es; pero ni aun así resulta claro que pueda ser lo que se llama matemática moderna, pues habría que fijar hasta qué punto la abstracción no es «moderna» y en qué punto empieza a serlo.

Es bastante corriente, incluso entre los bourbakistas, admitir como matemática moderna la matemática axiomática (*), pero este carácter tampoco puede considerarse como definidor, puesto que toda la matemática, desde su nacimiento como tal ciencia en la Escuela de Alejandría, es axiomática. En todo caso, habría que decir que la matemática moderna es «más» axiomática que la que no lo es, presentándose la misma dificultad que hemos señalado anteriormente respecto de la abstracción.

Yo propongo la siguiente definición de matemática moderna: «En la matemática se definen los conceptos que se emplean (entendiendo la acción de definir en sentido lato, esto es, admitiendo también como definiciones las establecidas por los postulados) y se establecen proposiciones entre ellos. La matemática moderna se ocupa no sólo de definir los conceptos y establecer las proposiciones, sino de limitar el campo de validez de unos y otras.» Así, por ejemplo, si se enuncia el teorema de Standt para la Geometría proyectiva de la recta diciendo: «Existe una proyectividad única entre dos rectas que transforma tres puntos de la primera en otros tres puntos de la segunda», se tiene un teorema de matemática «no moderna»; pero si se enuncia en la forma: «La condición necesaria y suficiente para que exista una proyectividad única entre dos rectas que transforme tres puntos de la primera en otros tres de la segunda es que el cuerpo base del espacio proyectivo posea un único automatismo», se tiene un teorema de matemática «moderna». Análogamente, si se enuncia el teorema de Balzano-Weierstrans para la recta, se obtiene una proposición «no moderna», pero si se establece: «La condición necesaria y suficiente para que sea cierto el teorema de Balzano-Weierstrans es que el espacio sea métrico y compacto», se obtiene una proposición «moderna». Lo que sucede es que, para precisar los contornos que limitan la validez de los conceptos o de la proposición, es necesario afinar la axiomatización, y entonces se produce una nueva abstracción; pero tanto una como otra son subproductos de aquella operación. A mi modo de ver, es esta necesidad de limitar el campo de validez de conceptos y proposiciones lo que justifica la matemática moderna, pues es esta operación el quehacer ca-

(*) Véase, por ejemplo, N. Bourbaki: «L'Architecture des Mathématiques», en donde se dice: «Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de formes abstraites, les structures mathématiques; et il se trouve —sans qu'on sache bien pourquoi— que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. Il n'est pas viable, bien entendu, que la plupart de ces formes aient à l'origine un contenu instructif bien déterminé; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendus susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles et de remplir pleinement leur rôle élaborateur.»

racterístico de toda ciencia en cuanto tal. Piénsese en el origen de la matemática; va siendo ahora conocido que la cultura babilónica fué, en cuanto a la matemática se refiere, el escalón anterior a la matemática griega, y que la labor fundamental que realizó la Escuela de Alejandría fué exactamente la misma que se está realizando ahora en lo que llamamos matemática moderna, y que como consecuencia de ello apareció la primera axiomatización de la matemática. Lo que ha ocurrido, ha sido que aquella construcción, realizada por los griegos, ha sido suficiente para cobijar toda la producción matemática hasta mediados del siglo pasado, pero que a partir de entonces fué quedando insuficiente el edificio hasta el punto de tener que volver a ocuparse de realizar el mismo trabajo que realizaron aquéllos, y que por ser la ocupación que le ha correspondido a las últimas generaciones de matemáticas, ha recibido el apelativo de «moderna».

Convenía que nos hayamos parado a discurrir sobre todo esto, porque si nuestros juicios son correctos, las consecuencias que de ellos se pueden extraer son de gran interés para el asunto que nos ocupa. Pues al no ser la matemática moderna una moda de un grupo de investigadores, sino la tarea genuina que tienen que realizar las generaciones actuales de matemáticas, de ello se desprende que toda la matemática que siga se apoyará sobre esta matemática moderna y no sobre los Elementos de Euclides, como aconteció hasta el siglo pasado, y ello implica la necesidad de formar a las nuevas generaciones en el espíritu de la matemática que va a ser vigente en los años venideros.

Por otra parte, las opiniones que acabo de exponerles vienen corroboradas por los hechos. Una parte muy importante de la nueva matemática se está utilizando ya para resolver problemas de la técnica actual y de las ciencias experimentales. Ya no ha sido necesario, como ocurría hace cincuenta años, que transcurran varios siglos para que los resultados teóricos encuentren su aplicación práctica. Ahora puede decirse que muchos resultados que fueron obtenidos sin pensar en sus posibles aplicaciones, las han tenido inmediatamente de nacer.

