MATEMATICAS DE PREUNIVERSITARIO

APOSTILLAS AL TEMA 13 SOBRE DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Por MANUEL SALES BOLI
Catedrático.

1. Si en el cuestionario del curso preuniversitario se ha incluido el estudio de los grupos, anillos y cuerpos, es lógico pensar que el tema de los polinomios deba estudiarse con la generalidad que esos conceptos introducen, lo que da lugar a algunas consecuencias interesantísimas e inesperadas que, además, vienen a demostrar que la teoría clásica de los polinomios no solamente resulta incompleta, sino, a veces, inexacta.

2. El origen de ello estriba en la existencia de los elementos DIVISORES DEL CERO en algunos anillos, de cuya existencia resulta como, primera consecuencia inesperada que *el grado del producto de dos polinomios no siempre sea igual a la suma de sus grados.*

EJEMPLO. Si el anillo de los coeficientes de los polinomios es el de las clases de restos Z/6 resulta:

$$\begin{array}{rrrr}
\overline{2}x^2 + & \overline{4}x & + \overline{3} & \\
 & \overline{3}x & + \overline{2} & \\
\hline
\overline{6}x^3 + & \overline{12}x^2 & + \overline{9}x & \\
 & \overline{4}x^2 & + \overline{8}x & + \overline{6} \\
\hline
\overline{0}x^3 + & \overline{4}x^2 & + \overline{5}x & + \overline{0}
\end{array}$$

y el producto ha resultado de grado 2 en vez de ser de grado 3.

La demostración del teorema clásico es:

Sean los polinomios de grados m y n

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a \,\ldots\ldots\ldots + a_0 \qquad (a_m \neq 0)$$

y

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + b_0 \qquad (b_n \neq 0)$$

El término principal del producto es $a_m b_n x^{m+n}$ y, como a^m y b^n son necesariamente distintos de cero, será también $a_m b_n \neq 0$, por consiguiente, este término no puede ser 0 y el producto es de grado $m + n$.

Pero en este razonamiento se ha deslizado un error, ya que el producto $a_m b_n$ puede ser 0 aún siendo $a_m \neq 0$ y $b_n \neq 0$, si estos dos elementos fueran divisores del 0 en el anillo básico de los polinomios.

3. Obsérvese que esto sólo ocurre cuando los dos coeficientes principales de los polinomios factores sean dos divisores complementarios del cero en el anillo básico.

No podrá ocurrir si uno de esos coeficientes es el elemento unidad, caso de que el anillo básico lo tenga, es decir que:

Si el anillo básico de los polinomios tiene elemento unidad, e, *y el término principal de alguno de los factores es este elemento* e, *el teorema clásico sobre el grado del producto subsiste.*

El enunciado completo y exacto del teorema general es pues el siguiente:

Si el anillo básico, A, *de los polinomios es un dominio de integridad o un cuerpo, el anillo* A(x) *de los polinomios es también de integridad y en él el grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores.*

4. DIVISIÓN ENTERA DE POLINOMIOS. Si el anillo básico A, no es un cuerpo, la división entera sólo podrá realizarse si A es anillo con elemento unidad e, y si éste es el coeficiente principal del divisor, aunque A tenga divisores del cero.

En estas condiciones, según hicimos observar en el número 3, el grado del cociente será igual a la diferencia de los grados del dividendo y del divisor y, por esta razón, la regla de Ruffini relativa a la división de un polinomio en x por $x - a$, es aplicable aunque el anillo básico tenga divisores del cero, con tal que tenga elemento unidad.

