La Matemática: Importancia de su estudio y evolución de su didáctica (*)

Por JOAQUIN GARCIA RUA
(Inspector de Enseñanza Media del Estado)

I

Es un hecho general el no saber apreciar el valor de las cosas más que por las apariencias que ofrecen, por su utilidad inmediata, siendo además razones de desvalorización las mayores o menores dificultades que presentan su comprensión, y hasta la corriente de opinión que se haya creado de las mismas.

Esto es lo que ocurre, en general, con el estudio de determinadas ramas de las Ciencias. Hay otras disciplinas que son más del dominio público, pues aun cuando no todo el mundo alcance a medir ni valorar debidamente su contenido, siempre se capta algo en sus lecturas, bien en pasajes literarios, ya en relatos geográficos o históricos...

Pero en las Ciencias, y en particular en las Matemáticas, ¡qué lejos suele estarse del verdadero concepto que éstas merecen, del importante papel que desempeñan!

Con la expansión matemática, el avance científico aumenta sin cesar. La Matemática es la Ciencia pura por excelencia, indispensable instrumento de la técnica, que interviene en todas sus ramas, como elemento básico y constructor, pero además ella se desarrolla en sí misma y asienta cada vez más sus principios fundamentales. Con palabras del gran matemático polaco Tarsik, podríamos decir que la Matemática crece constantemente «en altura, en amplitud y en profundidad». El progresivo desarrollo de la Geometría diferencial, el Análisis funcional, la Geometría vectorial, la Topología, etcétera, en la época moderna, demuestran ese avance, que proporciona medios y horizontes para solucionar problemas de Mecánica que a su vez dan solución a problemas técnicos.

No hay Física, no hay Química sin Matemáticas. No hay Técnica que no se cimiente en ella. El Arte es Matemática. La Naturaleza se rige por leyes matemáticas. Decía Galileo: «El gran libro del Universo está escrito en matemáticas».

Lo que ocurre es que no todos pueden llegar a penetrar en aquello que por su misma grandeza está fuera de su alcance. Se asigna valor únicamente a los hechos, a los resultados que se apre-

(*) Trabajo presentado en la V Reunión de Matemáticos españoles.

cian directamente en forma de realidad en cualquiera de sus manifestaciones.

Pero hoy, que la expansión cultural crece sin límites, es preciso procurar que todo el mundo se dé cuenta del papel importante de la Matemática en la vida del hombre, la cual, silenciosa y ordenadamente, proporciona a la Ciencia los materiales necesarios para servir de instrumento a la Técnica, y, gracias a ella, obtener medios y comodidades incalculables.

La Naturaleza nos proporciona, en la observación de los fenómenos, los elementos. La Matemática crea entes abstractos en su sustitución, y opera con ellos, y el resultado vuelve a proyectarlo sobre la misma naturaleza, traducido en leyes. Esta es la forma de su intervención y no otra, porque tan absurdo es el concepto erróneo que el profano tiene de esta Ciencia, o mejor diríamos, el desconocimiento que tiene de su valor intrínseco y de su importancia básica para el desarrollo de la técnica, como lo era el que tenían los antiguos al pretender que las propiedades accidentales de los números constituían leyes, al considerarlas como propiedades generales, como ocurría con los pitagóricos, que veían en los números, no sólo el medio, sino el fundamentos de esas leyes.

Pero aunque las distintas civilizaciones lo hayan interpretado en una u otra forma, según su grado de cultura, es evidente, que la misma constitución del Universo implica la existencia de relaciones matemáticas, unas veces conocidas, otras apreciadas en sensaciones, otras de orden más elevado, como expresiones de la belleza, y otras desconocidas por nuestra limitada inteligencia.

¿Cómo podrá suponerse que para llegar, por ejemplo, al conocimiento profundo de las propiedades de los metales mismos, es indispensable un vasto cálculo de integrales triples y ecuaciones diferenciales, como aplica Wilson al tratar de los fenómenos caloríficos, termoeléctricos, magnéticos, etc.?

¿Cómo imaginarse, que una teoría como la que expone Hilbert sobre membranas esté desarrollada a base de series y diferenciales?