Bien es verdad que para el matemático puro acostumbran a ser razones secundarias las apuntadas razones utilitarias. Se acostumbrará a basar la intrínseca belleza de su construcción, y puede calificarse de admirable la belleza de muchas de las construcciones de la matemática actual.

Ahora bien, el problema que estamos estudiando tiene otra vertiente: la didáctica, desde la que ha recibido la matemática moderna los ataques más duros. Conviene, por ello, que si queremos hacer un estudio completo del problema los tengamos en cuenta y les dediquemos unas palabras.

4. IMPUGNACIONES A LA MATEMÁTICA MODERNA.

Las impugnaciones de la matemática moderna concentran sus ataques en su abstracción (*). Unos, porque piensan que los métodos modernos no

(*) No puedo sustraerme a citar las siguientes palabras humorísticas de A. Lichnerowicz («Structures algébriques. Monographies de L'Enseignement Mathématique», n.º 7, página 43): «La théorie que je suis amené à vous exposer vous choquera sans doute

son creadores y que sólo sirven para pulir conocimientos adquiridos, algo así como labor de orfebrería. Sobre esto únicamente diré que seguramente opinarian lo mismo algunos contemporáneos cuando se elaboraban los Elementos de Euclides. Otros, porque estiman que el alumno debe recorrer en su aprendizaje las mismas etapas que la ciencia y que hasta que, como ésta, no llegue al convencimiento de la necesidad de una nueva abstracción no se pueden forzar las etapas, por incapacidad intelectual para la asimilación de conceptos abstractos directamente. Esta es una razón que merece discutirse, pues se ha apoyado incluso con datos estadísticos.

En el último Seminario citado en la introducción, al que asistí como miembro de la Delegación española, el profesor Contignal, de Francia, dió cuenta de que las experiencias realizadas en aquel país sobre enseñanza de la matemática moderna en el bachillerato habían dado resultados catastróficos. En apoyo de su tesis citó la solución dada por algunos alumnos que habían recibido enseñanza según el espíritu del bournakismo a un problema de exámenes. Se trata del siguiente ejercicio: «Hallar el lugar de los centros de las circunferencias de un plano tangente a dos rectas del mismo.» Algún alumno dió la siguiente solución: «Como el lugar de los centros de las circunferencias tangentes a una recta es todo el plano, el lugar buscado será la intersección de los lugares de los centros de las circunferencias tangentes a la recta a, que es todo el plano, con el lugar de los centros de las circunferencias tangentes a la recta b, que es también todo el plano; luego el lugar pedido es todo el plano.» De esta solución dada por algún alumno a un problema de examen deducía el mencionado profesor que la matemática moderna se presta a conducir a resultados erróneos debido a su carácter abstracto.

En la impugnación de la matemática moderna por razones de tipo didáctico es preciso distinguir los motivos de carácter subjetivo, desconocidos generalmente por el propio objetante, y que pueden tener dos orígenes: no haber asimilado su autor la matemática moderna, por lo que para él resulta ininteligible, resultando entonces muy cómodo rechazarla, o del que habiendo recibido una formación clásica y habiendo asimilado después la matemática moderna, piensa que el camino a seguir por las generaciones venideras ha de ser el mismo que recorrió él. Estos motivos no tienen, ninguno de los dos, interés cuando se hace un estudio sereno de la cuestión, por lo que deben de excluirse de toda consideración.

Separadas estas pseudorrazones, queda por analizar cuidadosamente si,

plus qu'elle ne vous réduira parce que vous, comme moi, avons été initialement conditionnées à autre chose. Ne me reprochez pas trop d'être «abstraite»: il est bien difficile de savoir au juste ce que cette douce injure signifie et la dose de concret n'est pas proportionnelle à la quantité de craie éparsé sur un tableau. Le concret est bien souvent précisément ce à quoi nous avons été conditionnés, les éléments de l'histoire de notre formation personnelle. Pour bien des mathématiciens de notre génération, l'algèbre moderne a été eue pour abstraite jusqu'au moment où nous l'avons assimilée. A ceux de nos collègues plus jeunes qui ont—si j'ose le dire—tété dès l'enfance le lait des espaces vectoriels, ce sont eux qui apparaissent d'un splendide concret.»

efectivamente, los métodos modernos no son asimilables por el alumno medio y si la causa de ello es debida a los propios métodos, el sistema empleado para enseñarlos o a la falta de formación del profesor. Pues la actitud a tomar será distinta en cada uno de estos casos.

