PLANO Y ESPACIO AFIN

Por MIGUEL L. LAPLAZA
(Del Instituto «Jorge Juan», C. S. I. C.)

PLANO AFIN

1. VECTOR DE POSICION DE UN PUNTO

Sea O un punto fijo del plano. Podemos establecer una correspondencia entre los puntos del plano y el conjunto de los vectores libres del plano, del siguiente modo:

Al punto O le asignamos el vector nulo.

A un punto A distinto del punto O le asignamos el vector $\overrightarrow{OA}$.

Esta correspondencia es biunivoca:

Pues si el punto A es distinto del punto A', los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ tienen el origen común y no son coincidentes, luego no son representantes del mismo vector libre.

Por otra parte, si $\vec{v}$ es un vector libre, sabemos que existe un único punto A tal que $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$.

Diremos que el vector $\overrightarrow{OA}$ es el vector de posición del punto A. Por lo tanto, la noción de vector de posición de un punto del plano depende del punto O que tomemos.

2. SISTEMA DE REFERENCIA Y COORDENADAS DE UN PUNTO.

Un sistema de referencia del plano está constituído por un punto O y dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$, que sean linealmente independientes, dados en un cierto orden. Representaremos a este sistema por $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dado un punto A, el vector de posición del punto A es el vector $\overrightarrow{OA}$, y como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ constituyen una base de los vectores del plano, se verifica que

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

Diremos que los números x, y son las coordenadas del punto A respecto al sistema de referencia $(O, \vec{u}, \vec{v})$, y lo representaremos por

$$A = (x, y).$$

Por consiguiente, dado un punto del plano, podemos asignarle un par de números en un cierto orden de acuerdo con el procedimiento anterior, y estos números, en ese orden, son las coordenadas del punto respecto al sistema de referencia. Es decir:

$$A = (x,\ y) \Leftrightarrow \vec{OA} = x\vec{u} + y\vec{v},$$

y por consiguiente, dados un par de números, existe siempre un punto que tiene esas coordenadas, y este punto está unívocamente determinado, ya que si dos puntos tienen las mismas coordenadas, tienen el mismo vector de posición y, por lo tanto, coinciden.

3. CAMBIO DEL SISTEMA DE REFERENCIA

Sean $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$ y $(O^*,\ \vec{u}^*,\ \vec{v}^*)$ dos sistemas de referencia. Si un punto tiene las coordenadas $(x,\ y)$ con respecto al primero, indicaremos con $(x^*,\ y^*)$ las coordenadas con respecto al segundo.

Siendo $\{\vec{u},\ \vec{v}\}$ y $\{\vec{u}^*,\ \vec{v}^*\}$ dos bases del conjunto de los vectores libres del plano, sabemos que existen dos relaciones del tipo:

$$\begin{aligned} \vec{u}^* &= a_{11}\vec{u} + a_{12}\vec{v} \\ \vec{v}^* &= a_{21}\vec{u} + a_{22}\vec{v} \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} \neq O$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= b_{11}\vec{u}^* + b_{12}\vec{v}^* \\ \vec{v} &= b_{21}\vec{u}^* + b_{22}\vec{v}^* \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} \\ b_{21} b_{22} \end{vmatrix} \neq O$$

Si $A = (x^*,\ y^*)$, $A = (x,\ y)$:

$$\vec{O^*A} = x^*\vec{u}^* + y^*\vec{v}^*;$$

luego

$$\vec{O^*A} = \vec{O^*O} + \vec{OA} = \vec{O^*O} + x\vec{u} + y\vec{v};$$

de donde

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{OO^*} + x^*\vec{u}^* + y^*\vec{v}^*,$$

y si $O^* = (a,\ b)$, $\vec{OO^*} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$x\vec{u} + y\vec{v} = a\vec{u} + b\vec{v} + x^*(a_{11}\vec{u} + a_{12}\vec{v}) + y^*(a_{21}\vec{u} + a_{22}\vec{v}) =$$

$$= \vec{u}(a + a_{11}x^* + a_{21}y^*) + \vec{v}(b + a_{12}x^* + a_{22}y^*),$$

y por consiguiente:

$$x = a + a_{11}x^* + a_{21}y^*$$
$$y = b + a_{12}x^* + a_{22}y^*.$$

Y de una manera análoga puede llegarse a:

$$x^* = a' + b_{11}x + b_{21}y$$
$$y^* = b' + b_{12}x + b_{22}y.$$

4. VECTOR DE DIRECCION DE UNA RECTA.

Sea r una recta; consideremos el conjunto de todos los vectores libres de la forma $\overrightarrow{AB}$, en que A y B son puntos de r, entendiendo que $\overrightarrow{AA}$ es el vector nulo. Este conjunto de vectores libres constituyen una recta vectorial. A un vector cualquiera de esta recta vectorial le llamaremos vector de dirección de esta recta (excluído el vector nulo).