El progreso de la estructura atómica, tema de tanta actualidad, del que se quiere apreciar los fines, sin poder atisbar los medios, ¿qué base tiene sino las grandes concepciones geométricas que la Física supo captar de las ideas de Mobius y Hamilton entre otros?

Si un Staud y un Grassmann, entre otras grandes figuras, contribuyeron o moldear la Moderna Geometría, no hay que olvidar que a la par, y como consecuencia, se iba construyendo el edificio de la *Física Moderna.*

Cuando en Televisión se admira los encantos y el prodigio de su técnica, no puede adivinarse que todo es producto de cálculos y composiciones geométricas; que en esa coordinación de células fotoeléctricas y haz de electrones están ocultas, si no los recursos de la técnica, sí las teorías desarrolladas por un Clark-Maxwell, por ejemplo, y que son cimiento de esa gran obra arquitectónica de la Física aplicada.

Pero aún es más; las grandes revoluciones de la Ciencia, conmovida aparentemente por los postulados de Riemann y Lobacheski, han influido en las Ciencias Físicas, las cuales en sus aplicaciones han colocado a las Geometrías no euclídeas en un primer plano, con los estudios de Eistein sobre relatividad, al hacer uso de los espacios cuatridimensionales.

En los más recientes y actuales estudios sobre el lanzamiento de *satélites* artificiales y en general sobre los vuelos espaciales, ¿quién sino la Matemática ocupa el papel principal para establecer con toda precisión, tras complicadas fórmulas y cálculos, las condiciones para que el *satélite* alcance y recorra la órbita prefijada?

¿Qué decir de los *ordenadores electrónicos*, cuyas aplicaciones a la resolución de problemas de cálculo numérico son asombro de rapidez y precisión?

¿A qué artificios se debe la técnica de la construcción de estos *cerebros*, que permiten resolver, por ejemplo, sistemas lineales de veinte ecuaciones con veinte incógnitas, en un solo minuto, sino a los propios cálculos de la misma Matemática?

¿Quién sabe si hasta ciertas cuestiones de carácter puramente teórico, incluso alguna, como la célebre demostración que espera la Universidad de Gotinga para entregar el premio Wolfhehl, y que ya el gran Klein considera de no primordial importancia; quién sabe, repito, si de unos u otros trabajos pueden surgir ideas, teorías, concepciones que den origen a nuevos manantiales científicos?

La Matemática pura busca los fundamentos de sus proposiciones para deducir de ellas leyes que, aplicadas después a la técnica, facilite las exigencias del progreso científico.

Pero su cimentación es variable, no es de constitución estática, sino cambiable, evolutiva, y en las aplicaciones los resultados alcanzados son confirmados luego, por la misma Naturaleza, pudiendo decir en este sentido, no en el ontológico, que la Matemática investiga la verdad.

Su misma fundamentación nos dice que no es inmutable; un prestigioso autor moderno, el profesor Vidal Abascal, decía, recordando una frase del profesor Rodríguez Bachiller, que cada vez queda más demostrado que la Matemática se está «inventando» constantemente.

Precisamente esa postulación variable y convencional de sus principios hizo decir con ironía a Rossell: «La Matemática es una ciencia en la que nunca se sabe de lo que se habla, ni si lo que se dice es verdadero».

La importancia de la Matemáticas no ha sido jamás discutida más que por aquellos que fracasaron en su intento de asimilación, o por los que, continuando con una venda en los ojos, no llegan a apreciar el verdadero valor de su desarrollo ni la función que desempeñan.

Un ilustre catedrático de Fisiología de nuestra Universidad decía hace poco: «Sólo un claro desconocimiento de lo que es la ciencia actual puede producir asombro ante la afirmación de que la Física, la Química y las *Matemáticas* son necesarias para el estudio de los fenómenos vitales».

Criterio tan general es éste que hasta en recientes Congresos internacionales se recomienda la inserción de esta disciplina en los programas de los dos Bachilleratos, es decir, no solamente en el de Ciencias, sino también en el de Letras, teniendo en cuenta su valor formativo y la utilidad de su conocimiento.

