METODOLOGIA

ORDENACION DE LOS NUMEROS FRACCIONARIOS

Por JUAN RAFAEL SIMO
(Licenciado en Ciencias)

A primera vista parece que el conjunto infinito de los números fraccionarios no es *numerable,* o sea que no es coordinable con el conjunto N, igualmente infinito, de los números naturales. La razón de que esto aparentemente sea así es que, dados dos números naturales consecutivos cualesquiera, habrá siempre un número infinito de números fraccionarios comprendidos entre ellos, por lo que no parece posible establecer una *correspondencia biunívoca* entre ambos conjuntos.

Sin embargo, existe un sencillo procedimiento que permite establecer dicha correspondencia, es decir, que a *cualquier* número fraccionario m/n corresponda un número ordinal determinado y sólo uno, y recíprocamente.

Para ello se construye en primer lugar, con los sucesivos términos de la serie natural de los números tomados en sentido diagonal, el siguiente cuadro:

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=m$
$n=1$	1	3	6	10	15	$\frac{m^2+m}{2}$
$n=2$	2	5	9	14	20	$\frac{m^2+3m}{2}$
$n=3$	4	8	13	19	26	$\frac{m^2+5m+2}{2}$
$n=4$	7	12	18	25	33	$\frac{m^2+7m+6}{2}$
$n=5$	11	17	24	32	41	$\frac{m^2+9m+12}{2}$
$n=n$	$\frac{n^2-n+2}{2}$	$\frac{n^2+n+4}{2}$	$\frac{n^2+3n+8}{2}$	$\frac{n^2+5n+14}{2}$	——	$\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}+m$

El cuadro es, naturalmente, indefinido hacia abajo y hacia la derecha. m es el indicador de columnas y n el indicador de filas. Se observa en seguida que todas las columnas y filas del mismo forman progresiones aritméticas de segundo orden. El término general de una progresión de ese tipo viene dado por la fórmula

$$\binom{n}{2} r + (n-1) a + b$$

en que, como es sabido, b constituye el primer término de la progresión de segundo dada, a el primer término de la correspondiente progresión aritmética de primer orden formada por las sucesivas diferencias de los términos de la anterior, y r la razón constante de esta última.

De este modo, la fila *enésima* estará constituida por los términos generales de las sucesivas columnas y la columna *emésima* por los de las sucesivas filas. Todos estos términos generales se calculan fácilmente, aplicando la fórmula anterior, como sigue:

$$m=1 \; ; \; r=1 \, , a=0 \, , b=1 \; ; \; \frac{n(n-1)}{2}+1=\frac{n^2-n+2}{2}=\frac{(n-1)\,n}{2}+1$$

$$m=2 \; ; \; r=1 \;\; a=1 \, , b=3 \; ; \; \frac{n(n-1)}{2}+(n-1)+3=\frac{n^2+n+4}{2}=\frac{n(n+1)}{2}+2$$

$$m=3 \; ; \; r=1 \, , a=2 \, , b=6 \; ; \; \frac{n(n-1)}{2}+(n-1)2+6=\frac{n^2+3n+8}{2}=\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}+3$$

$$m=4 \; ; \; r=1 \, , a=3 \, , b=10 ; \frac{n(n-1)}{2}+(n-1)3+10=\frac{n^2+5n+14}{2}=\frac{(n+2)\,(n+3)}{2}+4$$

$$m=5 \; ; \; r=1 \, , a=4 \, , b=15 \; ; \frac{n(n-1)}{2}+(n-1)4+15=\frac{n^2+7n+22}{2}=\frac{(n+3)\,(n+4)}{2}+5$$

$$m=m \; ; \; \frac{(n+m-2)\,(n+m-1)}{2}+m$$

$$n=1 \; ; \; r=1 \, , a=1 \, , b=1 \; ; \; \frac{m(m-1)}{2}+(m-1)+1=\frac{m^2+m}{2}=\frac{(m-1)\,m}{2}+m$$

$$n=2\ ;\ r=1\quad a=2\,,\, b=2\quad ;\ \frac{m(m-1)}{2}+(m-1)2+2=\frac{m^2+3m}{2}=\frac{m(m+1)}{2}+m$$

