EL NUMERO ENTERO Y EL NUMERO RACIONAL

Por FRANCISCO RAMIREZ ESTEVEZ
Catedrático del Instituto de Las Palmas.

El Número Entero

Partimos de las siguientes situaciones concretas.

1.º Si preguntamos a un alumno la edad que tiene nos contestará, por ejemplo, 15 años; en este caso se ha valido del número natural 15, que contesta claramente a la pregunta.

2.º Si pregunto a dicho alumno que cuántos hermanos tiene me contestará también con un número natural, 4, por ejemplo.

3.º Si preguntamos por los grados de temperatura que hace en París en este momento y me responde, p. e., 15, el número natural 15 no es adecuado a esta respuesta, ya que no sé si hará mucho frío o hará una temperatura agradable, esto es, tiene que añadir al número natural 15, si sobre cero, o bajo cero.

4.º Si preguntamos en qué siglo vivió Pericles y contesta con el número natural 5, tampoco queda clara la contestación, pues, al número natural 5 le añadirá que antes de J. C.

5.º Si los resultados de tres partidos de fútbol son

equipo de casa	equipo visitante
3	1
4	2
2	0

resulta que los resultados, que pondremos

$$(3,\ 1), \qquad (4,\ 2), \qquad (2,\ 0)$$

tienen algo en común, dos goles de ventaja; en este sentido podemos poner

$$(3,\ 1) = (4,\ 2) = (2,\ 0)$$

representando el signo igual goles de ventaja.

6.º Si al preguntar por la situación económica de una empresa nos contestan

Haber = 3 millones
Debe = 2 millones

la pareja de números naturales (3, 2) nos dan respuesta clara a la situación económica de la empresa.

Si dos empresas poseen las situaciones

$$(2, 3) \quad y \quad (5, 6)$$

decimos que ambas poseen la misma situación y escribimos

$$(2, 3) = (5, 6)$$

Observamos que tanto en el caso del ejemplo 5.° como del 6.°

$$\begin{array}{ll} (3, 1) = (4, 2) & \text{se verifica } 3 + 2 = 1 + 4 \\ (2, 3) = (5, 6) & \text{se verifica } 2 + 6 = 3 + 5 \end{array}$$

Todas estas razones de tipo práctico nos inducen a buscar nuevos entes no naturales, que contesten adecuadamente a todas ellas. No son estas razones de tipo práctico las únicas que indujeron a la introducción de los enteros, sino que existen otras razones de tipo intrínseco, razones de carácter aritmético, típicas de una tendencia dominante en el proceso matemático. Estas razones tienen como meta prolongar el conjunto N para obtener estructura de grupo y, por tanto, sea siempre posible la sustracción.

Los entes que nos resuelven todas estas cuestiones, los enteros, los introducimos como exponemos a continuación.

Consideremos el producto cartesiano N × N, esto es el conjunto formado por todas las parejas de números naturales.

$$N \times N = \{ (\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \ \ldots\ldots \}$$

En este conjunto definimos la siguiente relación binaria

$$\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \longleftrightarrow \mathbf{a} + \mathbf{d} = \mathbf{b} + \mathbf{c}} \qquad (I)$$

Probemos que esta relación binaria establecida en N × N es una relación de equivalencia.

1.° Reflexiva: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ya que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ por la conmutatividad de la adición en N.

2.° Simétrica: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \rightarrow (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$

En efecto:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \longleftrightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{d}) = \mathbf{b} + \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c} + \mathrm{b} = \mathbf{d} + \mathbf{a} \longleftrightarrow (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

3.° Transitiva

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \quad y \quad (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{m}, \mathbf{n})$$

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \rightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{d}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \rightarrow (\mathbf{c} + \mathbf{n}) = (\mathbf{d} + \mathbf{m}) \end{array}\right\}$$

por la propiedad uniforme de la adición en N:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{d}) + (\mathbf{c} + \mathbf{n}) \qquad (\mathbf{c} + \mathbf{n}) = (\mathbf{d} + \mathbf{m})$$

por la propiedad asociativa y conmutativa de la adición en N.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{n}) + (\mathbf{d} + \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{m}) + (\mathbf{c} + \mathbf{d})$$

y por la Ley cancelativa

$$\mathbf{a} + \mathbf{n} = \mathbf{b} + \mathbf{m}$$

y ésta implica

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{m}, \mathbf{n})$$

como queríamos demostrar.