Porque la importancia del estudio de la matemática no es solamente desde el punto de vista utilitario, como armazón del edificio científico, sino por el valor formático que encierra la enseñanza, que sin negar el de otras disciplinas, es por su propia constitución el medio más eficaz para conseguir un progresivo y profundo desarrollo intelectual.

Justificada queda la necesidad de ampliar el radio de acción en el estudio de esta Ciencia, *intensificándolo* para unos, para conseguir buenos matemáticos, *extendiéndolo* para otros, para aprovechar los valores que su contenido encierra, y *divulgando* el proceso de sus aplicaciones para el resto como elemento primordial de cultura.

En España no podemos hablar de «Leyendas rosas», como dijo el eminente matemático español Rey Pastor, pionero de la Matemática actual en nuestra patria, pero es evidente también que, aunque en minoría, no estamos exentos de contar con algunos que, como Torres Quevedo representando la matemática aplicada, y Torroja Caballé la matemática pura, entre nosotros, contribuyeron con sus trabajos a impulsar el modesto desarrollo hispánico de esta ciencia durante la edad moderna. Pero además nuestros matemáticos contemporáneos y el plantel de jóvenes iniciados con que hoy contamos nos prometen un futuro altamente halagüeño en calidad, aunque no lo sea en cantidad, para la Ciencia Matemática española.

Por esto debe ser preocupación constante el encauzar la enseñanza de la juventud de modo que aprovechando el enorme caudal de su energía intelectual, pueda llegarse a obtener en el futuro el máximo rendimiento de una generación que, como la presente, está siempre dispuesta y preparada para dar por España su trabajo y su vida, no sólo en los momentos bélicos, sino también en el silencioso batallar de un seminario o un laboratorio.

Cierto es que en lo que a la Matemática se refiere ha sido siempre y es más difícil, dada la índole de la disciplina, conseguir atraer a los estudiosos, algunos de los cuales, distanciados de ella por su aparente aridez, tal vez hubieran sido entusiastas matemáticos si hubieran llegado a saborear con mieles las primeras nociones de esta ciencia, que se le presentaron, por el contrario, cuajadas de acíbar.

Es preciso buscar el estímulo, promover la inclinación al estudio e investigación en esta disciplina, despertar vocaciones..., ¡que con vocación y constancia se alcanza siempre el triunfo en cualquier empresa! Recordemos, y sírvanos de ejemplo, la labor constante de los célebres «lanternistes», de ese grupo de estudiosos, fundadores de la *Societé de Sciences*, de Toulouse, que bajo la divisa de «Lucerna in nocte» atravesaban todas las noches las tortuosas calles de la ciudad, amparándose con sus linternas, hasta poder llegar al hotel donde tenían sus sesiones, donde se reunían para investigar y celebrar sus coloquios científicos, fomentando con su ejemplo esta afición, hasta conseguir en 1800 convertir la primitiva Societé en la hoy *Académie de Sciences.*

Por eso es necesario una Metodología racional, con la que conseguir despertar el interés y la curiosidad, avivar el ingenio y ejercitar la inteligencia.

II

Los problemas inherentes a la enseñanza es natural que ocupen papel principal en una nación. Son problemas vividos por la mayoría del país, y es lógico, y hasta conveniente, que todos se interesen en los mismos, pero esto llevo consigo al propio tiempo el peligro de que muchas de esas intervenciones carecen de base suficiente para enjuiciar, o bien son interesadas por razones de índole muy diversa.

Entre estas cuestiones ocupa siempre lugar preferente el estudio de la Matemática. Si hacemos historia retrospectiva de este problema tan sólo en lo que va de siglo, o recordamos las reformas en este sentido realizadas en el extranjero, en la misma Francia, por ejemplo, o los acuerdos tomados en las distintas reuniones internacionales sobre enseñanza media, observamos que ocupa siempre lugar destacado la preocupación por la enseñanza de la Matemática.

