LECCIONES DE PREUNIVERSITARIO

EL NUMERO NATURAL

Por MANUEL SALES BOLI
Catedrático

PREAMBULO

El concepto de número natural puede exponerse por dos procedimientos distintos: o por medio de la teoría de conjuntos o adoptando un adecuado sistema de axiomas.

En algunos libros y trabajos de Matemática moderna, más o menos adecuados al curso preuniversitario, en lo relativo a este tema, no se adopta con toda pureza ninguno de estos dos procedimientos, más bien se intercalan ambos, pues, a continuación de un amplio desarrollo de la teoría de conjuntos, se toma, para definir el número natural, un sistema de axiomas, no siempre perfecto, para seguir luego demostrando otras propiedades por la teoría de conjuntos

En el libro de "Historia de las Matemáticas", de Rey Pastor, leemos: "La Ma- "temática llamada moderna, como toda variación esencial en el progreso de cual- "quier actividad humana, ha ido precedido de un largo período de transición y adap- "tación, transcurrido el cual, quedaron consolidadas las nuevas ideas y trazado el "nuevo derrotero.

"La génesis del álgebra moderna tuvo sus comienzos en las ideas de GRASS- "MANN, KRONECKER, GALOIS, CANTOR, DEDEKIND y otros sobre núme- "ros algebraicos, hipercomplejos, sistemas modulares, vectores, tensores, matrices, "grupos, cuerpos e ideales.

"Surgió luego la escuela algebrista, cuyos principales investigadores fueron HEL- "MUNTH HASSE, EMMY NOETHER y EMIL ARTIN, que ordenaron todas es- "tas disciplinas, entre los años 1924 al 30, en un cuerpo de doctrina que expusie- "ron con el nombre de "ALGEBRA MODERNA", cuyos trabajos fueron publica- "dos por WAN DER WAERDEN en 1930, obra que, en esencia, contiene ya todo "lo que hoy se entiende por "Matemática Moderna."

Tienen una importancia fundamental en el concepto de los números naturales, tratado por la teoría de conjuntos, los de conjunto finito e infinito.

CANTOR y DEDEKIND (1888 y 1887) definían el conjunto infinito por la propiedad de ser coordinable con alguno de sus conjuntos parciales y conjunto finito el que no es finito. También los define así PISOT y ZAMANSKI en su libro "Mathématique General" (1963).

Pero esta definición negativa del conjunto finito no fue bien acogida por otros matemáticos, pretendiendo conseguir una definición directa de esta clase de conjuntos.

Se llegó así a obtener una definición perfectamente determinativa (véase HEINRICH WEBER, "Enziclopëdie der elementarmathematik", 1903, y REY PASTOR, "Análisis algebraico", séptima edición, 1941).

Esta definición es la siguiente: "Un conjunto es finito cuando cada una de sus partes tiene primero y último elementos."

Comenzaremos exponiendo la teoría de los números naturales por la de los conjuntos.

Según ésta, la definición rigurosa y exacta de esta clase de números es: "Los números naturales son los CARDINALES de los conjuntos finitos."

Es necesario, pues, definir con precisión lo que entendemos por CARDINAL DE UN CONJUNTO y CONJUNTOS FINITOS.

EL NUMERO NATURAL SEGUN LA TEORIA DE CONJUNTOS

1. CONJUNTOS ORDENADOS.—*Se dice que un conjunto está ordenado cuando se ha establecido una relación entre cada dos de sus elementos que los distingue en uno ANTERIOR y otro POSTERIOR.*

Si a es anterior a b, se escribe:

$$a \prec b$$

Entonces es b posterior a a, lo que se expresa:

$$b \succ a$$

De estas definiciones se deducen las siguientes propiedades:

1.ª $\boxed{\text{Siendo } a \text{ y } b \in A, \text{ es: } \left\{ \begin{array}{c} a \prec b \\ \text{o} \\ b \prec a \end{array} \right.}$ (Ordenación total)

$\boxed{\text{Si es } \quad a \prec b \quad \longleftrightarrow \quad b \succ a}$ (Propiedad simétrica)

Debe cumplirse además la siguiente condición

Si a, b y $c \in$ A $\left\{ \begin{matrix} \text{De} & a \prec b \\ \text{y} & b \prec c \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \prec c$	(Transitiva)

EJEMPLO.—No es totalmente ordenado el conjunto de los cuadriláteros dispuestos de lo general a lo particular.