Por tanto queda probado que la relación (I) establecida en N × N es una relación de equivalencia; ahora bien, como toda relación de equivalencia produce en N × N una partición o clasificación, perteneciendo a cada clase todas las parejas de naturales que son equivalentes entre sí. El conjunto cociente que representamos en este caso por Z = N × N está formado por todas las clases de equivalencia. Dicho conjunto cociente lo llamamos conjunto de los números enteros y a cada clase número entero.

Desde el punto de vista pedagógico es conveniente representar el conjunto Z así:

$$Z = \left\{ \ldots, \left| \begin{array}{c} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}', \mathbf{b}') \\ \hline \end{array} \right|, \ldots \left| \begin{array}{c} (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{c}', \mathbf{d}') \\ \hline \end{array} \right|, \ldots \left| \begin{array}{c} (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \\ (\mathbf{m}', \mathbf{n}') \\ \hline \end{array} \right|, \ldots \right\}$$

Ejemplos en clases:

$$\begin{array}{l} (1, 0) = (2, 1) = (3, 2) = (4, 3) = \ldots \\ (0, 3) = (4, 7) = (5, 8) = (2, 5) = \ldots \\ (0, 0) = (1, 1) = (2, 2) = (3, 3) = \ldots \end{array}$$

Elementos canónicos de las clases.—Vamos a probar que en cada clase existe un representante una de cuyas componentes sea cero.

En efecto. Dada la pareja (**m**, **n**). Según la ley de tricotomía de naturales se verifica una de las tres:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{m} > \mathbf{n} & \text{en cuyo caso} & (\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (\mathbf{m} - \mathbf{n}, 0) \\ \mathbf{m} = \mathbf{n} & \text{en cuyo caso} & (\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (0, 0) \\ \mathbf{m} < \mathbf{n} & \text{en cuyo caso} & (\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (0, \mathbf{n} - \mathbf{m}) \end{array}$$

Estos elementos canónicos juegan un papel interesante como veremos en el desarrollo del tema.

Números enteros positivos.—Los números enteros de la forma (**m**, 0) se llaman números enteros positivos y abreviadamente ponemos

$$(\mathbf{m}, 0) = +\mathbf{m}$$

Números enteros negativos.—Los números enteros de la forma (**o**, **m**) los llamamos enteros negativos y escribimos (0, **m**) = —**m.**

Numero entero cero.—Al número entero (0, 0) lo llamamos entero cero y ponemos simplemente (0, 0) = 0.
Siendo conveniente distinguir el cero de los enteros del cero natural.

ACLARACIÓN: Cuando decimos entero (**m**, 0), nos referimos al entero representado por el par (**m**, 0), o lo que es lo mismo nos referimos a la clase a la cual pertenece (**m**, 0). Esto lo tendremos en cuenta en todo lo que sigue.

Adición en Z.—Dados dos números enteros (**a**, **b**) y (**c**, **d**), llamamos suma de ambos y la representamos por (**a**, **b**) + (**c**, **d**), al entero (**a** + **c**, **b** + **d**), esto es

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d})$$

Propiedades de la adición.

1.° De la definición se desprende que es operación interna.
2.° **Propiedad uniforme.**—La suma de números enteros no depende de los representantes elegidos.

$$\text{Esto es} \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}') \\ (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{c}', \mathbf{d}') \end{array} \right.$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}') + (\mathbf{c}', \mathbf{d}')$$

Para demostrar esta igualdad calculemos los dos miembros por separado y probemos que llegamos a resultados iguales.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d})$$
$$(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + (\mathbf{c}', \mathbf{d}') = (\mathbf{a}' + \mathbf{c}', \mathbf{b}' + \mathbf{d}')$$