Para la mayoría, sabemos se presenta esta materia como el principal escollo en sus estudios. La dificultad en su asimilación es tan corriente, que en algunos llega a crear animosidad hacia esta disciplina, y la realidad es que los resultados desfavorables, en general, en exámenes y pruebas, lo muestra la estadística. ¿Cuál es la causa de este panorama?

No es nuevo el problema, y de él se ha tratado muchas veces, pero por su importancia es preciso insistir ante los futuros profesores.

Ya sabemos que entre las diversas intervenciones de que antes hablábamos hay opiniones para todos los gustos. Hay voces que claman: ¡Temas difíciles!; otras, ¡dureza en la calificaciones!, etc., etc., pretendiendo todos ellos dar con el origen de esas anomalías. Hasta algunos alegan muchas veces que el alumno tiene que atender excesivas materias y a demasiados exámenes, pero como indicaba en cierta ocasión un conocido pedagago, no siempre esto puede reducirse, pues no hay que olvidar los *deberes* del educador y las obligaciones y derechos de los *educandos.*

Ni los temas, ni la idoneidad en la lectura de ejercicios, ni la amplitud de las puntuaciones resolverá el problema. Cuantos profesores se han ocupado de ello, entre ellos destacadamente el que fue mi querido y admirado amigo, el profesor Puig Adam, han coincidido en lo mismo: que el problema no tiene solución mientras no sea una realidad la enseñanza de las matemáticas. Y esto que se ha dicho mil veces es la única razón de las dificultades en el estudio de esta disciplina.

La Matemática, por sí, decía un ilustre profesor, es *ciencia difícil por su propia naturaleza,* pero es cierto también que, dentro del marco que corresponde a la enseñanza media, podemos decir que cualquier alumno, sea cual fuere su capacidad intelectual, puede adentrarse en ella, comprendiéndola y hasta encariñándose con sus estudios, derribando para siempre ese tenebroso muro de recelo levantado injustamente ante el estudio de esta disciplina, calificada por Gauss de «reina de las ciencias».

Enseñar matemáticas es enseñar a pensar, a razonar debidamente, a aclarar juicios, a ordenar ideas. Realmente su valor formativo está en esto, en ser una de las disciplinas en que no es posible avanzar con éxito si no entra en juego la inteligencia.

Muy acertadamente, como corresponde a la clara visión científica y didáctica que sobre estos problemas tiene, el profesor Cuesta Dutari insiste sobre este aspecto en reciente artículo publicado

Desde el ingreso en el Bachillerato, que quizá sería conveniente no hacerse antes de los 11 ó 12 años, al alumno hay que comenzar a enseñarle a observar; presentarle situaciones concretas, para sobre ellas buscar sugerencias, y utilizando la intuición ir deduciendo consecuencias; intuición utilizada no en el sentido platónico, sino interviniendo el alumno, en lo posible, en la confección de las figuras o material que necesite, pero bien entendido que esa intuición ha de ser, en la mayor parte de los casos, intuición dirigida. La ilustre profesora Castellnuovo cita en algunos de sus escritos ejemplos conocidos, en el que no es fácil que por intuición, en alumnos de esa edad, se llegue al resultado deseado si no se les orienta.

Ese poder de llegar a concebir con claridad las propiedades, que incluso por sí puede ir descubriendo, esa toma de conciencia, no sólo su conocimiento, con los conceptos y relaciones matemáticas, es decir, con los hechos de esta índole que se les presente, constituye el adiestramiento en el campo de la matemática, y hasta en muchos casos el principio del entusiasmo por su estudio.

Conforme se vaya presentando la ocasión y el grado de mentalidad lo permita se irá prescindiendo de las cualidades específicas de cada caso, para buscar generalizaciones, precisar conceptos e irles acostumbrando a la abstracción, es decir, a concentrar su pensamiento únicamente en algunas de las cualidades o relaciones de aquello que observa en las representaciones dadas, sean objetos, conceptos o propiedades.

