MOVIMIENTO DE TRASLACION Y MOVIMIENTO DE ROTACION

Por DEMETRIO IGLESIAS VACAS
(Catedrático del Instituto femenino de La Coruña)

La presente comunicación didáctica, por ser eso, didáctica, es simplemente una exposición de una manera de enseñar. Creemos que el cuadro que se adjunta, y que se utiliza como «receta» de la lección, es suficientemente significativo de la técnica didáctica utilizada. (En el libro de mi colega Jesús Ruiz Vázquez —«Física»— aparece un cuadro parecido, pero no igual. Entre otras diferencias, hay entre ellos la fundamental de que Ruiz Vázquez lo confecciona como resumen de la lección, para concretar ideas. Yo, en cambio, lo utilizo como pauta a seguir. El que yo tenga éxito con mi sistema no excluye, ni mucho menos, que también lo tenga él con el suyo; hay que tener en cuenta, para aclararlo, que el «material humano» al que él dedica la lección, son los alumnos del Curso Preuniversitario, que necesitan sintetizar ideas ya adquiridas; yo dedico esta lección a los alumnos del curso sexto, a los que se proporcionan estos conocimientos por vez primera, en el grado que lo deseen y con las características que se los hagan asequibles.

* * *

Lo primero que me ha enseñado la experiencia es que, de una forma empírica, el alumno intuye en seguida que un sistema que puede llegar a trasladarse o a girar, presenta siempre una resistencia intrínseca a hacerlo. Es lógico que inquiera en qué parte del sistema radica esa oposición. Dicho de otra manera: cómo debemos llamar la inercia del sistema y de qué depende.

En la primera línea del cuadro se satisface esa inquietud, pero con una variante: no se pregunta «¿Dónde está la inercia?»; se pregunta: «¿Dónde está la inercia... resistencia a CAMBIAR DE VELOCIDAD?» La variante ya permite destruir—por si lo hubiera—un posible error. El de creer que la inercia consiste en resistencia a moverse cuando «casi» todos sabemos que, en realidad, es resistencia a cambiar de velocidad. Y digo casi todos porque—es bien sabido—hasta Aristóteles estaba en ese error. Hizo falta la autoridad de un Galileo para deshacerlo.

Experiencias muy sencillas con masas que se trasladan, permiten contestar que la MASA es una expresión de la inercia en el movimiento de traslación. Experiencias un poco menos sencillas permiten justificar que en el movimiento de rotación, la inercia no está sólo en la masa, sino también en el radio de giro. La magnitud $I = m.r^2$ (desgraciadamente llamada «momento de inercia») representa en el movimiento de rotación un papel análogo al de la masa en el movimiento de traslación. Comienzan las analogías que van naciendo de una forma «funcional». En el cuadro se tratan exhaustivamente esas magnitudes indicando las unidades con que se miden. Con ello se aclara—por si es necesario—que aunque son magnitudes que hacen el mismo oficio, no son, ni mucho menos, homogéneas. Se observará que de estas magnitudes—como de las siguientes—se indica en el cuadro si son escalares o vectoriales. Por eso no estaría mal—a mí me lo parece—escribir el «momento de inercia» así: $m.\vec{d}.\vec{d}$. El alumno aprende de paso que por ser m un escalar, y $\vec{d}.\vec{d}$. un producto de vectores de la misma dirección, $m\,d^2$ es una magnitud escalar. (No será la única vez que se encontrará con algo semejante, verbi gratia: la energía cinética). Considero la ocasión «pintiparada» para aclarar la diferencia «funcional» entre la masa inerte y la masa gravitatoria. El alumno ya sabe, llegada esta ocasión, que en una fórmula las magnitudes deben estar medidas en unidades correspondientes. Pero hay que aclararle que en la fórmula de Newton la cosa es más grave, pues las masas que aparecen en ellas no son la expresión de resistencias a cambiar de velocidad (masas inertes), sino números que miden la tendencia de los cuerpos a aproximarse (masas gravitatorias). La misión de la G. es... «corregir un traje que se ha hecho para una persona tomándole las medidas a otra». Esto, todos los que lo enseñamos lo sabemos..., pero no nos quedaremos satisfechos si no logramos que lo sepan también los alumnos, puesto que nuestra misión es travasar conocimientos.

