CUANTIFICADORES

Por CARLOS M.ª RODRIGUEZ CALDERON
Catedrático de Matemáticas

Sea E un conjunto de elementos y $\varphi(x)$ una función proposicional sobre E.

CUANTIFICADOR UNIVERSAL

Cuando **para todo** $t \in E$ se verifica que la proposición $v(\varphi(t)) = 1$ —cierta— escribimos

$$\forall\, t \in E \mid v(\varphi(t)) = 1$$

ó

$$\forall\, t \in E \mid \varphi(t) \equiv 1 \ ,$$

leemos:

«**para todo** elemento t de E tal que la proposición $\varphi(t)$ es cierta», y llamamos a $\forall$ **cuantificador universal.**

CUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Cuando encontramos en E algún elemento —al menos uno— $x = t_0$ tal que haga su proposición $\varphi(t_0)$ cierta: $v(\varphi(t_0)) = 1$, escribimos

$$\exists\, t_0 \in E \mid v(\varphi(t_0)) = 1$$

ó

$$\exists\, t_0 \in E \mid \varphi(t_0) \equiv 1 \ ,$$

leemos:

«**existe** un elemento t_0 de E, tal que la proposición $\varphi(t_0)$ es cierta».

EJEMPLO:

Sea el conjunto $E = \{a, b, c\}$ y la función proposicional φ

Con: $\forall\, t \in E\ ,\ v(\varphi(t)) = 1$ indicamos:
$v(\varphi(a)) = 1$, y $v(\varphi(b)) = 1$, y $v(\varphi(c)) = 1$

Con: $\exists\, t \in E \mid v(\varphi(t)) = 1$ indicamos:
$v(\varphi(a)) = 1$, ó $v(\varphi(b)) = 1$, ó $v(\varphi(c)) = 1$

CUANTIFICADORES PARA FUNCIONES PROPOSICIONALES COMPUESTAS

Sea E un conjunto de elementos. Consideremos las funciones proposicionales sobre E: $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Disponemos de las posibilidades:

$$\varphi(x): \begin{cases} \forall\, t \in E, & v(\varphi(t)) = 1 \\ \exists\, t \in E & v(\varphi(t)) = 1 \end{cases}$$

$$\psi(x): \begin{cases} \forall\, t \in E, & v(\varphi(t)) = 1 \\ \exists\, t \in E & v(\varphi(t)) = 1 \end{cases}$$

El problema es el estudio de estas afirmaciones con los posibles cuantificadores de las proposiciones compuestas. Veamos, ahora, para

1) La función disyunción proposicional

$$\varphi(x) \vee \psi(x): \begin{cases} \forall\, t \in E,\ v(\varphi(x) \vee \psi(x)) = 1 \\ \exists\, t \in E \mid v(\varphi(x) \vee \psi(x)) = 1 \end{cases}$$

2) La función conjunción proposicional

$$\varphi(x) \wedge \psi(x): \begin{cases} \forall\, t \in E,\ v(\varphi(t) \wedge \psi(t)) = 1 \\ \exists\, t \in E \mid v(\varphi(t) \wedge \psi(t)) = 1 \end{cases}$$

3) La función negación proposicional

$$\overline{\varphi(x)}: \begin{cases} \forall\, t \in E,\ v(\bar{\varphi}(t)) = 1 \\ \exists\, t \in E \mid v(\bar{\varphi}(t)) = 1 \end{cases}$$

NOTA. — Igualmente es factible el estudio para otras composiciones.

