LECCIONES DE PREUNIVERSITARIO

RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Por MANUEL SALES BOLI
Catedrático

1. Sabido es que la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales se consigue por eliminación de incógnitas y que los métodos de eliminación se fundan en los siguientes teoremas de equivalencia:

1.° Se puede alterar el orden de las ecuaciones.

2.° Se pueden multiplicar todos los términos de una ecuación por un número distinto de cero.

3.° Se puede sustituir una ecuación por una combinación lineal de ella con otras del sistema.

2. Todos estos teoremas pueden expresarse por medio del producto de matrices, según vamos a ver a continuación (véase H. Bck, "Einfürung in die axiomatik der Algebra", Berlín, 1926; y Lentin-Rivaud, "Elements d'Algebre Moderne", París, 1961).

Sea el sistema $m \,.\, n$ (m ecuaciones con n incógnitas).

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = p_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = p_m \end{array}\right. \qquad [1]$$

El sistema puede expresarse matricialmente del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \qquad [2]$$

o también:

$$A \,.\, \vec{x} = \vec{p} \qquad [3]$$

En estas expresiones todo lo que se diga sobre la equivalencia de sistemas puede aplicarse a las matrices.

Se llama matriz del sistema a la matriz A de la igualdad [2] y matriz ampliada a la que tiene una columna más con los términos independientes, así:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & p_m \end{array}\right) \qquad [4]$$

3. Multiplicando la matriz A' a la izquierda por la matriz unidad de orden m, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & p_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & p_m \end{array}\right)$$

o sea:

$$U \,.\, A' = A'$$

4. Pero si en la matriz U se permutan las filas i y j, en el producto por A' quedan también permutadas estas dos filas, como se comprueba con el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1.°

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} a_{11} \cdots a_{1n} & p_1 \\ a_{21} \cdots a_{2n} & p_2 \\ a_{31} \cdots a_{3n} & p_3 \\ a_{41} \cdots a_{4n} & p_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a_{31} \cdots a_{3n} & p_3 \\ a_{11} \cdots a_{1n} & p_1 \\ a_{21} \cdots a_{2n} & p_2 \\ a_{41} \cdots a_{4n} & p_4 \end{array}\right) \qquad [5]$$

En este producto la tercera fila ha pasado a ocupar el primer lugar, lo mismo que se ha hecho en la matriz U.

Obsérvese que, con este producto de matrices, se realiza el primer teorema de la equivalencia de matrices: "cambiar el orden de las ecuaciones".

5. Si en la matriz U se sustituye alguno de los 1 de la diagonal principal por otro número no nulo, la correspondiente fila de A' queda multiplicada por ese número, como se comprueba en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.º
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} & p_1 \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} & p_2 \\ a_{31}\, a_{32} \ldots a_{3n} & p_3 \\ a_{41}\, a_{42} \ldots a_{4n} & p_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} & p_2 \\ ha_{31} & ha_{32} \ldots & ha_{3n} & hp_3 \\ a_{41} & a_{42} \ldots & a_{4n} & p_4 \end{array}\right) \quad [6]$$

La tercera fila ha quedado multiplicada por h.

Como se ve este producto realiza el segundo teorema de equivalencia.

6. Finalmente, si en la matriz U se escriben varios números no nulos en la fila i, sustituyendo o no el elemento 1 que figura en ella por otro número no nulo, se habrá realizado el tercer teorema de equivalencia.

EJEMPLO 3.º
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} & p_1 \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} & p_2 \\ a_{31}\, a_{32} \ldots a_{3n} & p_3 \\ a_{41}\, a_{42} \ldots a_{4n} & p_4 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} & p_1 \\ ha_{21} + ka_{41} & ha_{22} + ka_{42} \ldots & ha_{2n} + ka_{4n} & hp_2 + kp_n \\ a_{31} & a_{32} \ldots & a_{33} & p_{3n} \\ a_{41} & a_{42} \ldots & a_{4n} & p_4 \end{array}\right) \quad [7]$$

RESOLUCION DE SISTEMAS

METODO DE REDUCCION POR MATRICES

7. Sabido es que el método de eliminación de incógnitas por reducción se funda en el tercer teorema de equivalencia y consiste en sustituir una ecuación por una combinación lineal de ella por otras del sistema, de manera que el coeficiente de la incógnita que se quiere eliminar quede reducido a cero.