* * *

El buen pedagogo — algunos dicen profesor — no debe inventarse las preguntas que se hace el alumno. La experiencia debe haberle enseñado en qué orden se las hace y seguir ese orden. A mí me parece que después de preguntarse: «¿Qué es lo que representa la inercia?», se hace esta otra, a seguido: «¿Cuál es el agente físico capaz de vencer esa inercia?» En la segunda línea del cuadro se contesta: La fuerza o el producto de la fuerza por el radio de giro (lo que se llama momento de la fuerza). (Siempre—y es una impresión «rabiosamente personal»—me ha parecido más intuitiva la fuerza nacida dinámicamente que estáticamente.)

* * *

Se avanza funcionalmente más. La fuerza (o el momento) son agentes, pero también causas, ¿de qué efecto? Lisa o llanamente: de un cambio de velocidad, o sea «autores» de una aceleración. Como la intuición

Sucinta CORRESPONDENCIA entre una traslación y una rotación

FUNCION	TRASLACION				ROTACION			
	Magnitud	Símbolo	Dimensión	Unidades	Magnitud	Símbolo	Dimensión	Unidades
1.ª INERCIA. (Resistencia a cambiar la velocidad)	Masa inerte	m.	$[M^1 L^0 T^0]$	c. g. s. = gramo M. K. S. = kg. = 10^3 g TERRESTRE = ut. = 9'81 kg. 981.10^3 g.	Momento de inercia	I.	$[M^1 L^2 T^0]$	c. g. s. = gramo-cm^2 M. K. S. = kg. m^2 = 10^7 (gr. cm^2) T. = ut. m^2 = 9'8 (kg m^2) = 9'8.10^7 (gr. cm^2)
2.ª Agente. (Causa que vence la inercia)	Fuerza	$\vec{F}$.	$[M^1 L^1 T^{-2}]$	c. g. s. = dina M. K. S. = Newton = 10^5 (dinas) T. = kilopondio 9'81 (N) = 9'81-10^5 (dinas)	Momento	$\vec{M}$.	$[M^1 L^2 T^{-2}]$	c. g. s. = dina. cm. M. K. S. = ew. m. = 10^7 (din. cm) T. = Kp. m. = 9'8 (New. m.) = 9'8.10^7 (din. cm.)
3.ª Efecto que origina ese agente	Aceleración lineal	$\vec{a}$	$[M^0 L^1 T^{-2}]$	c. g. s. = cm. seg.$^{-2}$ M. K. S. = seg.$^{-2}$ = 10^2 (cm.-seg.$^{-2}$) T. = m. seg.$^{-2}$ = 10^2 (cm.-seg.$^{-2}$)	Aceleración angular	$\vec{\alpha}$	$[M^0 L^0 T^{-2}]$	c. g. s. = radián-seg.$^{-2}$ M. K. S. = radián-seg.$^{-2}$ T. = radián-seg.$^{-2}$
4.ª Relación entre la causa y el efecto	$m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}}$				$I = \frac{\vec{M}}{\vec{\alpha}}$			
5.ª Causa continuada	Impuesto lineal	$\vec{F}.t.$	$[M^1 L^1 T^{-1}]$	c. g. s. = dina-seg. M. K. S. = New.-seg. = 10^5 (din.-seg.) T. = Kp seg. = 9'8 (New. seg.) = 9'8-10^5 (din.-seg.)	Impulso angular	$\vec{M}.t.$	$[M^1 L^2 T^{-1}]$	c. g. s. =dina. cm. seg M. K. S. = New. m. seg. = 10^7 (din. cm. seg.) T. = Kp. m. seg. = 9'8 (New. m. seg.) = 9'8.10^7 (din. cm. 1)
6.ª Efecto de la causa continuada	Velocidad lineal	$\vec{v}_t$	$[M^0 L^1 T^{-1}]$	c. g. s. = cm. seg.$^{-1}$ M. K. S. = m. seg.$^{-1}$ = 10^{-2} (cm.-seg.$^{-1}$) T. = m. seg. = 10^2 (m. seg.$^{-1}$)	Velocidad angular	$\vec{\omega}$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$	c. g. s. M. K. S. radián-seg.$^{-1}$ T.
7.ª Relación entre causa continuada y efecto	$M = \frac{\vec{F}}{\vec{v}_t} t$				$I = \frac{\vec{M}.}{\vec{\omega}_t} t$			
8.ª Desplazamiento en el tiempo t	Espacio lineal $\vec{s} = {}^1/_2 \vec{a}.\, t^2$	$\vec{s}$.	$[M^0 L^1 T^0]$	c. g. s. = cm. M. K. S. = m. = 10^2 (cm.) T. = m. = 10^2 (cm.)	Espacio angular $\vec{\Phi} = {}^1/_2\, \alpha\, t^2$	$\vec{\Phi}$	$[M^0 L^0 T^0]$	c. g. s. M. K. S radián T.
9.ª Energía equivalente al trabajo	Energía cinética ${}^1/_2\, m.\, \vec{v}_t . \vec{v}_t$	E_c	$[M^1 L^2 T^{-2}]$	c. g. s. = ergios M. K. S. = julios = 10^7 (ergios) T. = kgm. = 9'81 (jul.) = 9'81-10^7 (ergios)	Energía cinética ${}^1/_2\, I.\, \vec{\omega}_t . \vec{\omega}_t$	E_R	$[M^1 L^2 T^{-2}]$	c. g. s. = ergios M. K. S. = julios = 10^7 (ergios) T. = Kgm. = 9'81 (jul.) — 9'81.10^7 (ergios)