5. CONCLUSIONES.

Estamos ahora en condiciones de volver al principio de nuestras consideraciones. Puede suceder que mi razonamiento anterior no haya convencido a alguno de ustedes y que siga pensando que la matemática moderna es una moda, que se encuentra en un periodo de máxima actividad, pero que no influirá en el cuerpo total de la doctrina matemática en un futuro muy inmediato. Alguno de ustedes puede pensar también que eran innecesarias mis palabras, pues resulta evidente que la matemática moderna representa hoy un volumen considerable de la producción matemática y que esta razón es suficiente para que influya en la enseñanza de la matemática actual, de modo análogo a como ha influido el hecho de haberse producido la segunda guerra mundial en la enseñanza de la geografía actual respecto de la geografía de hace treinta años. Pero el hecho de existir la matemática moderna no puede asimilarse al punto de partida en que se fundan estas dos actitudes extremas. En cuanto a los que ven en la matemática moderna simplemente una moda actual, sin más trascendencia, citaré un ejemplo. En una de las comunicaciones del Seminario sobre enseñanza de la matemática en el suroeste de Asia, un profesor del Reino Unido citaba el caso de un ejercicio de examen sobre Geometría Analítica Elemental propuesto en la Universidad a que pertenece. Se trata del siguiente ejercicio: «Dados dos puntos, A y B, del plano por sus coordenadas cartesianas, calcular las coordenadas del punto C tal que B sea el punto medio del segmento AC.» Algunos alumnos intentaron la solución del siguiente modo: 1.º Ecuación de la circunferencia de centro B y radio BA. 2.º Ecuación de la recta AB. 3.º Intersección de la circunferencia con la recta. Ninguna de ellas llegó a la solución del ejercicio. Ahora bien, analizando este modo de proceder, se observa que la formación de los alumnos que siguieron tal camino es una formación fuertemente euclídea. Pues, efectivamente, si se trata de resolver el problema gráficamente, el método anterior es el más indicado. Pero no sucede lo mismo en la solución analítica que se pide. Esto indica que la formación que se ha dado a los alumnos no es la apropiada, pues no son capaces de distinguir un problema lineal de un problema de segundo grado. Y, pensándolo bien, no debe maravillar que se intente tal camino para resolver un problema lineal cuando el alumno ha estado sometido a una fuerte formación en el sentido de los Elementos de Euclides, pues, en este libro, que ha sido durante muchos siglos toda la Geometría, el instrumento predominante, desde la primera página, es el compás, lo cual implica resolver problemas de primer grado empleando ecuación de segundo grado. Seguramente que el predominio del compás en los Elementos de Euclides tiene por origen el deseo de alejar todo lo posible la introducción del postulado de las paralelas, pero en la formación de los alumnos esto

implica anteponer la ecuación de segundo grado a la ecuación de primer grado, lo que no creo que nadie estime como un buen método pedagógico. Procediendo del modo en que se viene haciendo en casi todo el mundo, de exigir al alumno una fuerte formación en el sentido, más o menos liberal, de los Elementos de Euclides, no es de extrañar que al llegar a la Geometría analítica sigan pensando en resolver los problemas de primer grado mediante ecuación de segundo. Ahora bien, a partir del siglo pasado, se ha observado que todas las propiedades lineales del espacio euclídeo, forman una unidad, que puede estudiarse de modo más sencillo en otro espacio de estructura más simple que el espacio euclídeo, y así noción, primero, el espacio afin y después el espacio vectorial, como espacios más apropiados para estudiar el conjunto de todas las propiedades lineales del espacio euclídeo. Al pasar del espacio euclídeo al espacio vectorial o al espacio afin, se sistematiza el estudio de las propiedades lineales de aquél y se obtiene un punto de vista único válido para la Geometría y para el Álgebra. El presentar las propiedades lineales del espacio euclídeo y del Álgebra como una misma cosa proporciona una economía de pensamiento y permite que el alumno vea aplicación inmediata a la Geometría y a la Física de sus estudios de Álgebra. Ahora bien, esto es matemática moderna.