Para que estos dos enteros sean iguales se tienen que cumplir

$$(\mathbf{a} + \mathbf{c}) + (\mathbf{b}' + \mathbf{d}') = (\mathbf{b} + \mathbf{d}) + (\mathbf{a}' + \mathbf{c}')$$

y ésta se obtiene de la hipótesis

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}') \\ (\mathbf{c}, \mathrm{d}) = (\mathbf{c}', \mathbf{d}') \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} + \mathbf{b}' = \mathbf{b} + \mathbf{a}' \\ \mathbf{c} + \mathbf{d}' = \mathbf{d} + \mathbf{c}' \end{array} \right.$$

sumando miembro a miembro

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}') + (\mathbf{c} + \mathbf{d}') = (\mathbf{b} + \mathbf{a}') + (\mathbf{d} + \mathbf{c}')$$

como queríamos demostrar.

Propiedad conmutativa de la adición en Z.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

En efecto,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}) = (\mathbf{c} + \mathbf{a}, \mathbf{d} + \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Propiedad asociativa de la adición en Z.

$$[(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d})] + (\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + [(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{m}, \mathbf{n})].$$

Calculemos los dos miembros por separado,

$$\left\{\begin{array}{l} [(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d})] + (\mathbf{m}, \mathbf{n}) = [(\mathbf{a} + \mathbf{c}), (\mathbf{b} + \mathbf{d})] + (\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \\ \qquad [(\mathbf{a} + \mathbf{c}) + \mathbf{m}, (\mathbf{b} + \mathbf{d}) + \mathbf{n}] \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + [(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{m}, \mathbf{n})] = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + [(\mathbf{c} + \mathbf{m}), (\mathbf{d} + \mathbf{n})] = \\ \qquad [\mathbf{a} + (\mathbf{c} + \mathbf{m}), \mathbf{b} + (\mathbf{d} + \mathbf{n})] \end{array}\right.$$

estos dos últimos enteros son iguales como se comprueba fácilmente.

Elemento neutro de la adición en Z.

El entero $(\mathbf{m}, \mathbf{m}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es elemento neutro, ya que:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (\mathbf{a} + \mathbf{0}, \mathbf{b} + \mathbf{0}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Elemento opuesto para la adición en Z.

Dado el entero $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ su opuesto es el entero $(\mathbf{b}, \mathbf{a})$, ya que

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{a}) : (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

En virtud de lo dicho, el compuesto Z tiene estructura de grupo aditivo abeliano.

Multiplicación en Z.—Dados dos números enteros $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, llamamos producto de ambos y lo representamos por $(\mathbf{ac} + \mathbf{bd}, \mathbf{ad} + \mathbf{bc})$, o sea, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})\ (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{ac} + \mathbf{bd}, \mathbf{ad} + \mathbf{bc})$.

Propiedades de la multiplicación:

1.º) De la definición se desprende que es operación interna.

2.º) **Propiedad uniforme de la multiplicación.**

Se enuncia así: el producto de dos números enteros no depende de los representantes elegidos.
Esto es:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}'\ \mathbf{b}') \\ (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{c}', \mathbf{d}') \end{array}\right\} \rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}')\ (\mathbf{c}', \mathbf{d}')$$

Para demostrar esta igualdad es menester probar su equivalente:

$$(ac + bd,\ ad + bc) = (a'c' + b'd',\ a'd' + b'c')$$

o sea:

$$[(ac + bd) + (a'd' + b'c')] = [(ad + bc) + (a'c' + b'd)] \qquad (I)$$

y ésta se consigue a partir de la hipótesis

$$\begin{cases} (a, b) = (a', b') \rightarrow \begin{cases} a + b' = b + a' \rightarrow ac + b'/c' = bc + a'/c \\ b + a' = a + b' \rightarrow bd + a'/d' = ad + b'/d \end{cases} \\ (c, d) = (c', d') \rightarrow \begin{cases} c + d' = d + c' \rightarrow c/a + d'a' = d/a' + c'a' \\ d + c' = c + d' \rightarrow d/b' + c'b' = c/b' + d'b' \end{cases} \end{cases}$$

y sumando miembro a miembro estas igualdades de números naturales y aplicando la ley cancelativa queda (I).