Cuadriláteros-Trapezoides-Trapecios-Paralelogramos

$$\text{Romboide} \left\{ \begin{matrix} \text{Rectángulo} \\ \text{Rombo} \end{matrix} \right\} \text{Cuadrado}$$

Pues no quedan ordenados el rectángulo y rombo.

2. ELEMENTOS NOTABLES EN UN CONJUNTO ORDENADO.—

Si a $\in$ A *es anterior a todos los demás, de* A, *se dice que es el PRIMERO o MINIMO elemento de* A.

Si m $\in$ A *es posterior a todos los demás elementos de* A, *se dice que es el ULTIMO O MAXIMO elemento de* A.

Si un elemento no es ni mínimo ni máximo, se llama INTERIOR al conjunto A.

Si es a $\prec$ b $\prec$ c, *se dice que* b *ESTA ENTRE* a *y* c.

Si entre dos elementos m *y* n *no hay otros, se dice que son CONSECUTIVOS;* m *es el ANTERIOR INMEDIATO a* n *y éste el POSTERIOR INMEDIATO a aquél.*

Estos elementos, PRIMERO, ULTIMO y CONSECUTIVOS no siempre existen, como se comprueba en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1.º—El conjunto de los números naturales no tiene último.
EJEMPLO 2.º—El de los números enteros no tiene ni primero ni último.
EJEMPLO 3.º—En el conjunto de los números racionales, ordenados de menor a mayor, no tiene primero ni último ni tampoco elementos consecutivos, pues entre dos números racionales siempre hay otros.

Si n es el siguiente inmediato de m se escribe:

$$n = \text{sig. } m \quad \text{o} \quad m = \text{ant. } n$$

3. CORTADURAS EN UN CONJUNTO ORDENADO.—*Se llama CORTADURA en un conjunto ordenado,* A, *a toda PARTICION del mismo en dos subconjuntos,* A_1 *y* A_2, *tales que todo elemento de* A_1 *sea anterior a todos los de* A_2.

A_1 *se llama sección inferior y* A_2 *sección superior.*

Puede ocurrir que A_1 no tenga máximo o que A_2 no tenga mínimo.

CONJUNTOS BIEN ORDENADOS

4. *Un conjunto,* A, *se llama BIEN ORDENADO si todo subconjunto,* A', *tiene un elemento mínimo.*
De esto se deduce que *el propio conjunto A tiene un mínimo,* puesto que A es parte de sí mismo.

5. TEOREMA 1.º—*Todo elemento de un conjunto bien ordenado tiene un siguiente inmediato.* (Pero puede ocurrir que algunos elementos no tengan anterior inmediato.)

En efecto, sea: $m \in A$, y $A' \subset A$, el subconjunto de A formado por todos los elementos posteriores a m.

Por ser A bien ordenado, A' tendrá un mínimo, sea n. Este n es, pues, el primer elemento que sigue a m; es, pues, el sig. m.

Los elementos que no tienen anterior inmediato se llaman SINGULARES.

EJEMPLOS.—El conjunto

$$1, 3, 5, 7, \ldots; 2, 4, 6, 8, \ldots$$

formado por los números impares, seguidos de los pares, tiene el elemento singular 2.

El conjunto

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots; 1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots; 2, \frac{5}{2}, \frac{6}{3}, \ldots; 3, \frac{7}{2}, \frac{8}{3}, \ldots$$

Tiene los elementos singulares 1, 2, 3,...

CONSECUENCIA.—*Toda sección superior de un conjunto bien ordenado tiene un mínimo.*

6. TEOREMA 2.°.—*PRINCIPIO DE INDUCCION.—*

Hipótesis 1.ª.—Si un elemento, m, *de un conjunto bien ordenado,* A, *tiene una propiedad* P.

Hipótesis 2.ª.—Y si al tener también la propiedad P *todos los elementos anteriores a* m, *la tiene* m.