EJEMPLO. En el anillo Z/6 el elemento unidad es la clase $\overline{1}$. La división:

$$(\overline{4}x + \overline{2}x^2 + \overline{5}x + \overline{1}) : (x - \overline{3})$$

es

$$\begin{array}{rrrr|l}
\overline{4} & +\overline{5} & +\overline{2} & +\overline{1} & \overline{1}-\overline{3} \\ \cline{5-5}
& +\overline{0} & & & \overline{4}+\overline{5}+\overline{5} \\ \cline{1-2}
& \overline{5} & +\overline{2} & & \\
& & +\overline{3} & & \\ \cline{2-3}
& & \overline{5} & +\overline{1} & \\
& & & +\overline{3} & \\ \cline{3-4}
& & & \overline{4} &
\end{array}$$

y, aplicando la regla de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & \overline{4} & +\overline{5} & +\overline{2} & +\overline{1} \\
 & & \overline{0} & +\overline{3} & +\overline{3} \\
x=\overline{3} & & & & \\ \hline
 & \overline{4} & +\overline{5} & +\overline{5} & +\overline{4}
\end{array}$$

5. Descomposición factorial. A pesar de esto, la consecuencia que del teorema de Ruffini se deduce, sobre el número de ceros de un polinomio, no es cierto si A no es anillo de integridad.

EJEMPLO 1.° En Z/6 el polinomio de 2.° grado $x^2 + \overline{3}x + \overline{2}$ tiene cuatro ceros:

$$\overline{1},\ \overline{2},\ \overline{4} \text{ y } \overline{5}$$

y ese polinomio tiene dos descomposiciones factoriales distintas:

$$P(x) = (x - \overline{1})(x - \overline{2}) = (x - \overline{4})(x - \overline{5})$$

EJEMPLO 2.° En el mismo anillo Z/6, el polinomio de tercer grado $x^3 - x$ tiene seis ceros:

$$\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4} \text{ y } \overline{5}$$

y tiene tres descomposiciones factoriales distintas:

$$P(x) = x(x - 1)(x - 5) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = (x - 3)(x - 4)(x - 5).$$

EJEMPLO 3.º En el anillo Z/10, el polinomio $x^5 - \overline{9}x$ tiene 10 ceros:

$$\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{5},\ \overline{6},\ \overline{7},\ \overline{8} \text{ y } \overline{9}$$

y cuatro descomposiciones factoriales:

$$(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 7)$$
$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5)(x - 7)$$
$$(x - 3)(x - 5)(x - 6)(x - 7)(x - 9)$$
$$(x - 1)(x - 5)(x - 7)(x - 8)(x - 9).$$

El enunciado exacto del teorema sobre el número de ceros de un polinomio es pues:

Si el anillo básico A, es de integridad con elemento unidad o es un cuerpo, todo polinomio del anillo A(x) *no puede tener más ceros que los que indica su grado y la descomposición factorial es única.*

Pero si A tiene divisores del cero, el polinomio puede tener más ceros que los que indica su grado y varias descomposiciones factoriales distintas.

PRINCIPIO DE IDENTIDAD

6. POLINOMIOS IDÉNTICAMENTE NULOS. En esta teoría general de los polinomios, el elemento neutro de la adición es *el polinomio nulo*, que tiene nulos todos los coeficientes, y que no debe confundirse con *los polinomios idénticamente nulos que son los que toman el valor numérico cero para todo valor de la indeterminada* x *tomando en anillo básico A*.

EJEMPLO. En los ejemplos 2º y 3.º del número anterior hemos visto que los polinomios $x^3 - x$ y $x^5 - \overline{9}x$ se anulan para todos los valores de los respectivos anillos básicos Z/6 y Z/10, y, sin embargo, no son polinomios nulos.

No es pues cierto en general el teorema que afirma que "*Condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea idénticamente nulo, es que tenga nulos todos sus coeficientes*".

7. Una demostración clásica directa de este teorema fue publicada por M. G. SANNIA en "SUPLEMENTO" al "PERIODICO DI MATEMATICA", marzo 1902.

En ella se procede por inducción, comenzando por demostrar que el teorema es cierto para los polinomios de primer grado $a \cdot x + b$, pues si fuera

$$ax_1 + b = 0 \qquad \text{y} \qquad ax_2 + b = 0$$

La diferencia sería

$$a(x_1 - x_2) = 0$$

y siendo $x_1 \neq x_2$ tendría que ser $a = 0$, y entonces queda $b = 0$.