Una forma abreviada de representar lo más saliente de un elemento o de una relación entre ellos es el *esquema,* que algunos introducen, siguiendo a Kant, entre el concepto abstracto y la imagen concreta, y del que tenemos ejemplo, en general, en el simbolismo matemático. De él dice el profesor Servais: «En el esquema no se trata de una abstracción de un concepto a partir de una representación, sino de una realización de un concepto abstracto en una representación». Es decir, que estos conceptos de abstracto y concreto hay que concebirlos y manejarlos con el estricto sentido que tienen, pues, como dice Gonseth, existen entre ellos «relaciones bien definidas».

La clase no es una conferencia, es una enseñanza activa donde el alumno participa con el profesor en el desarrollo de la misma. En una parte de ella debe tener preponderancia la actividad del profesor, en otra la actividad del alumno, ambos en la medida adecuada a cada situación y a cada caso. El objeto no es tranmitir, sino iniciar una actividad matemática.

Un buen profesor sabe administrar esta actuación debidamente;

ni antes ni ahora, se le ha ocurrido a un profesor «entregado» a sus alumnos, ni dar una conferencia a los de primer curso, ni entretenerles con «regletas» a los de los últimos cursos del bachillerato. La ponderación y el interés resuelve todas las dificultades.

Al alumno hay que acostumbrarle a que piense sobre lo que dice, que dé sentido a sus propias ideas expuestas en la forma que considere más natural y corregidos sus errores por el profesor, o bien por él mismo ante la hábil intervención de otros.

La parte práctica debe ir asociada a la teoría y prsentada en situaciones reales, que permitan apreciar relaciones no captadas durante la exposición de ésta, contribuyendo así a acrecentar el valor formativo de estos ejercicios. Habrán de buscarse ejemplos apropiados a las materias de que se trate y que aumente la curiosidad del alumno, con lo cual podrá conseguirse más fácilmente su afición a estos estudios, y así irle acostumbrando a percibir con claridad todas estas cuestiones y a presentarlas con el simbolismo adecuado, con la elegancia y concisión debida, que son características de este eficaz instrumento de trabajos que es la Matemática.

Pero aun cuando es evidente que en la didáctica de una disciplina tiene mucha importancia la personalidad y estilo propio de cada profesor, es cierto también que en ello intervienen varios factores, y entre ellos está el científico y el medio en que se desenvuelve.

Respecto al primero, a nadie se le oculta, y venimos recordándolo en líneas anteriores, la constante evolución de la Matemática, que obliga a pensar en la nueva orientación de su enseñanza.

Palpitante está el ensayo en todos los países de la introducción de los nuevos métodos de estructurar la matemática, que gracias a las doctrinas de un Gauss, Gallois, Cauchy, Hilbert..., entre otros, en el siglo XIX, plasmó en la primera década del actual en los trabajos de Steinitz sobre la «Teoría algebraica de los cuerpos», de donde podemos decir que arrancan estas nuevas orientaciones de la Matemática.

«Sus teorías —dice el profesor Delachet— «son multivalentes», y es en esta multivalencia donde reside probablemente uno de los caracteres específicos de la Matemática Moderna.»

Pero lo cierto es que el impulso de ese admirable grupo de matemáticos franceses que constituye el movimiento bourbaquista, ha servido para renovar la conciencia de todos los profesionales al preocuparse de estudiar las ventajas de esas nuevas estructuras que pueden dar al alumno una mejor orientación, claridad y hasta sencillez en el estudio de la Matemática, con lo que pueda obtener una más completa formación en esta disciplina.

Ahora bien, como el estudio de estas estructuras, base de la Matemática moderna, constituyen en realidad una segunda abtracción, se presenta el problema de saber cómo y cuándo deben tratarse, lo que ya origina divisiones de criterio entre los más distinguidos matemáticos. El mismo profesor Dieudonnë, que, como es lógico, proclama la excelsitud de este nuevo método, dice: «Considero que es preciso que antes de manjar estas estructuras conozcan la Matemática clásica».

La inspección de este grado medio de enseñanza, en la Gran Bretaña, ha presentado un informe sobre el estudio de las disciplinas científicas, en el que juzgan que los estudios abstractos son inadecuados hasta no alcanzar los quince años.