CONCLUSIÓN.—*Todos los elementos del conjunto* A *tienen esa propiedad.*

En efecto: Si hubiera algunos elementos de A que no tuvieran la propiedad P, esos elementos formarían un conjunto A' $\subset$ A que, por ser A bien ordenado, A' tendría un primer elemento, sea *n*. Resultaría, pues, que todos los elementos anteriores a *n* tendrían la propiedad P; por tanto, en virtud de la segunda hipótesis, también *n* tendría esa propiedad, lo que es absurdo.

CONJUNTOS SIMPLEMENTE BIEN ORDENADOS

7. DEFINICIÓN.—*Un conjunto bien ordenado sin elementos singulares se llama SIMPLEMENTE BIEN ORDENADO o SUCESION.*

Estos conjuntos son, pues, casos particulares de los bien ordenados, tendrán, pues, todos la propiedad de estos últimos, así:

1.° *Todo subconjunto de uno simplemente bien ordenado tiene un elemento primero.*

2.° *El propio conjunto tiene un elemento primero.*

3.° *Todo elemento de un conjunto simplemente bien ordenado tiene un SIGUIENTE INMEDIATO, excepto el último elemento de* A, *si lo tuviera.*

4.° De la definición se deduce además que: *En todo conjunto simplemente bien ordenado, todo elemento, excepto el primero, tiene un anterior inmediato,* puesto que el conjunto no tiene elementos singulares.

5.° *Toda sección superior de un conjunto simplemente bien ordenado tiene un primer elemento,* lo que es consecuencia de 1.°.

Y toda sección inferior tiene un último elemento, lo que es consecuencia de 4.°.

6.º VALE EL PRINCIPIO DE INDUCCION, que ahora puede enunciarse así:

Hipótesis 1.ª—Si un elemento, m, *de un conjunto simplemente bien ordenado,* A, *tiene una propiedad* P.

Hipótesis 2.ª—Y si al tenerla otro elemento k, *posterior a* m *la tiene también el sig.* k.

CONCLUSIÓN.—*Se puede asegurar que todos los elementos del conjunto* A *tienen esa propiedad.*

CONJUNTOS FINITOS

8. DEFINICION.—*Un conjunto se llama finito cuanto todo conjunto parcial tiene primero y último elementos.*

Resulta de esto que *el propio conjunto tendrá primero y último elementos.*

Y que *todo conjunto parcial de uno finito es también finito.*

9. OTRAS PROPIEDADES.—Resulta también de la definición que *todo conjunto finito es bien ordenado en sus dos sentidos* y de las propiedades de los bien ordenados se deducen las siguientes propiedades de los conjuntos finitos.

1.ª *Todo elemento de un conjunto finito, distinto del primero, tiene un anterior inmediato. No hay, pues, elementos singulares.*

Y todo elemento, distinto del último, tiene un siguiente inmediato.

2.ª De la propiedad anterior resulta que *los conjuntos finitos son casos particulares de los simplemente bien ordenados.*

3.ª *Toda sección inferior de un conjunto finito tiene un elemento máximo y toda sección superior, tiene un elemento mínimo.*

4.ª *Es aplicable a los conjuntos finitos el principio de inducción,* enunciado como se hizo en el N.º 7, 6.ª.

10. TEOREMA.—*Si* A *es un conjunto finito, también lo es el conjunto* { A, m }. Pues si todo conjunto parcial de A tiene un máximo y un mínimo, también los tendrá todo conjunto parcial de { A, m }.

11. TEOREMA.—*Todo conjunto finito es biyectivo consigo mismo cualquiera que sea el orden en que se dispongan sus elementos.*

El teorema es evidente para el conjunto { a } de un solo elemento.

Y si fuera cierto para otro conjunto A, lo sería también para el conjunto $\{ A, m \}$.