Si esto se realiza con todas las ecuaciones del sistema excepto con una, se habrá conseguido eliminar esa incógnita.

Este procedimiento puede efectuarse cómodamente en cualquier sistema de ecuaciones, sea cuadrado, vertical u horizontal, y cualquiera que sea el número de ecuaciones y el de incógnitas, por medio de la multiplicación, a la izquierda, por una matriz cuadrada regular (de determinante no nulo) de orden igual al número de ecuaciones del sistema, según hemos visto en el ejemplo 3.º (7), obteniéndose otra matriz equivalente a la primera y, por tanto, otro sistema equivalente al propuesto.

De este modo se obtiene:

$$\mathrm{M}\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & p_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & p_1 \\ \hline 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} & q_2 \\ 0 & b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3n} & q_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} & q_m \end{array}\right)$$

Procediendo luego de igual modo con la matriz (b_{ij}) se obtiene otra matriz de la forma:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & p_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} & q_2 \\ \hline 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & r_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{m3} & \dots & c_{mn} & r_m \end{array}\right)$$

y así se continúa hasta que todos los elementos que queden por debajo de la diagonal principal sean nulos.

La matriz que así resulta es de la forma triangular equivalente a la matriz primitiva A' y el sistema de ecuaciones correspondiente a esta matriz es también equivalente al propuesto.

EJEMPLO 1.º.—Sea el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 3z - 2u = 6 \\ x + 3y - 5z + 2u = 1 \\ 4x + 9y + 2z - 4u = 1 \\ 3x + 2y - z + 4u = 9 \end{array}\right.$$

cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -5 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 9 \end{array}\right) \qquad [1]$$

Conservaremos la segunda fila que es la más sencilla, pasándola al primer lugar, lo que se consigue multiplicando la matriz anterior, a la izquierda, por la fila (0 1 0 0).

Anularemos el coeficiente 2 de la primera fila de la matriz [1] restando, de la primera fila, el duplo de la segunda, lo que se consigue multiplicando la matriz [1], a la izquierda, por la fila (— 1 2 0 0).

Se anula el coeficiente 4 de la tercera fila, multiplicando por (— 2 0 1 0); y el coeficiente 3 de la cuarta fila de [1], multiplicando por (0 3 0 — 1).

La operación total es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -5 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 9 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 3 & -5 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 7 & -13 & 6 & -4 \\ 0 & 11 & -4 & 0 & -11 \\ 0 & 7 & -14 & 2 & -6 \end{array}\right) \qquad [2]$$

Procediendo de modo semejante con las tres últimas filas de la matriz [2], conservaremos la primera de sus filas por ser la más sencilla; restaremos la tercera fila de la primera, multiplicando por (1 0 — 1) y eliminaremos el 11 de la segunda fila, multiplicando por (0 7 — 11).

La operación total es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -11 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -13 & 6 & -4 \\ 11 & -4 & 0 & -11 \\ 7 & -14 & 2 & -6 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc|c} 7 & -13 & 6 & -4 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 126 & -22 & -11 \end{array}\right) \qquad [3]$$

y finalmente, reduciendo las dos últimas filas de esta matriz, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 126 & -0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 126 & -22 & -11 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 526 & 263 \end{array}\right) \qquad [4]$$

El resultado final es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -5 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 9 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -13 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 526 & 263 \end{array}\right)$$

De la última fila resulta:

$$526u = 263 \quad , \Rightarrow \quad \boxed{u = \frac{1}{2}}$$

Sustituyendo en la fila anterior,

$$z + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 0}$$

Sustituyendo estos dos valores en la segunda fila se tiene

$$7y - 0 + 3 = -4 \quad \Rightarrow \quad 7y = -7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -1}$$

y de la primera fila resulta

$$x - 3 + 0 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3}$$

Obsérvese que todo se reduce a realizar los tres productos de matrices [2], [3] y [4] lo que resulta fácil, cómodo y rápido.

Comparado este procedimiento con cualquiera otro de los usuales se podrá comprobar la ventaja de este método de reducción por matrices.