Propiedad conmutativa de la Multiplicación.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$$

o sea

$$(ac + bd,\ ad + bc) = (ca + db,\ cb + da)$$

y esta igualdad se comprueba fácilmente.

Propiedad asociativa de la Multiplicación.

$$[(a, b)\ (c, d)] \cdot (m, n) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (m, n)]$$

Calculemos los dos miembros por separado

$$\begin{aligned} [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (m, n) &= [(ac + bd, ad + bc)] \cdot (m, n) = \\ &= (ac + bd)\, m + (ad + bc)\, n,\ [(ac + bd)\, n + (ad + bc)\, m] \\ (a, b \cdot [(c, d) \cdot (m, n)] &= (a, b) \cdot [cm + dn, cn + dm] = \\ &= [a\,(cm + dn) + b\,(cn + dm),\ a\,(cn + dm) + b\,(cm + dn)] \end{aligned}$$

Los enteros obtenidos son iguales, siendo en este caso como en otros anteriores más fácil la comprobación, pues tienen sus componentes, respectivamente, iguales.

Elemento neutro para la Multiplicación.

El elemento neutro es el entero (1,0).

En efecto:

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 + b \cdot 0,\ a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a,, b)$$

En virtud de lo dicho, el conjunto Z respecto de la multiplicación es un semigrupo abeliano con elemento unidad.

Propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})\ [(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{m}, \mathbf{n})] = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\ (\mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b})\ (\mathbf{m}, \mathbf{n})$$

Calculemos los dos miembros por separado:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})\ [\mathbf{c} + \mathbf{m}, \mathbf{d} + \mathbf{n}] = [\mathbf{a}\ (\mathbf{c} + \mathbf{m}) + \mathbf{b}\ (\mathbf{d} + \mathbf{n}), \mathbf{a}(\mathbf{d} + \mathbf{n}) + \mathbf{b}\ (\mathbf{c} + \mathbf{m})]$$

$$\begin{gathered}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\ (\mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b})\ (\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \\ = (\mathbf{ac} + \mathbf{bd}, \mathbf{ad} + \mathbf{bc}) + (\mathbf{am} + \mathbf{bn}, \mathbf{an} + \mathbf{bm}) = \\ [(\mathbf{ac} + \mathbf{bd}) + (\mathbf{am} + \mathbf{bn}), (\mathbf{ad} + \mathbf{bc}) + (\mathbf{an} + \mathbf{bm})]\end{gathered}$$

Los dos enteros obtenidos son iguales, ya que, como en el caso anterior, tienen sus componentes respectivamente iguales.

El conjunto Z es, pues, un grupo aditivo abeliano, semigrupo neutro, verificándose además la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, por tanto Z es un anillo.

El anillo Z es un dominio de integridad.

Vamos a probar que si un producto de dos factores es cero, alguno de dichos factores es cero:

si $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{ac} + \mathbf{bd}, \mathbf{ad} + \mathbf{bc}) = (0, 0)$,

se verifica $(\mathbf{ac} + \mathbf{bd}) = \mathbf{ad} + \mathbf{bc} \rightarrow \mathbf{ac} - \mathbf{ad} = \mathbf{bc} - \mathbf{bd}$, de donde $\mathbf{a}(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} - \mathbf{d})$, y suponiendo $\mathbf{c} \gneq \mathbf{d}$ por la ley cancelativa, de la multiplicación en N, se deduce que $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, esto es, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (0, 0)$, como queríamos demostrar.

Regla de los signos.

Para la suma de enteros se tiene:

$$\begin{array}{ll}(\mathbf{m}, 0) + (\mathbf{n}, 0) = (\mathbf{m} + \mathbf{n}, 0) & (+) + (+) = (+) \\ (0, \mathbf{m}) + (0, \mathbf{n}) = (0, \mathbf{m} + \mathbf{n}) & (-) + (-1) = -\end{array}$$

$$(\mathbf{m}, 0) + (0, \mathbf{n}) = \begin{cases} (\mathbf{m} - \mathbf{n}, 0), \text{ si } \mathbf{m} > \mathbf{n} \\ (0, \mathbf{n} - \mathbf{m}), \text{ si } \mathbf{m} < \mathbf{n} \\ (0, 0), \text{ si } \mathbf{m} = \mathbf{n} \end{cases}$$

Por último

$$(\mathbf{m}, 0) + (0, \mathbf{m}) = (\mathbf{m}, \mathbf{m}) = (0, 0)$$

lo que prueba que dos números, uno positivo y otro negativo del mismo valor absoluto son opuestos.