Por consiguiente, a cada recta le hemos hecho corresponder una recta vectorial, y se deduce de las definiciones, que dos rectas son paralelas si son distintas y si tienen la misma recta vectorial. El recíproco también está claro: si a dos rectas les corresponde la misma recta vectorial, estas rectas son paralelas. Como una recta vectorial queda determinada por uno de sus vectores que no sea el vector nulo; la condición anterior puede formularse del modo siguiente: la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean coincidentes o paralelas es que dos vectores de dirección, uno de cada recta, sean linealmente dependientes.

Una recta queda determinada por uno de sus puntos y un vector de dirección de la recta, ya que si hubiera dos rectas que pasasen por ese punto y tuvieran ese vector de dirección serían dos rectas paralelas con un punto común y, por lo tanto, coincidentes. Recíprocamente: dado un punto y un vector libre, existe una recta que pasa por ese punto y tiene ese vector de dirección. Basta tomar un representante del vector libre que tenga origen en ese punto, y el vector nos determina una recta que cumple estas condiciones.

5. ECUACIONES DE LA RECTA.

Sea $\vec{v}$ el vector de dirección de una recta r y sea A uno de sus puntos.

Si X es un punto de la recta r, $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{v}$, esto es:

$$\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \lambda\vec{v}$$

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v}.$$

Es decir, para todo punto X existe un λ que satisface a la relación anterior. Y, recíprocamente, si Y es un punto tal que para un valor de λ se verifica que:

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v}$$

$$\overrightarrow{AY} = \lambda\vec{v},$$

luego $\overrightarrow{AY}$ y $\overrightarrow{AX}$ pertenecen a la misma recta vectorial y tienen el origen común, y esto exige que A, X, Y estén alineados.

Por consiguiente: la expresión $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v}$ nos da los puntos de la recta, y solamente ellos, para los diversos valores de λ.

Esta expresión se llama ecuación vectorial de la recta r. Recíprocamente: Consideremos los puntos X, tales que:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{d},$$

en que A es un punto arbitrario y $\vec{d}$ un vector libre arbitrario. Sea r la recta que pasa por A y que tiene a $\vec{d}$ como vector de dirección; acabamos de ver que su ecuación vectorial coincide con la expresión dada y, por consiguiente, esta expresión es la ecuación vectorial de una recta.

Vamos a buscar otra forma de la expresión

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{d}$$

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

$$\overrightarrow{OA} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

$$\vec{d} = u\vec{u} + v\vec{v}.$$

Sustituyendo,

$$x\vec{u} + y\vec{v} = a\vec{u} + b\vec{v} + \lambda(u\vec{u} + v\vec{v}) = \vec{u}(a + \lambda u) + \vec{v}(b + \lambda v),$$

y esta expresión es equivalente a

$$x = a + \lambda u$$

$$y = b + \lambda v.$$

Expresiones que nos dan las coordenadas de los puntos de la recta en función de un parámetro. Estas expresiones se llaman ecuaciones paramétricas de la recta. Es inmediato el comprobar que toda expresión de esta forma corresponde a una recta, ya que equivale a una ecuación vectorial de una recta.

De las ecuaciones paramétricas se deducen las expresiones:

$$vx = av + \lambda uv$$

$$uy = bu + \lambda uv$$

y restando:

$$vx + (-u)y + (bu - av) = 0,$$

expresión que es la ecuación no paramétrica de la recta. Esta expresión es una ecuación lineal en las x y en las y, en la que el coeficiente de la y, cambiado de signo, y el de la x son las componentes de un vector de dirección de la recta.

Hemos de ver que todo punto $\mathbf{P} = (x_0, y_0)$, tal que:

$$vx_0 - uy_0 + bu - av = 0,$$

es un punto de esta recta. Como u o v son distintos de cero, podemos suponer que $u \neq 0$, sea: $\lambda = (x_0 - a)/u$,

$$b + \lambda v = b + \frac{x_0 - a}{u} v = b + \frac{x_0 v - av}{u} = b + \frac{uy_0 - bu}{u} = y_0,$$

y por consiguiente,

$$x_0 = a + \lambda u$$

$$y_0 = b + \lambda v,$$

y, por lo tanto, el punto $\mathbf{P}$ pertenece a la recta.