Pues si $\bar{A}$ y $\bar{\bar{A}}$ fueran dos ordenaciones distintas del conjunto A, sería, por hipótesis,

$$\bar{A} \xrightarrow{\text{biy}} \bar{\bar{A}}$$

luego

$$\{ \bar{A}, m \} \xrightarrow{\text{biy}} \{ \bar{\bar{A}}, m \}$$

y si en esta biyección es

$$h \xrightarrow{\text{biy}} k \quad \text{y} \quad m \xrightarrow{\text{biy}} m,$$

se podría establecer otra biyección en la que fuera

$$h \xrightarrow{\text{biy}} m \quad \text{y} \quad m \xrightarrow{\text{biy}} k$$

y, por el principio de inducción puede permutarse m con cualquier otro elemento de A, con lo que queda demostrado el teorema.

En los párrafos anteriores hemos querido hacer resaltar la dependencia y jerarquía que existe entre los conjuntos bien ordenados, simplemente bien ordenados y finitos; pero en la exposición del concepto del número natural pueden estudiarse de modo directo los conjuntos finitos, como indicamos a continuación.

La definición es la misma que dimos en el número 8.

Consecuencias inmediatas son:

1.ª *Todo conjunto parcial de uno finito es también finito.*

2.ª En particular: *toda sección inferior tiene un elemento máximo y toda sección superior, uno mínimo.*

3.ª *Cada elemento, distinto del último, tiene un siguiente inmediato y cada elemento, distinto del primero, un anterior inmediato.*

a) Sea $m \in A$ y A'' el conjunto parcial formado por todos los elementos de A posteriores a m. Este conjunto A'' es una sección superior de A que, según 2.ª, tendrá un mínimo, sea n; n es, pues, el primer elemento que sigue a m.

b) Asimismo, sea A' el conjunto formado por todos los elementos de A que preceden a m. Este conjunto A' es una sección inferior de A que tiene

un máximo, sea *n*, que es, por tanto, el último de los elementos de A que preceden a *m*.

4.ª ***Si* A *es finito, también lo es* { A, *m* }.**
Se demuestra como en el número 10.

6.ª ***Principio de inducción.—Se enuncia como en el número* 7, 6.ª *y se demuestra* así: Si en el conjunto A hubiera elementos que no tuvieran la propiedad P, estos elementos formarían un conjunto parcial de A que, en virtud de la propiedad 1.ª, tendría un primer elemento, sea *n*.**

Entonces, el anterior inmediato a *n* sí que tendría la propiedad P, y, en virtud de la 2.ª hipótesis, también la tendría *n*.

7.ª ***Todo conjunto finito es biyectivo consigo mismo, cualquiera que sea el orden en que se dispongan sus elementos.***
Se demuestra como en el número 11.

12. El conjunto $\{ a \}$ es evidentemente finito y, por lo dicho en el número 10, también lo son los conjuntos

$$\{ a \}, \{ a, b \}, \{ a, b, c \}, \{ a, b, c, d \}, \ldots$$

El conjunto $\mathcal{N}$, formado por todos estos conjuntos finitos, se llama LA SUCESION NATURAL DE LOS CONJUNTOS FINITOS.

$$\mathcal{N} = [\{ a \}, \{ a, b \}, \{ a, b, c \}, \{ a, b, c, d \}, \ldots]$$

13. TEOREMA.—*Todo conjunto finito es biyectivo con uno de la sucesión* $\mathcal{N}$.

Sea el conjunto

$$C = \{ a', b', c', \ldots, k' \}$$

Se puede establecer la biyección

$$a' \xrightarrow{\text{biy}} \{ a \}$$

y si

$$m' \xrightarrow{\text{biy}} m \quad \Rightarrow \quad \text{sig. } m' \xrightarrow{\text{biy}} \text{sig. } m$$

y, en virtud del principio de inducción, aplicable a los conjuntos finitos, todo elemento de C, tendrá su homólogo en $\mathcal{N}$. Será pues

$$C \xrightarrow{\text{biy}} \{ a, b, c, \ldots k \}$$

que es uno de los conjuntos de la sucesión.

Resulta de esto que *todo conjunto finito tiene su representante en la sucesión* $\mathfrak{N}$.