Para la multiplicación de enteros:

$$(\mathbf{m},\ \mathbf{0})\ (\mathbf{n},\ \mathbf{0}) = (\mathbf{0},\ \mathbf{m})\ (\mathbf{0},\ \mathbf{n}) = (\mathbf{nm},\ \mathbf{0})$$
$$(\mathbf{0},\ \mathbf{m})\ (\mathbf{n},\ \mathbf{0}) = (\mathbf{m},\ \mathbf{0})\ (\mathbf{0},\ \mathbf{n}) = (\mathbf{0},\ \mathbf{mn})$$

Isomorfismo de Z y de N.

En efecto, probemos que la biyección $(\mathbf{m},\ \mathbf{0}) \overset{f}{\longleftrightarrow} \mathbf{m}$ es isomorfismo

$$f[(\mathbf{m},\ \mathbf{0}) + (\mathbf{n},\ \mathbf{0})] = f(\mathbf{m+n},\ \mathbf{0}) = (\mathbf{m+n} = f(\mathbf{m},\ \mathbf{0}) + f(\mathbf{n},\ \mathbf{0})\quad f[(\mathbf{m},\ \mathbf{0}\ (\mathbf{n},\ \mathbf{0})] =$$
$$= f[(\mathbf{nm},\ \mathbf{0}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}\ f(\mathbf{n},\ \mathbf{0}) \cdot f(\mathbf{m},\ \mathbf{0})$$

En virtud de este isomorfismo los números enteros positivos se identifican con los naturales.

Sustracción en el anillo Z.

Dados dos enteros α y β, llamamos diferencia de α y β y la representamos por $\alpha - \beta$, al entero γ que es la suma de α con el opuesto de β. O sea, $\gamma = \alpha - \beta \longleftrightarrow \alpha = \beta + \gamma$.

Ordenación en Z.

Dados dos enteros α y β decimos que $\alpha \leq \beta$ cuando $\alpha - \beta$ es un entero positivo o nulo. Esta relación binaria establecida en Z es una relación de orden.

1.º) Reflexiva $\alpha \leq \alpha$, ya que $\alpha - \alpha = 0$ $\quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \leq \beta & \beta - \alpha = \mathbf{d} \text{ positivo} \\ \beta \leq \alpha & \alpha - \beta = \mathbf{d} \text{ positivo} \end{array} \right.$

2.º) Antisimétrica $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$

$$\beta = \alpha + \mathrm{d}$$
$$\alpha = \beta + \mathrm{d'} \rightarrow \beta = (\beta + \mathbf{d} - \mathbf{d'}) = \beta + (\mathbf{d} + \mathbf{d'}) \rightarrow (\mathbf{d} + \mathbf{d'}) - 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d} = 0 \\ \mathbf{d'} = 0 \end{array} \right.$$

3.º) Transitiva.—$\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \beta \rightarrow \alpha - \beta = \mathbf{d} \text{ positivo} \rightarrow \beta = \alpha + \mathbf{d} \\ \beta \leq \gamma \rightarrow \gamma - \beta = \mathbf{d'} \text{ positivo} \rightarrow \gamma = \beta + \mathbf{d'} \end{array} \right\}$$

$$\gamma = (\alpha + \mathbf{d}) + \mathbf{d'} = \alpha + (\mathbf{d} + \mathbf{d'}) \longleftrightarrow$$

$\gamma - \alpha = \mathbf{d} + \mathbf{d'} =$ positivo $\rightarrow \alpha \leq \gamma$ como queríamos demostrar.

Esta relación de orden es de orden total.

Dados dos enteros cualquiera y

o' $\alpha - \beta$ es positivo
o' $\alpha = \beta$
o' $\alpha - \beta$ es negativo

No es una relación de buen orden, ya que el subconjunto de enteros < 0 no posee primer elemento.