Recíprocamente: consideremos el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen a una ecuación del tipo

$$ax + by + c = 0.$$

Consideremos la recta cuyo vector de dirección es el $(-b, a)$, que pasa por un punto $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0)$, tal que:

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Acabamos de ver que la ecuación de esta recta es:

$$ax + by + c = 0,$$

como se comprueba sustituyendo en la ecuación de la recta para los valores $u = -b$, $v = a$, $a = x_0$, $b = y_0$, y, por lo tanto, la expresión dada es la ecuación de una recta cuyo vector de dirección tiene las componentes $(-b, a)$.

6. RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS.

Sean $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$ dos puntos distintos. Queremos encontrar la recta que pasa por estos dos puntos, en sus diferentes tipos de ecuaciones.

Un vector de dirección de la recta es el $\overrightarrow{AA'}$:

$$\overrightarrow{OA} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

$$\overrightarrow{OA'} = a'\vec{u} + b'\vec{v},$$

luego

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = (a' - a)\vec{u} + (b' - b)\vec{v}.$$

De aquí se deduce que: Ecuación vectorial de la recta AA':

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AA'}.$$

Ecuaciones paramétricas de la recta $\overrightarrow{AA'}$:

$$x = a + \lambda(a' - a)$$
$$y = b + \lambda(b' - b).$$

Ecuación no paramétrica de la recta AA':

$$-x(b' - b) + y(a' - a) + ab' - ba' = 0.$$

7. POSICION RELATIVA DE DOS RECTAS.

Sabemos que dadas dos rectas, sólo pueden presentarse los siguientes casos: las dos rectas son coincidentes, las dos rectas se cortan o las dos rectas son paralelas. Queremos encontrar la caracterización de cada uno de estos casos a través de sus ecuaciones no paramétricas, lo que equivale a estudiar un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Sean:

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

las dos rectas.

Vamos a averiguar primeramente si las dos rectas coinciden o si son paralelas, y para ello sabemos que es condición necesaria y suficiente que tengan unos vectores de dirección que dependan linealmente:

$$(b, -a) \qquad \text{y} \qquad (b', -a')$$

son vectores de dirección de las rectas. Por lo tanto, serán paralelas o coincidentes si existe un λ, tal que:

$$(b, -a) = \lambda(b', -a');$$

esto es, si

$$b = \lambda b'$$

$$a = \lambda a'.$$

En caso de que exista, ha de ser distinto de cero, pues si fuera igual a cero,

$$b = a = 0,$$

y no tendríamos la ecuación de una recta. Además,

$$a'b = \lambda b'a' = ab';$$

luego

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0,$$

esto es

$$ab' = ba';$$

supongamos que $a' \neq 0$, tomemos $\lambda = a/a'$:

$$\lambda b' = b' \cdot a/a' = ab'/a' = a'b/a' = b;$$

si $a' = 0$, como $b' \neq 0$, $a = 0$, y basta tomar

$$\lambda = b/b'.$$

Por consiguiente: Dos rectas son paralelas o coincidentes cuando y sólo cuando

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0,$$

y como consecuencia: dos rectas son incidentes y distintas cuando

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Volvamos al caso en que

$$\begin{vmatrix} a\, b \\ a'b' \end{vmatrix} = 0.$$

Si

$$\begin{vmatrix} a\, c \\ a'c' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b\, c \\ b'c' \end{vmatrix}$$

son distintos de cero, las rectas no pueden tener ningún punto común. En efecto: supongamos que es diferente de cero el segundo:

$$ab'x + bb'y + cb' = 0$$
$$a'bx + bb'y + c'b = 0,$$

y restando se obtendría (si hubiera alguna solución común) que:

$$cb' - c'b = \begin{vmatrix} c\, b \\ c'b' \end{vmatrix} = 0,$$

contra lo supuesto.

Si

$$\begin{vmatrix} a\, c \\ a'c' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b\, c \\ b'c' \end{vmatrix} = 0,$$

las dos rectas son coincidentes, ya que se ve, como en el caso primero que hemos tratado, que:

$$\left.\begin{matrix} b = \lambda b' \\ c = \lambda c' \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} a = \lambda a' \\ c = \lambda c' \end{matrix}\right\}$$

y, por consiguiente, las dos ecuaciones no difieren sino en una constante que multiplica a una de ellas.

