Cursillo de Matemáticas en Canarias

PROGRAMACION LINEAL

Por EMILIO LOPEZ GALI
Catedrático del Instituto de Las Palmas.

La programación lineal se encuentra incluida en una serie de teorías como juegos de estrategia, teoría de colas, teoría de la información que se engloban con el nombre genérico de Investigación operativa y que se originan bajo la presión de las necesidades bélicas de la II Guerra Mundial.

Desarrollamos el siguiente problema típico (Cf. KAUFMANN. *Recherche operationnelle*) que da una idea de los métodos y propósitos de la *programación lineal.*

Se pretende realizar una alimentación económica para el ganado, que debe contener obligatoriamente 4 clases A, B, C, D de componentes nutritivos.

La industria alimenticia produce, p. ej., dos tipos de alimentos M y N que contienen estas componentes, 1 Kg del alimento M contiene 100 g de A, 100 g de C, 200 g de D.

1 Kg del alimento N contiene 100 g de B, 200 g de C y 100 g. de D.

Un animal debe consumir diariamente un mínimo diario de: 0,4 Kg de A; 0,6 Kg de B; 2 Kg de C; 1,7 Kg de D. El producto M cuesta 10 F el Kg y el N, 4 F el Kg. ¿Qué cantidades de M y N hay que utilizar por día y animal para realizar la alimentación más económica?

	M	N	*Cantidades Prescritas*
A	0,1	0	0,4
B	0	0,1	0,6
C	0,1	0,2	2
D	0,2	0,1	1,7
Costes	10	4	

Llamemos x, y las cantidades de M, N que hay que proporcionar diariamente a cada animal.

La función económica es:

$$Z = 10\,x\ 4\,y \qquad (1)$$

Los objetivos o ligaduras son:

$$0{,}1\,x \geq 0{,}4 \qquad \Rightarrow x \geq 4 \qquad (2)$$

$$0{,}1\,y \geq 0{,}6 \qquad \Rightarrow y \geq 6 \qquad (3)$$

$$0{,}1\,x + 0{,}2\,y \geq 2 \quad \Rightarrow x + 2\,y \geq 20 \qquad (4)$$

$$0{,}2\,x + 0{,}1\,x \geq 1{,}7 \Rightarrow 2\,x + x \geq 17 \qquad (5)$$

Trazamos las restas:

$$\sqrt{1} : x = 4$$

$$\sqrt{2} : y = 6$$

$$\sqrt{3} : x + 2\,y = 20$$

$$\sqrt{4} : 2\,x + y = 17$$

Correspondientes a las ligaduras y la familia de rectas $10x + 4\,y = Z$, de la función económica. Recordemos la fórmula de la distancia de un punto (x, y) a la recta $A\,x + B\,y + C = 0$ $d = \dfrac{A\,x + B\,y + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ y que la situación de (x, y) respecto a los dos semiplanos en que la recta divide al plano se discrimina asignando dist. positiva, a la del origen a la recta $\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$, y entonces los puntos de $d > o$ están al mismo lado o a distinto lado del origen. *El punto* (x, y) *que hace mínima la función económica se halla en la parte no rayada de la figura, y en el vértice, (en nuestro caso* A_1 (4, 9) *del polígono para el que la recta* 10 x + 4 y = Z *esté más próxima al origen.*

El valor mínimo de Z es por consiguiente: $z = 10 \cdot 4 + 4 \cdot 9 = 76$ F.

* * *

Se propone otro ejercicio:

Para fabricar dos productos P_1 y P_2, hay que trabajarlo en 3 máquinas M_1, M_2, M_3, sucesivamente pero en un orden indiferente. Los tiempos de ejecución por pieza están dados en el cuadro adjunto, en minutos

	M_1	M_2	M_3
P_1	11	7	6
P_2	9	12	16

Las horas disponibles de cada máquina para una actividad de un mes son:

9.900 m para M_1, 8.400 m para M_2 y 9.600 m para M_3

El producto P_1 da un beneficio unitario de 900 F, P_2 de 100 F.

¿Cuánto debe fabricarse de los productos P_1, P_2 para que el beneficio total sea máximo?

Aquí la *función económica* es:

$$z = 900\,x + 1000\,y$$

y las ligaduras:

$$11\,x + 9\,y \leq 9900$$
$$7\,x + 12\,y \leq 8400$$
$$6\,x + 16\,y \leq 9600$$

Solución: $x = 626$ $y = 334$.