de la aceleración angular no es tan espontánea como la de la aceleración lineal, me aprovecho de la eficacia de las ecuaciones de dimensiones para caracterizar la magnitud que nace como efecto de la causa momento (es bien sabido que la misión más importante—fecunda—de las ecuaciones de dimensiones es informar sobre las cualidades de una magnitud que aparece de sopetón). El mecanismo didáctico que considero apto para caracterizar la magnitud efecto del momento es el siguiente: Llamamos X a esa magnitud; a la fórmula $\vec{F} = m.\vec{a}$ del movimiento de rotación debe corresponder otra de estructura análoga en el movimiento de rotación, ésta: $\vec{M} = I.\vec{X}$. Valiéndonos de la necesaria homogeneidad de los dos miembros, deducimos que al ser $(M.^1L.^2T.^{-2})$ las dimensiones de $\vec{M}$., ésas han de ser también las de $I.\vec{X}$. Como las de I son: $(M.^1L.^2T.^0)$, las de $\vec{X}$. han de ser necesariamente: $(M.^0L.^0T.^{-2})$ que son precisamente las de una aceleración angular.

Se puede consolidar la idea de que el efecto de una fuerza es una aceleración (como demostró Galileo) y no una velocidad (como se creía antes, incluido Aristóteles), expresando el principio de inercia en la forma: «Los cuerpos no son capaces por sí mismos de cambiar la velocidad...», en vez de enunciarlo: «Los cuerpos no son capaces por sí mismos de cambiar su estado de reposo o movimiento...». En realidad, la fuerza instantánea que arranca al cuerpo del reposo, lo que produce es una aceleración (la de $\vec{a} = \vec{v}_l - O$), que luego continuará o no, según que siga o no actuando la fuerza. Creo útil, llegado este momento, dejar bien sentado que la aceleración lineal del movimiento de traslación que se corresponde con la aceleración angular del movimiento de rotación producida por el momento, no es la aceleración centrípeta que se ha estudiado en el movimiento circular UNIFORME la que viene definida por $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R}$. Esta es una aceleración que solamente significa cambio de la dirección del vector velocidad, mientras que la que venimos estudiando implica cambio también de intensidad del vector velocidad. Esta aclaración puede robustecerse experimentalmente con el clásico experimento del peso que pende de una cuerda enrollada en una polea o en un torno.

* * *

Las relaciones de la línea cuarta no son más que formulaciones matemáticas del principio universal de que el efecto es proporcional a la causa. En este caso particular, las causas son $\vec{F}$ y $\vec{M}$, y los efectos $\vec{a}$ y $\vec{\alpha}$.

Se escriben de forma que se vea bien que m y I son meros factores de proporcionalidad. Yo definiría el momento de inercia así y no de otra forma.