Veamos que si las dos rectas coinciden, se verifica que:

$$\begin{vmatrix} a\, b \\ a'b' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a\, c \\ a'c' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b\, c \\ b'c' \end{vmatrix} = 0.$$

Por coincidir, tienen vectores de dirección dependientes; luego

$$\begin{vmatrix} a\, b \\ a'b' \end{vmatrix} = 0.$$

Además:

$$\left.\begin{matrix} aa'x + ba'y + ca' = 0 \\ aa'x + ab'y + ac' = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ba' - ab')y + ca' - ac' = 0;$$

luego

$$ca' - ac' = - \begin{vmatrix} a'c' \\ a\, c \end{vmatrix} = 0.$$

Por otra parte,

$$\left.\begin{array}{l} b'ax + bb'y + cb' = 0 \\ ba'x + bb'y + bc' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (b'a - ba')x + cb' - c'b = 0;$$

luego

$$cb' - c'b = -\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

6. POSICIONES RELATIVAS DE TRES RECTAS.

Dadas tres rectas de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0; \end{array}$$

por simple aplicación del apartado anterior podemos resolver casi totalmente la cuestión de su posición relativa.

Primeramente hay que averiguar los paralelismos y las coincidencias, lo que equivale a tomar las rectas de dos en dos (es decir, tres casos) y aplicar el apartado anterior.

Supongamos que las rectas dadas no son ni paralelas ni hay dos de ellas paralelas, ni hay varias de ellas coincidentes. Quedan solamente dos casos: o que formen triángulo o que sean concurrentes. Veamos la caracterización de los dos casos: Si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

las tres rectas tienen un punto común, ya que

$$a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} c' & a' \\ c'' & a'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

$$a' \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + b' \begin{vmatrix} c' & a' \\ c'' & a'' \end{vmatrix} + c' \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

$$a'' \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + b'' \begin{vmatrix} c' & a' \\ c'' & a'' \end{vmatrix} + c'' \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

y, por consiguiente, pertenece a las tres rectas el punto cuyas coordenadas son:

$$\left(\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} ,\ \begin{vmatrix} c' & a' \\ c'' & a'' \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \right)$$

Veamos que si el determinante es distinto de cero, las tres rectas no pueden tener un punto común:

De las ecuaciones se deduce que:

$$\left.\begin{array}{l} a'ax + a'by + a'c = 0 \\ aa'x + ab'y + ac' = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a''ax + a''by + a''c = 0 \\ aa''x + ab''y + ac'' = 0 \end{array}\right\}$$

y restando estas expresiones obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} (a'b - ab')y + a'c - ac' = 0 \\ (a''b - ab'')y + a''c - ac'' = 0 \end{array}\right\}$$

de donde se deduce que:

$$(a''b - ab'')(a'b - ab')y + (a'c - ac')(a''b - ab'') = 0$$
$$(a'b - ab')(a''b - ab'')y + (a''c - ac'')(a'b - ab') = 0$$

y restando:

$$(a'c - ac')(a''b - ab'') - (a''c - ac'')(a'b - ab') =$$
$$= a(ac'b'' + a'bc'' + a''b'c - a''bc' - a'b''c - ac''b') =$$
$$= -a \begin{vmatrix} aa'a'' \\ bb'b'' \\ cc'c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Haciendo la misma operación, cambiando la segunda ecuación por la primera:

$$a' \begin{vmatrix} aa'a'' \\ bb'b'' \\ cc'c'' \end{vmatrix} = 0.$$

y como a o a' son diferentes de cero, ya que las rectas no son paralelas, obtenemos que el determinante es nulo, en contradicción con la hipótesis.

ESPACIO AFIN

1. VECTOR DE POSICION DE UN PUNTO.

Sea O un punto fijo del espacio. Podemos establecer una correspondencia entre los puntos del espacio y el conjunto de los vectores libres, del espacio del siguiente modo:

Al punto O le asignamos el vector nulo.

A un punto A distinto del punto O le asignamos el vector $\overrightarrow{OA}$.

Esta correspondencia es biunívoca:

Pues si el punto A es distinto del punto A′, los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ tienen el origen común y no son coincidentes, luego no son representantes del mismo vector libre.

Por otra parte, si $\vec{v}$ es un vector libre, sabemos que existe un único punto A tal que $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$.

Diremos que el vector $\overrightarrow{OA}$ es el vector de posición del punto A. Por lo tanto, la noción de vector de posición de un punto del espacio depende del punto O que tomemos.