NUMERO RACIONAL

Consideremos el producto cartesiano $Z \times Z^{\times}$, siendo $Z^{\times} = Z - 0$, esto es, $Z \times Z^{\times} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{c}, \mathbf{d}), (\mathbf{m}, \mathbf{n}), \ldots\ldots\}$

(la segunda componente nunca es cero).

En este conjunto definamos la siguiente relación binaria:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \longleftrightarrow \mathbf{ad} = \mathbf{bc}$$

Probemos que esta relación binaria es una relación de equivalencia:

1.º) Reflexiva $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, ya que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ por la propiedad conmutativa de la multiplicación en Z.

2.º) Simétrica: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \rightarrow (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

En efecto,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \longleftrightarrow \mathbf{ad} = \mathbf{bc} \longleftrightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} \longleftrightarrow (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

3.º) Transitiva: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d})$ y $(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \Rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{m}, \mathbf{n})$.

En efecto:

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{m}, \mathbf{n})\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{m}\end{array}\right. \rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})\ (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \cdot (\mathrm{d} \cdot \mathrm{m}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\ (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{m})\ (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}) \rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}) \longleftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{m}, \mathbf{n})$$

Esta relación binaria establecida en $Z \times Z^{\times}$, como toda relación de equivalencia produce una clasificación o partición de los elementos de $Z \times Z^{\times}$ en clases de equivalencia, perteneciendo a cada clase todas las parejas que son equivalentes entre sí. El conjunto cociente correspondiente se llama conjunto de los números racionales, y cada clase es, por definición, un número racional. El conjunto de los números racionales se representa por la letra Q, así pues: $Q = Z \times {}^{\times}/=$

Es conveniente representarlo así:

$$Q = \left\{ \left|\begin{array}{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a'}, \mathbf{b'})\end{array}\right| \left|\begin{array}{c}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{c'}, \mathbf{d'})\end{array}\right| \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

Ejemplos de clases:

$$(2, 3) = (4, 6) = (6, 9) = \ldots\ldots$$
$$(0, 1) = (0, 2) = (0, 3) = \ldots\ldots$$
$$(1, 1) = (2, 2) = (3, 3) = \ldots\ldots$$

Quede claro que llamamos número racional a una clase de equivalencia, así los ejemplos anteriores corresponden a tres números racionales.

Si se considera, p. e., la pareja (2, 3) del primer número racional, a ésta se le llama un representante de dicho número racional. A los representantes se les suele llamar fracciones. Hay autores que no distinguen entre número racional y fracción. A la primera componente de un representante le llamamos numerador y a la segunda componente denominador.

Adición en Q.—Dados dos números racionales $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (clase) y $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, llamamos suma de ambos y la representamos simbólicamente por $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d})$ al número racional $(\mathbf{ad} + \mathbf{bc}, \mathbf{bd})$, o sea:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{ad} + \mathbf{bc}, \mathbf{bd})$$

es preciso quede bien claro que cuando decimos número racional $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ nos referimos a la clase representada por $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Propiedades de la Adición en Q.:

1.º) De la definición de adición se desprende que es operación interna.

2.º) **Propiedad uniforme de la adición.**—Se enuncia así: la suma de dos números racionales no depende de los representantes elegidos:

$$\text{Esto es, si } \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}') \\ (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{c}', \mathbf{d}') \end{array} \right.$$

Entonces

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}') + (\mathbf{c}', \mathbf{d}')$$

esta igualdad por definición de suma queda:

$$(\mathbf{ad} + \mathbf{bc}, \mathbf{bd}) = (\mathbf{a'd'} + \mathbf{b'c'}, \mathbf{b'd'})$$

y esta igualdad exige que:

$$(\mathbf{ad} + \mathbf{bc})\ \mathbf{b'd'} = \mathbf{b'd'}(\mathbf{a'd'} + \mathbf{b'c'}) \quad (\mathrm{I})$$