* * *

El método de Dantzig (1947) *o método del simplex*

En los problemas anteriores sólo intervienen dos variables y los métodos de solución están al nivel del Bachillerato. Cuando el número de variables es superior a dos se utiliza un método publicado por Dantzig en 1947, que ha experimentado perfeccionamientos por Kuhn, Tucker y otros que pueden leerse en la bibliografía de Kaufmann (Ed. Dunod) (el autor obtuvo en las clases de Análisis II. F. de Económicas de Bilbao, una modificación del método de Dantzig utilizando matrices canónicas). La relación de Von Neumann entre programación lineal y juegos de estrategia puede verse en McKinsey. T. Mat. de los juegos Ed. Aguilar.

Aquí tratamos de sintetizar el método a través de un ejemplo.

Para un estudio detallado se recomienda KAUFMANN (págs. 281-367) y GASS, *Linear Programming Mc Graw Hill* (hay trad. por una editorial mejicana) que es el mejor libro en opinión del autor sobre la materia, que se puede definir en *general como un problema de máximos,* *y mínimos con condiciones lineales de varias variables en el que es imposible aplicar los métodos clásicos de Lagrange.*

Definición general de un problema de programación lineal.

Dadas las m ecuaciones lineales:

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{M+m} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

y la función económica:

$$(2) \qquad z = \sum_{j=1}^{M+m} c_j\, x_j$$

resolver un problema de programación lineal es hallar los valores de $n + m$ variables $x_i \geq 0$ que verifiquen (1) y hagan (2) = máxima o mínima.

Por el Teorema del poliedro convexo (que no demostraremos) *toda solución del problema debe comprender al menos* n *variables nulas.* Precisemos la terminología a seguir con la palabra solución:

Solución: $n + m$ valores x_j que satisfacer (1)

Solución posible: Id. con la condición $x_j \geq 0$

Solución básica: m variables $x_i > 0$ y n variables $x_j = 0$ que satisfacen (1).

Solución básica óptima:

Idem. pero que maximira o minimira.

Sea buscar el máximo de :

$$z = 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 5\,x_5 \qquad \textbf{(1)}$$

con las ligaduras:

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + x_3 - x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 3\,x_4 &= -12 \\ x_2 + x_3 + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

que en forma matricial puede escribirse:

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

En nuestro caso $m = 3 \quad n = 2.$

Suponemos obtenida una solución básica:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = \frac{7}{2} \quad x_4 = 4 \quad x_5 = \frac{1}{2}$$

que sustituida en z obtenemos $z = 10$.

Como hipótesis general suponemos que *la matriz de las ligaduras tiene rango m* en nuestro caso 3 y expresamos los vectores

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en función de los independientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

como base: lo que nos da la ecuación matricial:

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \\ x_{51} & x_{52} \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P_1 = P_3 \cdot x_{31} + P_4 \cdot x_{41} + P_5 \cdot x_{51}$ y análogamente para P_2

Si desarrollamos el producto matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{31}\, 1 + x_{41} \cdot 0 - x_{51} & x_{32} + 0 \cdot x_{42} - x_{52} \\ -3\, x_{41} & -3\, x_{42} \\ x_{31} + x_{51} & x_{32} + x_{52} \end{pmatrix}$$

y resolviendo el sistema o bien premultiplicando por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

obtenemos los coeficientes de (5)

$$P_j = \sum_{i=n+1}^{n+m} X_{ij}\, P_i \qquad (5)$$

que en nuestro caso son:

$$x_{31} = \frac{3}{2} \qquad x_{32} = \frac{1}{2}$$

$$x_{41} = \frac{-1}{3} \qquad x_{42} = -\frac{1}{3}$$

$$x_{52} = \frac{1}{2}$$

Calculemos ahora el z_j llamado crecimiento de z respecto al vector P_j.

$$(6) \qquad z_j = \sum_{i=n+1}^{n+m} x_{ij}\, c_i$$

que en nuestro caso y en forma matricial es

$$(z_1, z_2) + (1, 1, 5) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \left(-\frac{19}{3}, \frac{8}{3} \right)$$

se forman las diferencias:

$$z_1 - c_1 = -\frac{19}{3} - 3 = -\frac{28}{3} \qquad z_2 - c_2 = \frac{2}{3}$$

se escoge el índice en este caso, el 1, para el cual la *diferencia es negativa y de valor absoluto máximo.*

El procedimiento es iterativo y exige considerables cálculos.

Llegamos así a la solución:

$$x_1 = \frac{7}{3} \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = \frac{43}{9} \qquad x_5 = 4$$