2. SISTEMA DE REFERENCIA Y COORDENADAS DE UN PUNTO.

Un sistema de referencia del plano está constituído por un punto O y tres vectores, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, que sean linealmente independientes, dados en un cierto orden. Representaremos a este sistema por $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Dado un punto A, el vector de posición del punto A es el vector $\overrightarrow{OA}$, y como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ constituyen una base de los vectores del espacio, se verifica que:

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}.$$

Diremos que los números x, y, z son las coordenadas del punto A respecto al sistema de referencia $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, y lo representaremos por:

$$A = (x, y, z).$$

Por consiguiente, dado un punto del espacio, podemos asignarle un conjunto de tres números en un cierto orden de acuerdo con el procedimiento anterior, y estos números en ese orden son las coordenadas del punto respecto al sistema de referencia. Es decir,

$$A = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w},$$

y, por consiguiente, dados tres números en un cierto orden, existe siempre un punto que tiene esas coordenadas, y este punto está unívocamente determinado, ya que si dos puntos tienen las mismas coordenadas, tienen el mismo vector de posición y, por lo tanto, coinciden.

3. CAMBIO DEL SISTEMA DE REFERENCIA.

Sean $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ y $(O^*, \vec{u}^*, \vec{v}^*, \vec{w}^*)$ dos sistemas de referencia. Si un punto tiene las coordenadas (x, y, z) con respecto al primero, indicaremos con (x^*, y^*, z^*) las coordenadas con respecto al segundo.

Siendo $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y $\{\vec{u}^*, \vec{v}^*, \vec{w}^*\}$ dos bases del conjunto de los vectores libres del espacio, sabemos que existen dos relaciones del tipo:

$$\begin{aligned} \vec{u}^* &= a_{11}\vec{u} + a_{12}\vec{v} + a_{13}\vec{w} \\ \vec{v}^* &= a_{21}\vec{u} + a_{22}\vec{v} + a_{23}\vec{w} \\ \vec{w}^* &= a_{31}\vec{u} + a_{32}\vec{v} + a_{33}\vec{w} \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= b_{11}\vec{u}^* + b_{12}\vec{v}^* + b_{13}\vec{w}^* \\ \vec{v} &= b_{21}\vec{u}^* + b_{22}\vec{v}^* + b_{23}\vec{w}^* \\ \vec{w} &= b_{31}\vec{u}^* + b_{32}\vec{v}^* + b_{33}\vec{w}^* \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} b_{13} \\ b_{21} b_{22} b_{23} \\ b_{31} b_{32} b_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Si $A = (x, y, z)$, $A = (x^*, y^*, z^*)$,

$$\vec{OA} = \vec{OO^*} + \vec{O^*A},$$

y si

$$\vec{OO^*} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w},$$

sustituyendo en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} &= a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} + x^*\vec{u}^* + y^*\vec{v}^* + z^*\vec{w}^* = \\ &= a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} + x^*(a_{11}\vec{u} + a_{12}\vec{v} + a_{13}\vec{w}) + y^*(a_{21}\vec{u} + a_{22}\vec{v} + a_{23}\vec{w}) + \\ &+ z^*(a_{31}\vec{u} + a_{32}\vec{v} + a_{33}\vec{w}) = (a + a_{11}x^* + a_{21}y^* + a_{31}z^*)\vec{u} + \\ &+ (b + a_{12}x^* + a_{22}y^* + a_{32}z^*)\vec{v} + (c + a_{13}x^* + a_{23}y^* + a_{33}z^*)\vec{w}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que:

$$\begin{aligned} x &= a + a_{11}x^* + a_{21}y^* + a_{31}z^* \\ y &= b + a_{12}x^* + a_{22}y^* + a_{32}z^* \\ z &= c + a_{13}x^* + a_{23}y^* + a_{33}z^* \end{aligned}$$

y de una manera análoga puede llegarse a:

$$x^* = \bar{a} + b_{11}x + b_{21}y + b_{31}z$$
$$y^* = \bar{b} + b_{12}x + b_{22}y + b_{32}z$$
$$z^* = \bar{c} + b_{13}x + b_{23}y + b_{33}z.$$

3. ECUACIONES DEL PLANO.

Sea Π un plano, y tomemos dos vectores, $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, que tengan representantes contenidos dentro del plano, y que sean linealmente independientes. Esto quiere decir que todo vector libre $\vec{v}$, que tenga representantes contenidos dentro del plano puede expresarse como combinación lineal de ellos, y que recíprocamente, si $\vec{v}$ es un vector que puede expresarse como combinación lineal de estos dos vectores, sus representantes o son paralelos al plano o están contenidos dentro de él.