Creo que con este ejemplo queda también aclarada la falta de fundamento de los que justifican la necesidad de introducir los métodos de la matemática moderna exclusivamente por constituir nuevos resultados que, lo mismo que los nuevos límites geográficos de Europa, deben ser enseñados a los alumnos, pues la verdadera razón en la que se puede apoyar la necesidad de introducir la matemática moderna en el bachillerato no es ésta, ya que no se trata de nuevos resultados, sino una razón de economía del pensamiento y de organización de los conocimientos, lo cual es una razón de fuerte peso desde el punto de vista didáctico.

Con todo lo que antecede, habría querido hacer ver a ustedes que, según yo entiendo las cosas, no se trata, al pensar en una mejor organización de la enseñanza, de quitar unas cosas y añadir otras, como se podría hacer, por ejemplo, en Física: suprimir el termo y añadir el fundamento de la televisión. No. Se trata de algo mucho más difícil. Se trata de toda una nueva estructuración de la materia propia de estudio en la Enseñanza Media, mediante la cual se presenta ésta de un modo orgánico de acuerdo con la sistematización que proporciona la matemática moderna. Y esto debe hacerse así, porque lo que se propugna es más sencillo y más didáctico que lo antiguo y permite llegar más lejos con menor esfuerzo.

Ahora bien, conseguir esto no es labor de reducción de unos nuevos cuestionarios. Esto exige un trabajo experimental previo. Quizá fuese una buena solución designar a algunos catedráticos para que, en sus respectivas cátedras, fueran realizando esta labor experimental previamente planificada y organizada. Yo ofrecería con mucho gusto la colaboración del Departamento de Metodología del Instituto «Jorge Juan», del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, para la realización de esta labor.

RENOVACION de la DIDACTICA de las MATEMATICAS

«EL MATERIAL MODERNO MATEMATICO»,
nuevo libro del doctor don Pedro Puig Adam

Recientemente tuvo lugar en Madrid la XI Reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática, a la que asistieron las figuras más destacadas del Profesorado europeo, y en la que se trató concretamente de un tema tan interesante como la modernización del material didáctico a utilizar en las clases de Matemáticas. De la trascendencia de dicha Reunión, con la que se celebró simultáneamente la primera Exposición europea de dicho material, pueden informar los numerosos Catedráticos y Profesores de Institutos Nacionales de Enseñanza Media, Laborales y Escuelas del Magisterio que asistieron a las sesiones, para los que tanto la Reunión como la Exposición fueron un insuperable testimonio de cómo han de renovarse los métodos de la enseñanza dentro del cada día más amplio campo de las Matemáticas.

El doctor Puig Adam, iniciador en España de esta renovación, a requerimiento de la revista ENSEÑANZA MEDIA, recogió en este libro—aparte de la reseña detallada de la Reunión y Exposición anexa—las conclusiones pedagógicas adoptadas, agregando a los modelos, presentados por las distintas naciones participantes, diversas lecciones prácticas de aplicación, con lo que el libro pasa a ser un valioso elemento de orientación y trabajo para los Profesores de nuestra Enseñanza Media.

El sumario del libro es el siguiente:

Prólogo.

Parte primera: XI Reunión de la Comisión para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática; El papel de lo concreto en la Matemática.—Modelos, filminas y films didácticos.—Clases experimentales.

Parte segunda: Exposición de Material Didáctico: Material extranjero (Alemania, Prof. Pauls; Suiza; Uruguay, Prof. Galli; Italia, Profs. Castelnuovo, Campedelli y Pescarini; Francia, Prof. Biguenet; Austria; Inglaterra, Profesores Pesket y Gattegno; Bélgica, Profs. Servais, Delmotte, etc.).—Material español (Institutos Nacionales de Enseñanza Media; Instituto de «San Isidro», Prof. Puig; Institutos Laborales; otros Centros oficiales y privados).—Bibliografía.

Parte tercera: Reproducción fotográfica de modelos presentados en la Exposición (101 fotos).

Parte cuarta: Lecciones prácticas: Uso didáctico del material.—1. Angulos inscritos y arco capaz.—2. Haces de elipses e hipérbolas homofocales.—3. Posiciones de rectas y planos en el espacio.—4. Progresiones.—5. Congruencias y clases residuales.—6. Situaciones didácticas obtenidas por el plegado.—7. Construcciones geométricas con un vidrio oscuro.—8. El paraguas, modelo multivalente.—9. La geometría del atril.—10. Iniciación a las máquinas de calcular.—11. Álgebra y lógica de interruptores y conmutadores.

El precio del libro (ampliamente ilustrado) es de SETENTA PESETAS. Puede pedirse a la revista «Enseñanza Media»—Ministerio de Educación Nacional—, Alcalá, 30, 5.º, Madrid (14).