8. DISCUSION DE UN SISTEMA.—Dado un sistema cualquiera, cuadrado, vertical u horizontal, una vez reducida su matriz a la forma triangular equivalente podrá tomar una de las siguientes formas:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & p_1 \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & q_2 \\ & & c_{33} & c_{34} & r_3 \\ & & & d_{44} & s_4 \\ \hline & & & 0 & t \end{array}\right) \quad [1] \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & p_1 \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & q_2 \\ & & c_{33} & c_{34} & r_3 \\ & & & d_{44} & s_4 \\ \hline & & & 0 & 0 \end{array}\right) \quad [1b]$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & p_1 \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & q_2 \\ & & c_{33} & c_{34} & r_3 \\ \hline & & & 0 & t \end{array}\right) \quad [2] \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & p_1 \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & q_2 \\ & & c_{33} & c_{34} & r_3 \\ \hline & & & 0 & 0 \end{array}\right) \quad [2b]$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & p_1 \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & q_2 \\ & & 0 & 0 & r \\ \hline & & & 0 & t \end{array}\right) \quad [3] \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & p_1 \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & q_2 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 \end{array}\right) \quad [3b]$$

Los sistemas cuya matriz triangular equivalente toma una de las formas indicadas a la derecha: [1], [2] ó [3], son incompatibles porque las últimas ecuaciones son:

$$Ou = t \quad ; \quad Oz + Ou = t$$

que carecen de solución.

Los sistemas cuya matriz triangular equivalente es de la forma [1*b*] son determinados porque la última ecuación es $d_{44}u = s_4$, que admita una solución única.

Y los sistemas cuya matriz triangular toma una de las formas [2*b*] ó [3*b*] son indeterminadas: si es de la forma [2*b*], simplemente indeterminada; y si es de la forma [3*b*], doblemente indeterminada, pues la última ecuación de cada una es:

$$c_{33}z + c_{34}u = r_3 \qquad b_{22}y + b_{23}z + b_{24}u = q_2$$

Obsérvese con qué facilidad se obtiene la discusión de un sistema sin recurrir al complicado teorema de Rouché.

9. RANGO O CARACTERISTICA DEL SISTEMA.—Se llama Rango, R, del sistema al número de filas no nulas de la matriz triangular transformada de A; y Rango, R', al de la matriz ampliada A'.

Como se ve puede ser R' = R ó R' = R + 1.

Lo primero se verifica en los tipos [1*b*], [2*b*] y [3*b*], que son compatibles; y lo segundo en los tipos [1], [2] y [3] que son incompatibles.

Y si n es el número de incógnitas se tiene el siguiente resumen:

$$\text{R}' = \text{R, sistema compatible} \begin{cases} \text{R} = n\text{, sistema determinado} \\ \text{R} < n\text{, sistema indeterminado,} \\ \qquad \text{de orden } n - \text{R.} \end{cases}$$

R' = R, sistema incompatible

EJEMPLO 1.º

$$\begin{cases} 2x + 3y - 8z + u = 4 \\ x - y \qquad - u = 1 \\ 3x + 2y + z \qquad = 6 \\ 6x + 14y - 50z + 6u = 15 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 14 & -50 & 6 & 15 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 5 & -8 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 10 & -52 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -8 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 3 \\ 10 & -52 & 6 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 5 & 1 & 6 & 3 \\ \hline 0 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 54 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 1 & 1 \\ 54 & 6 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Este sistema es incompatible porque la úlútima acuación es

$$0y + 0z = -3$$

EJEMPLO 3.º

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + 4z = 1 \\ x + 2y \quad 3z = 4 \\ 4x + y - 2z = 9 \\ 3x - y + z = 5 \end{array}\right.$$

Este es un sistema vertical (4 ecuaciones con 3 incógnitas)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & 9 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -10 & 7 \\ \hline 0 & 7 & -10 & 7 \\ 0 & 7 & -10 & 7 \end{array}\right) \qquad [2]$$

Las tres últimas ecuaciones son iguales; queden pues solamente las dos primeras.

Los rangos son: R = 2, R' = 2, el número de incógnitas es 3; el sistema es pues indeterminado de orden $3 - 2 = 1$.