$$n=3\ ;\ r=1\,,\, a=3\quad b=4\quad ;\ \frac{m(m-1)}{2}+(m-1)3+4=\frac{m^2+5m+2}{2}=\frac{(m+1)\ (m+2)}{2}+m$$

$$n=4\ ;\ r=1\,,\, a=4\,,\, b=7\quad ;\ \frac{m\ (m-1)}{2}+(m-1)4+7=\frac{m^2+7m+6}{2}=\frac{(m+2)\ (m+3)}{2}+m$$

$$n=5\ ;\ r=1\,,\, a=5\quad b=11\ ;\ \frac{m(m-1)}{2}+(m-1)5+11=\frac{m^2+9m+12}{2}=\frac{(m+3)\ (m+4)}{2}+m$$

$$n=n\ ;\ \frac{(m+n-2)\ (m+n-1)}{2}+m$$

Por tanto, la fórmula general que permite hallar el número natural contenido en cualquier casilla del cuadro, correspondiente a la columna de orden m y fila de orden n será, como es lógico, el resultado común de las dos generalizaciones precedentes, o sea

$$\boxed{\frac{(m+n-2)\ (m+n-1)}{2}+m} \qquad (1)$$

Este término de orden (m, n) no pertenece evidentemente a la diagonal señalada en la figura. Para los términos de la misma se tiene que cumplir la condición $n=m$, con lo que la fórmula (1) tomará la expresión

$$\frac{(2m-2)\ (2m-1)}{2}+m=(m-1)\,(2m-1)+m=\boxed{2m^2-2m+1} \qquad (2)$$

Se construye ahora un segundo cuadro, de tal manera que en cada una de sus casillas figure un número fraccionario cuyo numerador sea el valor de m para dicha casilla (equivalente a la columna a la cual pertenezca) y el denominador el valor de n (equivalente a la fila a que pertenezca la referida casilla).

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=m$
$n=1$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{m}{1}$
$n=2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{m}{2}$
$n=3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{m}{3}$
$n=4$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{m}{4}$
$n=5$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{m}{5}$
$n=n$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{4}{n}$	$\frac{5}{n}$	$\frac{m}{n}$

En este cuadro están contenidos los infinitos números fraccionarios posibles. En la diagonal señalada en la figura están *todos* los quebrados equivalentes a la *unidad;* entre el borde superior fijo del cuadro y aquella diagonal están *todos* los quebrados *impropios;* entre el borde izquierdo fijo del cuadro y aquella diagonal están *todos* los quebrados *propios*. Por tanto, a pesar del hecho de que, dado un número natural cualquiera, existen infinitos números fraccionarios equivalentes a él, y que entre dos números naturales cualesquiera están comprendidos infinitos números fraccionarios, sí es posible coordinar ambos conjuntos, haciendo corresponder a *cada* número fraccionario del segundo cuadro el número natural situado en la casilla correspondiente del primer cuadro. En consecuencia, EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS FRACCIONARIOS SI ES NUMERABLE.

El número natural correspondiente a un quebrado cualquiera m/n será lógicamente el término de orden (m, n) del cuadro primero, es decir,

$$\boxed{\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}+m}$$

y el correspondiente a un quebrado del tipo m/m (diagonal principal) será

$$\boxed{2m^2-2m+1}$$

Finalmente, colocando signo negativo a todos los términos de los dos cuadros, quedará debidamente establecida la correspondencia biunívoca entre el conjunto *completo* de los números fraccionarios y el conjunto Z de los números *enteros*, excluyendo de este último el cero (cosa perfectamente explicable por la circunstancia obvia de no existir el 0/0 como tal quebrado unitario).

Como comprobación de la fórmula (2) se puede considerar la diagonal principal (1, 5, 13, 25, 41, ...) como otra progresión aritmética de segundo orden, en la que $r=4$, $a=0$, $b=1$; así es que el término emésimo vendrá dado por

$$\frac{m(m-1)}{2}\cdot 4+1=2m(m-1)+1=2m^2-2m+1$$

Alcoy, abril de 1965.