la cual se comprueba fácilmente a partir de la hipótesis:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}') \\ (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{c}', \mathbf{d}') \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{ab'} = \mathbf{ba'} \\ \mathbf{cd'} = \mathbf{dc'} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{ab'dd'} = \mathbf{ba'dd'} \\ \mathbf{cd'bb'} = \mathbf{dc'bb'} \end{array} \right. \rightarrow$$

por la propiedad uniforme de la adición de enteros:

$$\mathbf{ab'dd'} + \mathbf{cd'bb'} = \mathbf{ba'dd'} + \mathbf{dc'bb'}$$

y por la distributiva del producto respecto a la suma en Z queda:

$$(\mathbf{ad} + \mathbf{cb})\,\mathbf{b'd'} = (\mathbf{a'd'} + \mathbf{c'b'})\,\mathbf{bd} \text{ que es la (I), como queríamos.}$$

Propiedad conmutativa de la Adición en Q.

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) + (\mathbf{c},\ \mathbf{d}) = (\mathbf{c},\ \mathbf{d}) + (\mathbf{a},\ \mathbf{b})$$

o sea,

$$(\mathbf{ad} + \mathbf{bc},\ \mathbf{bd}) = (\mathbf{cb} + \mathbf{da},\ \mathbf{db})$$

esta igualdad cumple:

$$(\mathbf{ad} + \mathbf{bc})\,\mathbf{db} = \mathbf{bd}\,(\mathbf{cb} + \mathbf{da})$$

luego es cierta.

Propiedad asociativa de la Adición en Q.

$$[(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) + (\mathbf{c},\ \mathbf{d})] + (\mathbf{m},\ \mathbf{n}) = (\mathbf{a},\ \mathbf{b}) + [(\mathbf{c},\ \mathbf{d}) + (\mathbf{m},\ \mathbf{n})]$$

Calculemos los dos miembros por separado y comprobemos que llegamos al mismo racional:

$$[(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) + (\mathbf{c},\ \mathbf{d})] + (\mathbf{m},\ \mathbf{n}) = [\mathbf{ad} + \mathbf{bc},\ \mathbf{bd}] + (\mathbf{m},\ \mathbf{n}) = [(\mathbf{ad} + \mathbf{bc})\,\mathbf{n} + \mathbf{bdm},\ \mathbf{bdn}]$$

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) + [(\mathbf{c},\ \mathbf{d}) + (\mathbf{m},\ \mathbf{n})] = (\mathbf{a},\ \mathbf{b}) + [\mathbf{cn} + \mathbf{dm},\ \mathbf{dn}] = [\mathbf{adn} + \mathbf{b}\,(\mathbf{cn} + \mathbf{dm}),\ \mathbf{bdn}]$$

y fácilmente se comprueba por los productos cruzados que estos dos racionales son iguales.

Elemento Neutro para Adición en Q.

El elemento neutro es (0, 1), en efecto:

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) + (0,\ 1) = (\mathbf{a} \cdot 1 + \mathbf{b} \cdot 0,\ \mathbf{b} \cdot 1) = (\mathbf{a},\ \mathbf{b})$$

Elemento simétrico para la Adición en Q.

El simétrico del $(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ es el $(-\mathbf{a},\ \mathbf{b})$,

en efecto,

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) + (-\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = (\mathbf{ab} + \mathbf{b}\ (-\mathbf{a}),\ \mathbf{b}^2) = (0,\ \mathbf{b}) = (0,\ 1)$$

En virtud de lo dicho para la adición, Q es un grupo aditivo abeliano.

Multiplicación en Q.

Dados dos racionales (**a**, **b**), (clase) y (**c**, **d**) (clase), llamamos producto de ambos y lo represento abreviadamente por (**a**, **b**) · (**c**, **d**), al racional (**ac**, **bd**), o sea,

$$\boxed{(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c},\ \mathbf{d}) = (\mathbf{ac},\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{d})}$$

Propiedades de la multiplicación en Q.

1) De la definición se desprende que la operación es interna.
2) **Propiedad uniforme:** el producto de naturales no depende de los representantes elegidos.