De la segunda ecuación (matriz [2]), resulta:

$$y = \frac{10z + 7}{7}$$

Sustituyendo en la ecuación primera,

$$x + \frac{20y + 14}{7} - 3z = 4 \quad ; \quad \Rightarrow \quad x = \frac{14 + z}{7}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La solución es}\\[2mm] x = \dfrac{14 + h}{7}\\[3mm] y = \dfrac{7 + 10h}{7}\\[2mm] z = h\end{array}}$$

EJEMPLO 4.º

Sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 3z - u - v = 0\\ 2x - y + z \qquad - 2v = 0\\ 2x + 5y - 8z + 4u - 3v = 0\\ x + y - 2z + u - v = 0\\ x + y - z + u - 2v = 0\\ 3x - 3y + 4z - u - 3v = 0\end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2\\ 2 & 5 & -8 & 4 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 4 & -1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0\\ 0 & 6 & -9 & 4 & -1\\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 6 & -7 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

La segunda fila y la cuarta son iguales. Prescindiendo de una de ellas, se prosigue la reducción así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 0\\ 6 & -9 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 6 & -7 & 4 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Las tres últimas ecuaciones han resultado iguales. El sistema ha quedado reducido a la matriz

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0\\ & 3 & -5 & 2 & 0 & 0\\ & & 1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

El sistema es de rango $R = R' = 3$ con 5 incógnitas; es pues doblemente indeterminado.

De la última resulta: $z = v$.

Sustituyendo en la segunda,

$$3y - 5v + 2u = 0 \Rightarrow y = \frac{5v - 2u}{3}$$

Y de la primera

$$x = \frac{5v - 2u}{3} - v + u - 2v = 0 \quad ; \quad x = \frac{4v - u}{3}$$

La solución es

$$\boxed{x = \frac{4k - h}{3} \quad ; \quad y = \frac{5k - 2h}{3} \quad ; \quad z = k \quad ; \quad u = h \quad ; \quad v = k}$$

EJEMPLO 5.º—*Sistema con parámetros para discutir.*

$$\left\{ \begin{array}{l} (m + 2)x + (m - 3)y = 1 \\ 2(m - 1)x + \quad 3y \quad = 3m - 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(m - 1) & -(m + 2) \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} m + 2 & m - 3 & 1 \\ 2m - 2 & 3 & 3m - 1 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} m + 2 & m - 3 & 1 \\ 0 & 2m^2 - 11m & -3m^2 - 3m \end{array} \right)$$

El sistema será simplemente indeterminado si

$$2m^2 - 11m = 0 \quad \text{y} \quad 3m^2 + 3m = 0$$

lo que ocurre si $m = 0$.

En cambio, para $x = 2/11$ se anula la primera de estas ecuaciones pero no la segunda. El sistema es incomplatible para este valor

$$\boxed{x = 2/11}$$

DEMOSTRACION DE LA REGLA DE CRAMER POR PRODUCTO DE MATRICES

Sea

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

la matriz ampliada de un sistema cuadrado de ecuaciones lineales:

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad [1]$$

La matriz formada por los adjuntos de los elementos a_{ij} de la matriz A, escritas por columnas es:

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_1 \\ A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

El producto $A_1 \,.\, A'$ es:

$$A_1 \,.\, A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} A & 0 & 0 & \dots & 0 & \Sigma A_{i1}b_i \\ 0 & A & 0 & \dots & 0 & \Sigma A_{i2}b_i \\ 0 & 0 & A & \dots & 0 & \Sigma A_{i3}b_i \\ \dots & & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A & \Sigma A\ B \end{array}\right)$$

El sistema queda transformado así:

$$Ax_1 = \Sigma A_{i1}b_i \quad Ax_2 = \Sigma A_{i2}b_i \quad Ax_n = \Sigma A_{in}b_i \qquad [2]$$

de donde la solución.

$$\boxed{x_1 = \frac{\Sigma A_{i1}b_i}{A} \quad ; \quad x_2 = \frac{\Sigma A_{i2}b_i}{A} \quad ; \quad x_{nn} = \frac{\Sigma A_{in}b_i}{A}} \qquad [3]$$

Obsérvese que el sistema [2] es equivalente al propuesto [1] por haber multiplicado los dos miembros de [1] por la matriz A_1, así:

$$A_1 \,.\, \vec{Ax} = \vec{A_1 b}$$

y ya demostramos anteriormente que esta operación produce otro sistema equivalente.