Sea P un punto del plano Π; si X es otro punto se verifica que:

$$\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2;$$

esto es,

$$\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2,$$

o su equivalente

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2;$$

si $P = (a, b, c)$,

$$\vec{r}_1 = (u_1, v_1, w_1)$$
$$\vec{r}_2 = (u_2, v_2, w_2)$$

nos resulta:

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} + \lambda(u_1\vec{u} + v_1\vec{v} + w_1\vec{w}) +$$
$$+ \mu(u_2\vec{u} + v_2\vec{v} + w_2\vec{w});$$

esto es,

$$x = a + \lambda u_1 + \mu u_2$$
$$y = b + \lambda v_1 + \mu v_2$$
$$z = c + \lambda w_1 + \mu w_2$$

que son las ecuaciones paramétricas del plano, y que son equivalentes a la ecuación vectorial. Por lo tanto, toda expresión de este tipo corresponde a las ecuaciones paramétricas de un plano, ya que equivale a una expresión del tipo

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2.$$

De las ecuaciones paramétricas se deduce que

$$\begin{vmatrix} x-a & u_1 & u_2 \\ y-b & v_1 & v_2 \\ z-c & w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda u_1 + \mu u_2 & u_1 & u_2 \\ \lambda v_1 + \mu v_2 & v_1 & v_2 \\ \lambda w_1 + \mu w_2 & w_1 & w_2 \end{vmatrix} = 0,$$

lo que equivale a la ecuación

$$(x-a)\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} + (y-b)\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} + (z-c)\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Veamos que, recíprocamente, si un punto satisface a la relación

$$\begin{vmatrix} x-a & u_1 & u_2 \\ y-b & v_1 & v_2 \\ z-c & w_1 & w_2 \end{vmatrix} = 0,$$

que este punto pertenece al plano. Para ello hemos de ver en primer lugar que uno, al menos, de los determinantes,

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

sea distinto de cero, puesto que si los tres fueran nulos, esto es, si

$$u_1 v_2 = v_1 u_2$$
$$u_1 w_2 = u_2 w_1$$
$$v_1 w_2 = v_2 w_1$$

como u_1, v_1 o w_1 es distinto de cero, podemos considerar que $u_1 \neq 0$ y, por lo tanto,

$$u_2 = u_2/u_1 u_1$$
$$v_2 = u_2/u_1 v_1$$
$$w_2 = u_2/u_1 w_1$$

y los vectores r_1 y r_2 serían linealmente dependientes, contra lo supuesto. Por lo tanto, podemos suponer que, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

y como

$$\begin{vmatrix} x-a & u_1 & u_2 \\ y-b & v_1 & v_2 \\ z-c & w_1 & w_2 \end{vmatrix} = 0 = (x-a)\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} + u_1 \begin{vmatrix} v_2 & y-b \\ w_2 & z-c \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} y-b & v_1 \\ z-c & w_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y-b & v_1 & v_2 \\ y-b & v_1 & v_2 \\ z-c & w_1 & w_2 \end{vmatrix} = 0 = (y-b)\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} + v_1 \begin{vmatrix} v_2 & y-b \\ w_2 & z-c \end{vmatrix} + v_2 \begin{vmatrix} y-b & v_1 \\ z-c & w_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} z-c & w_1 & w_2 \\ y-b & v_1 & v_2 \\ z-c & w_1 & w_2 \end{vmatrix} = 0 = (z-c)\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} + w_1 \begin{vmatrix} v_2 & y-b \\ w_2 & z-c \end{vmatrix} + w_2 \begin{vmatrix} y-b & v_1 \\ z-c & w_1 \end{vmatrix}$$

tomando $\lambda = \dfrac{\begin{vmatrix} y-b & v_2 \\ z-c & w_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}}; \quad \mu = \dfrac{\begin{vmatrix} v_1 & y-b \\ w_1 & z-c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}}$

se verifica que

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda u_1 + \mu u_2 \\ y &= b + \lambda v_1 + \mu v_2 \\ z &= c + \lambda w_1 + \mu w_2 \end{aligned}$$

Recíprocamente: consideremos la expresión

$$ax + by + cz + d = 0,$$

en que, por ejemplo, $a \neq 0$, y vamos a ver que el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen a esta relación son los puntos de un plano. Los puntos

$$A_1 = (-d/a,\ 0,\ 0); \qquad A_2 = (-d - b/a,\ 1,\ 0); \qquad A_3 = (-d - c/a,\ 0,\ 1)$$

satisfacen a esta relación y no están alineados, ya que esto es equivalente a la dependencia lineal de los vectores

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (-b/a,\ 1,\ 0); \qquad \overrightarrow{A_1A_3} = (-c/a,\ 0,\ 1),$$

y si

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \lambda \overrightarrow{A_1A_3}$$

$$(-b/a,\ 1,\ 0) = \lambda(-c/a,\ 0,\ 1) = (-\lambda c/a,\ 0,\ \lambda),$$

lo que implica que $1 = 0$; por consiguiente, no están alineados estos puntos.