O sea:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = (\mathbf{a}',\ \mathbf{b}') \\ (\mathbf{c},\ \mathbf{d}) = (\mathbf{c}',\ \mathbf{d}') \end{array}\right\} \rightarrow (\mathbf{a},\ \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c},\ \mathbf{d}) = (\mathbf{a}',\ \mathbf{b}') \cdot (\mathbf{c}',\ \mathbf{d}')$$

La igualdad que deseamos es equivalente por definición de producto a la:

$$(\mathbf{ac},\ \mathbf{bd}) = (\mathbf{a'c'},\ \mathbf{b'd'})$$

y ésta a su vez exige:

$$(\mathbf{ac}) \cdot (\mathbf{b}' \cdot \mathbf{d}') = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\ (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{c}')\ \ (\mathrm{I})$$

Pero ésta se deduce fácilmente de la hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = (\mathbf{a}',\ \mathbf{b}') \\ (\mathbf{c},\ \mathbf{d}) = (\mathbf{c}',\ \mathbf{d}') \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{ab}' = \mathbf{ba}' \\ \mathbf{cd}' = \mathbf{dc}' \end{array}\right. \quad \text{y}$$

por la propiedad uniforme de la multiplicación en Z queda:

$$(\mathbf{ab}')\ (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}') = (\mathbf{ba}') \cdot (\mathbf{dc}') \text{ que es la (I)}$$

Propiedad conmutativa de la multiplicación en Q.

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c},\ \mathbf{d}) = (\mathbf{c},\ \mathbf{d})\ (\mathbf{a},\ \mathbf{b})$$

En efecto, ésta es equivalente, por definición de producto en Q, a la:

$$(\mathbf{ac},\ \mathbf{bd}) = (\mathbf{ca},\ \mathbf{db})$$

y para que ésta se cumpla será

$$(\mathbf{ac}) \cdot (\mathbf{db}) = (\mathbf{bd})\ (\mathbf{ca}) \text{ igualdad trivial, pues estamos en Z.}$$

Propiedad asociativa de la multiplicación en Q.

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (m, n) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (m, n)]$$

Calculemos los dos miembros por separado y comprobemos que llegamos al mismo resultado:

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (m, n) = [ac, bd] \cdot (m, n) = [(ac) m, (bd) n]$$
$$(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (m, n)] = (a, b) \; [cm, dn] = [a (cm), b (dn)]$$

los racionales a los que llegamos se comprueba fácilmente que son iguales (productos cruzados).

Elemento neutro para la multiplicación en Q.

(1, 1) es el elemento neutro; en efecto:

$$(a, b) \cdot (1, 1) = (a, 1, b, 1) = (a, b)$$

Elemento inverso o simétrico para la multiplicación en Q.

El inverso de **(a, b)** es el **(b, a)**.

En efecto

$$(a, b) \cdot (b, a) = (ab, ba) = (1, 1).$$

En virtud de lo dicho para la multiplicación resulta que Q es grupo multiplicativo, abeliano.

Propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

$$(a, b) \; [(c, d) + (m, n)] = (a, b) \; (c, d) + (a, b) \; (m, n)$$

calculemos los dos miembros por separado y probemos que llegamos al mismo racional

$$(a, b) \; [(c, d) + (m, n) = (a, b) \; [cn + dm, dn] = [a(cn + dm), b(dn)]$$
$$(a, b) \; (c, d) + (a, b) \; (m, n) = (ac, bd) + (am, bn) = [ac \cdot bn + bd \cdot am, (bd) \; (bn)]$$

Realizando los productos cruzados de los dos racionales que hemos obtenido:

$$a(cn + dm) \cdot (bd) \; (bn) = (ac \cdot bn + bd \cdot am) \cdot b(dn)$$
$$acn^2b^2d + amd^2b^2n = acb^2n^2d + amd^2b^2n$$

que es cierta.

Resumiendo, resulta que el conjunto Q es tal que en él, se han definido dos operaciones internas, siendo Q, respecto de la primera un grupo abeliano y respecto a la segunda un grupo, verificándose además la propiedad distributiva de la segunda operación respecto a la primera; por tanto, Q es un cuerpo. Además, como la segunda operación es conmutativa, el cuerpo es conmutativo.