CARDINALES

14. DEFINICION.—*Todos los conjuntos biyectivos entre sí forman una clase de equivalencia,* pues

1.° Si

$$A \xrightarrow{\text{biy}} B \quad \longleftrightarrow \quad B \xrightarrow{\text{biy}} A \text{ (prop. simétrica)}$$

y 2.°

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } A \xrightarrow{\text{biy}} B \\ \text{y } B \xrightarrow{\text{biy}} C \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A \xrightarrow{\text{biy}} C \text{ (prop. transitiva)}$$

Resulta, pues, que *todos los conjuntos pueden agruparse en CLASES DE EQUIVALENCIA y cada clase puede representarse por uno cualquiera de sus conjuntos.*

Y se dice que *todos los conjuntos de la misma clase tienen la misma POTENCIA o el mismo CARDINAL.* Es decir que

$$\boxed{\text{Si } A \xrightarrow{\text{biy}} B \quad \longleftrightarrow \quad \text{Card. } A = \text{Card. } B}$$

15. ORDENACION TOTAL DE LOS CARDINALES.—Y como dados dos conjuntos, A y B, es siempre:

$$\text{o } A \xrightarrow{\text{biy}} B' \subset B; \quad \text{o } A \xrightarrow{\text{biy}} B; \quad \text{o } B \xrightarrow{\text{biy}} A' \subset A,$$

Resulta que *siempre es*:

$$\boxed{\text{o Card. } A < \text{Card. } B; \quad \text{o Card. } A = \text{Card. } B; \quad \text{o Card. } A > \text{Card. } B}$$

16. DEFINICION.—*Se llaman números naturales a los cardinales de los conjuntos finitos.*

Y, como se ha demostrado en el N.° 13, todo conjunto es biyectivo con uno de la sucesión $\mathcal{N}$.

Los números naturales son, pues, los cardinales de los conjuntos de la sucesión $\mathcal{N}$; así:

Card. $\{ a \} = 1$; Card. $\{ a, b \} = 2$; Card. $\{ a, b, c \} = 3$; ...

Los números cardinales son los elementos de la sucesión

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \} \tag{2}$$

y es

$$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < \text{sig. } n < \ldots$$

Entre las sucesiones $\mathcal{N}$ y N queda, pues, establecida una biyección compatible con las respectivas ordenaciones. *Las sucesiones* $\mathcal{N}$ *y* N *son, pues, isomorfas y tienen estructuras iguales.* Tienen, pues, las mismas propiedades.

17. PROPIEDADES DEL CONJUNTO N.—

1.ª $\mathcal{N}$ *y* N *tienen un primer elemento*: $\{ \mathrm{a} \}$ *y* 1.

2.ª *Todo número natural tiene un siguiente inmediato; y cada número natural, distinto del* 1, *tiene un anterior inmediato.*

Pues, en la sucesión $\mathcal{N}$, cada conjunto tiene un siguiente inmediato, que se obtiene agregándole un nuevo elemento.

Y cada conjunto de $\mathcal{N}$, excepto $\{ \mathrm{a} \}$, tiene un anterior inmediato, que se obtiene suprimiéndole un elemento.

3.ª *El conjunto* N *no tiene un máximo. Es una sucesión indefinida (sin fin).*

4.ª *Toda sección inferior de N tiene un máximo y toda sección superior, un mínimo.*

La sección

$$N'_m = \{ 1, 2, 3, \ldots, m \}$$

es biyectiva con el conjunto $\{ a, b, c, \ldots, m \}$ de la sucesión $\mathcal{N}$ y, como este conjunto es finito, también lo es la sección N'_m, por tanto, tiene un máximo.

Resulta, pues, que la sección superior N''_m tendrá un mínimo que es el sig. *m*.

5.ª *El conjunto* N *es bien ordenado,* es decir, que todo conjunto parcial de N tiene un primer elemento.

Sea $$N' \subset N.$$

El conjunto formado por todos los números menores que todos los de N' forman una sección inferior, N'_h, que, según acabamos de demostrar, tiene un máximo, *h*.

El número sig. *h* pertenece, pues, al conjunto parcial N' y es, por tanto, el primer elemento de este conjunto.

6.ª *Es aplicable al conjunto* N *el principio de inducción, lo que es consecuencia de la propiedad anterior.*

7.ª *El conjunto N es totalmente ordenado,* lo que es consecuencia de lo demostrado en el N.º 15.