Consideremos el plano que pasa por el punto A_1 y que contiene a los vectores $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$. La ecuación de este plano es:

$$\begin{vmatrix} x+\dfrac{d}{a} & -\dfrac{b}{a} & -\dfrac{c}{a} \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + \frac{d}{a} + y\frac{b}{a} + z\frac{c}{a} = 0,$$

o lo que es lo mismo:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

que coincide con la expresión dada, que, por lo tanto, representa el conjunto de los puntos de un plano.

4. POSICION RELATIVA DE DOS PLANOS.

Dados dos planos:

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sólo pueden presentarse tres casos: o son coincidentes, o son paralelos, o se cortan en una recta.

Si los dos planos son paralelos, debe verificarse:

$$\begin{vmatrix} a\,b \\ a'b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,c \\ a'c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b\,c \\ b'c' \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a\,d \\ a'd' \end{vmatrix} \neq 0; \text{ o } \begin{vmatrix} b\,d \\ b'd' \end{vmatrix} \neq 0; \text{ o } \begin{vmatrix} c\,d \\ c'd' \end{vmatrix} \neq 0.$$

En efecto. Hagamos $x = 0$; las ecuaciones

$$by + cz + d = 0$$
$$b'y + c'z + d' = 0$$

no pueden tener ninguna solución común, por lo que

$$\begin{vmatrix} b\,c \\ b'c' \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} b\,d \\ b'd' \end{vmatrix} \neq 0; \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} c\,d \\ c'd' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Hagamos $y = 0$; las ecuaciones

$$ax + cz + d = 0$$
$$a'x + c'z + d' = 0$$

no pueden tener ninguna solución común, por lo que

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix} \neq 0; \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Hagamos $z = 0$; las ecuaciones

$$ax + by + d = 0$$
$$a'x + b'y + d' = 0$$

no pueden tener ninguna solución común, por lo que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix} \neq 0; \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix} \neq 0,$$

con lo cual hemos llegado al resultado que buscábamos.

Veamos el recíproco. Si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0,$$

y por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix} \neq 0,$$

que los planos son paralelos, es decir, que no pueden tener ningún punto común.

De las ecuaciones se deduce que

$$b'ax + b'by + b'cz + b'd = 0$$
$$ba'x + bb'y + bc'z + bd' = 0$$

y restando,

$$(b'a - ba')x + (b'c - bc')y + b'd - bd' = - \begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix} = 0,$$

contra lo supuesto, y por lo tanto, no hay puntos comunes.

Por consiguiente: dos planos son paralelos cuando y solamente cuando

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0,$$

y alguno de los

$$\begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

es distinto de cero.

Dos planos se cortan en una recta cuando, y solamente cuando, alguno de los determinantes

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

es distinto de cero. Para comprobar esto bastará ver que si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix} = 0,$$

los dos planos coinciden, y recíprocamente.

Hemos visto que si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0,$$

existe un λ tal que

$$a = \lambda a'$$

$$b = \lambda b'$$

$$c = \lambda c'$$

y como

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ d & d' \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda d' = a/a'd' = ad'/a' = a'd/a' = d;$$

las dos acuaciones coinciden salvo en un factor constante y, por lo tanto, representan el mismo plano.

Recíprocamente: si los dos planos coinciden, como los puntos $(-d/a, 0, 0)$, $(-d - b/a, 1, 0)$ y $(-d - c/a, 0, 1)$ pertenecen al primero, han de pertenecer al segundo, esto es:

$$-a'\frac{d}{a} + d' = 0; \quad -\frac{d+b}{a}a' + b' + d' = 0; \quad -\frac{d+c}{a}a' + c' + d' = 0,$$

esto es

$$ad' - a'd = \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix} = 0$$

$$-da' - ba' + ab' + ad' = \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0,$$

$$-da' - ca' + ac' + ad' = \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$$

y si $b = c = b' = c' = 0$, ya está demostrado. Si b, por ejemplo, es distinto de cero, se obtiene análogamente que

$$\begin{vmatrix} b & a \\ b' & a' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix} = 0,$$

y como los dos planos no son paralelos y

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0,$$

debe ser

$$\begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix} = 0,$$

con lo cual queda demostrado.