* * *

En la línea quinta llamo «causa continuada» a la perduración en el tiempo t de los agentes $\vec{F}$ o $\vec{M}$. Por eso, las causas continuadas son: o $\vec{F}.t$ o bien $\vec{M}.t$, equivalente a la $I.\vec{\omega}$ (momento cinético). Tengo la impresión de que al alumno que comienza a estudiar estas cosas le «marea» y le confunde un tanto emplear la palabra «momento» («momento de una fuerza», «momento de inercia», «momento de un par», «momento cinético»...) para designar varias magnitudes, ni homogéneas ni correspondientes. Yo propondría llamarlas, respectivamente: «fuerza a distancia», «resistencia a la rotación» o «inercia de rotación», etc. Después de todo, en lógica gramatical (reñida tantas veces con la lógica física), la magnitud a la que corresponde verdaderamente el nombre de momento es a la $\vec{M}.t$.

* * *

En la línea sexta va el efecto que corresponde a la «causa continuada». La deducción es simplista: «Si en un instante de actuación, el efecto de $\vec{F}$ es $\vec{a}$ (o el de $\vec{M}$ es $\vec{\alpha}$), en el transcurso del tiempo t., los efectos respectivos serán: $\vec{a}.t = \vec{v}_t$ y $\vec{\alpha}.t = \vec{\omega}_t$.

* * *

La deducción de la fórmula de la línea séptima ya está provocada: «Como $\vec{F} = m.\vec{a}$, tendremos que $\vec{F}.t = m.\vec{a}.t = m.\vec{v}_t$.» Por semejante mecanismo se llega a la fórmula: $\vec{M}.t = I.\vec{\omega}_t$, aunque—y recalcando las correspondencias—a esta fórmula se puede llegar por:

$\vec{F}$ se corresponde con $\vec{M}$.
t. se corresponde con t.
m. se corresponde con I.
$\vec{v}_t$ se corresponde con $\vec{\omega}_t$.

Luego a la fórmula: $\vec{F}.t = m.\vec{v}_t$ le corresponde la fórmula: $\vec{M}.t = I.\vec{\omega}_t$.

Los desplazamientos s y Φ de la linea 8 surgen también por deducción simplista: «Los movimientos provocados y sostenidos por las «causas continuadas», por ser F y M continuos y de valor constante, según enseña la Dinámica, han de ser uniformemente variados.

Luego: $\vec{s} = \frac{1}{2}\,\vec{a}.t^2$ y $\vec{\Phi} = \frac{1}{2}\,\vec{\alpha}.t^2$.

Y si ya existieran velocidades iniciales ($\vec{v}_i$ o $\vec{\omega}_i$) cuando empiezan a actuar la $\vec{F}$ o el $\vec{M}$, los desplazamientos en el tiempo t serán:

$$\vec{s} = \vec{v}_i.t \pm \frac{1}{2}\,\vec{a}.t^2 \qquad \text{o} \qquad \vec{\Phi} = \vec{\omega}_i t \pm \frac{1}{2}\,\vec{\alpha} t^2.$$

Y si $\vec{F}$ o $\vec{M}$ se utilizan como causas «frenos» ($-\vec{F}$ o $-\vec{M}$), su efecto será negativo ($-\vec{a}$ o $-\vec{\alpha}$) y entonces:

$$\vec{v}_t = \vec{v}_i - \vec{a}.t \quad \text{y} \quad \vec{\omega}_t = \vec{\omega}_i - \vec{\alpha} t.$$

* * *

Para la deducción de las fórmulas de la linea novena me valgo del principio: «El trabajo de una fuerza sobre un cuerpo se traduce en variación de la energía cinética de ese cuerpo.»

Si al actuar la $\vec{F}$ el tiempo t sobre la masa se producen la aceleración $\vec{a}$, la velocidad $\vec{v}_t$ y el desplazamiento $\vec{s}$:

$$W = \vec{F}.\vec{s} = \vec{F}.\ \frac{1}{2}\,\vec{a}.t^2 = \frac{1}{2}\,m.\vec{a}.\vec{a}.t.t. = \frac{1}{2}\,m.\vec{v}.\vec{v}.$$

La otra fórmula la saco apurando las correspondencias:

Si m se corresponde con I,

Si $\vec{v}$ se corresponde con $\vec{\omega}$,

la fórmula $\frac{1}{2}\,m.\vec{v}.\vec{v}$. tendrá una correspondiente en la $\frac{1}{2}\,\mathrm{I}.\vec{\omega}.\vec{\omega}$.

* * *

Para terminar, e insistiendo en mi propósito, me resta decir: «Cualquier parecido de esta exposición con una lección modelo, irrefutable e inobjetable, será pura coincidencia.»