18. NUMEROS ORDINALES.—*Todo conjunto finito es biyectivo con una sección inferior del conjunto* N. Pues, según demostramos en el N.º13, todo conjunto finito es biyectivo con uno de la sucesión $\mathfrak{N}$ y éste lo es con una sección inferior de N.

Sea

$$C = \{ a', b' c', \ldots, h' \}$$

un conjunto finito cualquiera biyectivo con $N' = \{ 1, 2, 3, \ldots, h \}$.

En esta biyección a cada elemento de C *corresponde un número natural que se llama el NUMERO ORDINAL de ese elemento.*

Y resulta que *el CARDINAL del conjunto coincide con el ORDINAL de su último elemento.*

19. PRINCIPIO DE PERMANENCIA DEL CARDINAL.—Parece, pues, deducirse de esto que al cambiar el orden de los elementos del conjunto C, pudiera cambiar su número cardinal. Resulta, sin embargo, que:

Al cambiar el orden de los elementos de un conjunto, pueden cambiar los ordinales, pero el cardinal permanece inalterable, lo que es consecuencia de lo demostrado en el N.º 11.

OPERACIONES CON LOS NUMEROS NATURALES

ADICION Y MULTIPLICACION.—Las definiciones simbólicas de estas dos operaciones son:

$$\boxed{\text{Si} \quad A \cap B = \varnothing \quad \text{y es} \left\{ \begin{array}{l} \text{Card. } A = a \\ \text{Card. } B = b \\ \text{y Card. } A \cup B = s \end{array} \right\} \Rightarrow \quad a + b = s}$$

$$\boxed{\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} \text{Card. } A = a \\ \text{Card. } B = b \\ \text{y Card. } A \times B = p \end{array} \right\} \Rightarrow \quad a \,.\, b = p}$$

PROPIEDADES DE LA ADICION.—Sabemos que

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si} \quad A \xrightarrow{\text{biy}} A' \\ \text{y} \quad B \xrightarrow{\text{biy}} B' \end{array} \right\} \Rightarrow \quad A \cup B \xrightarrow{\text{biy}} A' \cup B'$$

Que

$$A \cup B \xrightarrow{\text{biy}} B \cup A$$

y que

$$(A \cup B) \cup C \xrightarrow{\text{biy}} A \cup (B \cup C)$$

De cuyas relaciones se deducen las siguientes propiedades de la adición de números naturales:

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} \text{Si} \quad a = a' \\ \text{y} \quad b = b' \end{array} \right\} \Rightarrow \quad a + b = a' + b'} \qquad \text{(Prop. uniforme)}$$

$$\boxed{a + b = b + a} \qquad \text{(Prop. conmutativa)}$$

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)} \qquad \text{(Prop. asociativa)}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO.—Sabemos que:

1.° $\left.\begin{cases} \text{Si} & A \xrightarrow{\text{biy}} A' \\ \text{y} & B \xrightarrow{\text{biy}} B' \end{cases}\right\} \Rightarrow A \times B \xrightarrow{\text{biy}} A' \times B'$

2.° $$A \times B \neq B \times A$$

pero que

$$\text{Card. } (A \times B) = \text{Card. } (B \times A)$$

3.° Que

$$(A \times B) \times C \xrightarrow{\text{biy}} A \times (B \times C)$$

4.° Y que

$$(A \cup B) \times C \xrightarrow{\text{biy}} (A \times C) \cup (B \times C)$$

De cuyas relaciones se deducen las siguientes propiedades de la multiplicación

$\boxed{\left.\begin{cases} \text{Si} & a = a' \\ \text{y} & b = b' \end{cases}\right\} \Rightarrow a \, . \, b = a \, . \, b'}$ (Prop. uniforme)

$\boxed{a \, . \, b = b \, . \, a}$ (Prop. conmutativa)

$\boxed{(a \, . \, b) \, . \, c = a \, . \, (b \, . \, c)}$ (Prop. asociativa)

$\boxed{(a + b) \, . \, c = a \, . \, c + b \, . \, c}$ (Prop. distributiva)