5. ECUACION DE LA RECTA.

Sabemos que dada una recta, el conjunto de todos los vectores de la forma $\overrightarrow{AA'}$, siendo A y A′ puntos de la recta, es una recta vectorial. Llamaremos vector de dirección de una recta a uno cualquiera de esos vectores que sean distintos del vector nulo.

Es inmediato, a partir de las propiedades del paralelismo en el espacio, que dado un punto y un vector libre existe una recta única que pasa por ese punto y tiene al vector libre como vector de dirección.

Sea r una recta, A un punto de r y $\vec{d}$ un vector de dirección de esta recta. Se demuestra, como en el caso del plano, que los puntos de la recta están caracterizados por la relación

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \vec{d},$$

y esto es equivalente a

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{d},$$

que es la ecuación vectorial de la recta.

Recíprocamente: toda expresión de este tipo es la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto A y que tiene a d como vector de dirección, como se comprueba fácilmente.

Sustituyendo en la ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$
$$\overrightarrow{OA} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$
$$\vec{d} = u\vec{u} + v\vec{v} + w\vec{w}$$

llegamos a

$$x = a + \lambda u$$
$$y = b + \lambda v$$
$$z = c + \lambda w,$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta.

A partir de estas ecuaciones llegaríamos a las ecuaciones no paramétricas, pero ya hemos visto cuando hemos estudiado la posición de dos planos, que una recta viene determinada por un par de ecuaciones de la forma

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$a'z + b'y + c'z + d' = 0,$$

en que uno de los menores

$$\begin{vmatrix} a\, b \\ a'b' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a\, c \\ a'c' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b\, c \\ b'c' \end{vmatrix}$$

es distinto de cerc.

Es interesante el buscar a partir de estas ecuaciones un vector de dirección de la recta. Para ello basta observar que

$$\begin{vmatrix} a\, b\, c \\ a\, b\, c \\ a'b'c' \end{vmatrix} = 0 = a \begin{vmatrix} b\, c \\ b'c' \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} c\, a \\ c'a' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a\, b \\ a'b' \end{vmatrix} = 0,$$

y que análogamente

$$\begin{vmatrix} a'b'c' \\ a\, b\, c \\ a'b'c' \end{vmatrix} = 0 = a' \begin{vmatrix} b\, c \\ b'c' \end{vmatrix} + b' \begin{vmatrix} c\, a \\ c'a' \end{vmatrix} + c' \begin{vmatrix} a\, b \\ a'b' \end{vmatrix} = 0,$$

por lo que si un punto (α, β, γ) pertenece a la recta, también pertenece a ella el punto:

$$\left(\alpha + \begin{vmatrix} b\, c \\ b'c' \end{vmatrix}, \quad \beta + \begin{vmatrix} c\, a \\ c'a' \end{vmatrix}, \quad \gamma + \begin{vmatrix} a\, b \\ a'b' \end{vmatrix}\right)$$

y, por lo tanto, un vector de dirección es el

$$\left(\begin{vmatrix} b\, c \\ b'c' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} c\, a \\ c'a' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a\, b \\ a'b' \end{vmatrix}\right)$$

6. POSICION DE UNA RECTA Y UN PLANO.

Sea $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ un plano y

$$x = a + \lambda u$$
$$y = b + \lambda v$$
$$z = c + \lambda w$$

una recta. La condición necesaria y suficiente para que sean paralelas estas figuras es que no admita solución la ecuación en λ:

$$a_1a + b_1b + c_1c + d_1 + \lambda(a_1u + b_1v + c_1w) = 0,$$

y para ello ha de ser

$$a_1a + b_1b + c_1c + d_1 \neq 0$$
$$a_1u + b_1v + c_1w = 0.$$

Si se verifica que:

$$a_1a + b_1b + c_1c + d_1 = 0$$
$$a_1u + b_1v + c_1w = 0,$$

la recta está contenida en el plano, ya que para cualquier valor de λ, nos da un punto contenido en el plano, y recíprocamente.

Finalmente, por exclusión de los casos anteriores, se llega a que si una recta y un plano son incidentes, se debe verificar que

$$a_1u + b_1v + c_1w \neq 0.$$

7. POSICION DE TRES PLANOS.

Se puede reducir al caso anterior, considerando la recta determinada por dos de ellos, o se trata de un caso de paralelismo de los tres planos.