Pero en la teoría general puede ocurrir que aún siendo $x_1 - x_2 \neq 0$, y $a \neq 0$, sea, sin embargo, $a(x_1 - x_2) = 0$.

EJEMPLO 1.° En Z/6 el polinomio de primer grado $\overline{3}x - \overline{3}$ se anula para los valores $x_1 = \overline{3}$, $x_2 = \overline{1}$ y $x_3 = \overline{5}$.

EJEMPLO 2.° Y en el anillo Z/10, el polinomio $5x - 5$, también de primer grado, se anula para los valores

$$x_1 = \overline{1}, \quad x_2 = \overline{3}, \quad x_3 = \overline{5}, \quad x_4 = \overline{7} \quad \text{y} \quad x_5 = \overline{9}.$$

Resulta pues que estos polinomios de primer grado tienen varios ceros sin ser idénticamente nulos.

8. Queda pues demostrado que la coincidencia de *los polinomios idénticamente nulos* con *el polinomio nulo*, sólo es cierta cuando el anillo básico sea un anillo de integridad con elemento unidad; pero, aún en este caso, debe advertirse que ese anillo debe ser infinito, pues si fuera finito:

$$A = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \}$$

el producto

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_n)$$

sería un polinomio que se anularía para todos los valores del anillo básico A y sería, por tanto, *idénticamente nulo* sin ser *el polinomio nulo*.

EJEMPLO. El anillo Z/5 es un cuerpo, por tanto, es anillo de integridad, carece pues de divisores del cero. Sus elementos son:

$$\overline{0}, \ \overline{1}, \ \overline{2}, \ \overline{3} \ \text{y} \ \overline{4}$$

y el producto

$$x(x - \overline{1})(x - \overline{2})(x - \overline{3})(x - \overline{4}) = x_5 - x.$$

Sin ser el polinomio nulo se anula para todos los valores del anillo básico.

El enunciado exacto y preciso del principio de identidad es pues el siguiente:

En un anillo básico de integridad, con elemento unidad e infinito, el único polinomio idénticamente nulo es el polinomio nulo.

Y dos polinomios son idéticamente iguales cuando tienen los mismos coeficientes.

Exposición de Material Didáctico de Matemáticas

EL año pasado se envió por el Centro de Orientación Didáctica de Enseñanza Media una circular, y se publicó una nota, en la que se decía: "Es propósito del Centro de Orientación Didáctica organizar una exposición de material didáctico de Matemáticas, respondiendo al deseo manifestado en las últimas reuniones de catedráticos, la cual se celebrará en la primavera próxima, e invitándose a colaborar en ella a todos los Centros de Enseñanza Media."

Por diversas razones, la Jefatura de Servicios pedagógicos ha considerado conveniente señalar como fecha para esa exposición la primera quincena de junio

El Centro de Orientación Didáctica invita a todos los Centros de Enseñanza Media para que respondan a este llamamiento de colaboración, pues no se trata de improvisar en estos momentos, sino presentar aquel material utilizado o disponible, que se considere de interés, por modesto que sea, dentro del material didáctico de nuestra disciplina: Trabajos, modelos, bien de originalidad y elaboración de los Profesores, o construidos por los propios alumnos, y en general cualquier otro, incluso el que haya sido adquirido en el comercio, con tal de que se considere útil. Se trata de una pequeña exhibición de ese material.

El Centro de Orientación Didáctica agradece de antemano la colaboración e interés de todos los Centros de Enseñanza Media, oficiales y no oficiales, que sumen sus esfuerzos en bien de la enseñanza.

El referido material debe enviarse al Centro de Orientación Didáctica de Enseñanza Media, Sagasta, 27, Madrid, antes del 30 de mayo.