TEOREMA 1:

$$\exists \mathbf{t} \in \mathbf{E} \quad \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{t}) \vee \psi(\mathbf{t})) = \mathbf{1}$$

$$\exists \mathbf{t} \in \mathbf{E} \; \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{t})) = \mathbf{1} \quad \vee \quad \exists \mathbf{t} \in \mathbf{E} \mid \mathbf{v}(\psi(\mathbf{t})) = \mathbf{1}$$

(*Demostración:*)

$\Rightarrow$:

Sea un elemento $t = t_0 \in E \mid v(\varphi(t_0) \vee \psi(t_0)) = 1$, lo que supone, según la tabla de valores de la disyunción

$\varphi \vee \psi$	$v(\psi) = 0$	$v(\psi) = 1$
$v(\varphi) = 0$	0	1
$v(\varphi) = 1$	1	1

los casos ciertos:

$$v(\varphi(t_0)) = 1 \;,\; v(\psi(t_0)) = 1$$
$$v(\varphi(t_0)) = 1 \;,\; v(\psi(t_0)) = 0$$
$$v(\varphi(t_0)) = 0 \;,\; v(\psi(t_0)) = 1$$

Hay que llegar a:

$$t = t_1 \;,\; v(\varphi(t_1) = 1 \;,\; \text{ó}, \; t = t_2 \;,\; v(\psi(t_2)) = 1$$

En efecto, basta considerar un elemento $t = t_0 = t_1 = t_2$ para que la primera implique la segunda

$\Leftarrow$:

Sea un elemento $t = t_0 \in E$ tal que

$$[v(\varphi(t_0)) = 1] \vee [v(\psi(t_0)) = 1]$$

es decir

$$[v(\varphi(t_0)) = 1] \text{ ó } [v(\psi(t_0)) = 1]$$

según la tabla de la disyunción

$\varphi \vee \psi$	$v(\psi) = 0$	$v(\psi) = 1$
$v(\varphi) = 0$	0	1
$v(\varphi) = 1$	1	1

supone

$$v(\varphi(t_0) \vee \psi(t_0)) = 1 \text{ para } t_0 \in E$$

tal y como queríamos demostrar.

TEOREMA 2:

$$\exists\, \mathbf{t} \in \mathbf{E},\ \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{t}) \wedge \psi(\mathbf{t})) = \mathbf{1}$$

$$\exists\, \mathbf{t} \in \mathbf{E},\ \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{t})) = \mathbf{1} \quad \wedge \quad \exists\, \mathbf{t} \in \mathbf{E},\ \mathbf{v}(\psi(\mathbf{t})) = \mathbf{1}$$

(*Demostración*:)

$\Rightarrow$:

Sea un elemento $t = t_0 \in E \mid v(\varphi(t_0) \wedge \psi(t_0)) = 1$, lo que supone, según la tabla de valores de la conjunción

$\varphi \wedge \psi$	$v(\psi) = 0$	$v(\psi) = 1$
$v(\varphi) = 0$	0	0
$v(\varphi) = 1$	0	1

el caso cierto

$$v(\varphi(t_0)) = 1 \ ,\ v(\psi(t_0)) = 1$$

Siguiendo el mismo proceso se demostrarían:

TEOREMA 3:

$$\forall t \in E,\ v(\varphi(t) \vee \psi(t)) = 1$$

$$\forall t \in E,\ v(\varphi(t)) = 1 \quad \vee \quad \forall t \in E,\ v(\psi(t)) = 1$$

TEOREMA 4:

$$\forall t \in E,\ v(\varphi(t) \wedge \psi(t)) = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall t \in E,\ v(\varphi(t)) = 1 \quad \wedge \quad \forall t \in E,\ v(\psi(t)) = 1$$

NOTA. — De forma parecida estudiaríamos para la negación y para otras posibles relaciones.

Este estudio complementa el de «Proposiciones Lógicas. Relación con la teoría de conjuntos», aparecido en un número anterior de esta Revista.

Orden sobre el Plan 1957 de las Escuelas Técnicas Superiores

El Ministro de Educación y Ciencia firmó una Orden ministerial por la cual los alumnos que cursan el plan de 1957 en las Escuelas Técnicas Superiores podrán continuar examinándose por enseñanza libre dentro de dicho plan, sin las limitaciones establecidas en la orden de 2 de febrero de 1966.

La citada Orden incluye otra disposición en virtud de la cual los alumnos que hubieran iniciado sus estudios por el plan de 1957 y hubiesen optado por adaptarse al plan de estudios de 1964, a tenor de anteriores disposiciones, podrán también solicitar su reincorporación al plan de 1957, en las condiciones actuales y con las convalidaciones que se fijen.