Para la formación deseada —dicen en le referido informe— contribuirá la Ciencia de dos formas: proponiendo conocimientos del mundo físico y enseñando a pensar objetivamente. Esto último depende de los métodos de enseñanza que se emplee.

Su consejo es que deben cortarse los errores de métodos pedagógicos pasados; pero, como ocurre en todo movimiento de reforma, hay que tener cuidado para, simultáneamente, no disminuir lo bueno que puedan tener aquéllos. Bien entendido, agregan, que «la Ciencia debe ocupar un lugar destacado en la formación de los alumnos, sin pretender hacer de cada uno de ellos un futuro científico».

El destacado psicólogo doctor Cerdá dice en uno de sus trabajos sobre Psicología aplicada, que alrededor de los quince años aparecen en el alumno «nuevas estructuras lógicas, mediante las cuales es posible llegar a soluciones que necesitan la puesta en marcha de esquemas operarios formales».

El profesor Sebastiao e Silva, que expresa estar de acuerdo con la introducción en la enseñanza media del espíritu de la Matemática moderna, no sólo por su mejor formación, sino por la natural articulación con la enseñanza universitaria, presenta sin embargo ciertas reservas: «Nos parece que esas innovaciones deben ser ejecutadas con extrema prudencia y con el más fino tacto pedagógico si no se quiere crear en los alumnos una repulsión invencible hacia las Matemáticas», y agrega: «La moderna orientación abstracta de la Matemática es una espada de dos filos, según el uso que de ella se haga: ella puede dar a la enseñanza mucho más atractivo y mucha más eficacia; pero, mal aplicada, puede también conducir a resultados poco más o menos opuestos».

En España, la Comisión Oficial que desde 1961 viene dirigiendo este ensayo, en contacto con la O. C. D. E. y presidido por el profesor Abellanas, que con gran interés viene preocupándose de estos problemas, comenzó por hacerlo a partir del 5.° curso, es decir, en el Bachillerato Superior, sin decir nada en pro ni en contra del éxito hasta obtener los datos necesarios de los resultados obtenidos, y sin perjuicio de la extensión del ensayo a cursos anterior si así se dedujese de estas conclusiones. Pero aun así, con este intento de nueva estructuración, hecho con paso firme, pero sin precipitaciones ni alarde de novedades, si el proceso de su estudio no es a base de aprender profundamente a discurrir con lógica haciendo esa gimnasia intelectual que caracteriza la formación en estos estudios, nada práctico se conseguiría. Además, no hay que olvidar que estos alumnos no pueden dejar de conocer las lecciones de aplicaciones insertas en los programas actuales, necesarias para su mejor desenvolvimiento en la vida.

Programas no exagerados, sin querer acumular en ellos más materias de las precisas; no se trata de preparar especialistas, sino conseguir la completa formación humana del alumno.

Las recientes conclusiones del último Congreso Internacional de Atenas confirman, tanto por la marcha seguida con las cátedras-piloto cuanto por los programas confeccionados para los cursos de ese Bachillerato Superior, el acierto del enfoque y desarrollo del ensayo que el C. O. D. realiza a través de la referida Comisión.

Pero, además, señalábamos que otro de los factores que intervienen en la didáctica a emplear es el medio en que se desenvuelve el profesor, y es a todas luces evidente que hoy todo problema de enseñanza media es problema de masas, y por consiguiente los alumnos acuden muy distintamente ambientados por proceder, lícitamente, de todas las capas sociales; ambientes no todos igualmente propicios al desarrollo intelectual, ni a la posibilidad de emplear en sus casas libros y otros medios útiles para el estudio, y ello obliga también a la necesidad de buscar otros métodos didácticos que permitan dar más fluidez a la exposición de los programas, para conseguir suprimir lo superfluo, y sintetizar con las nuevas estructuras el contenido de los cuestionarios, consiguiendo con ello, al propio tiempo, la mejor formación posible.

Por todo esto, más que nunca son también convenientes las actividades complementarias como se realizan en diversos países; la enseñanza de la Matemática dentro de este plan racional y metódico debe completarse, como la de cualquier otra ciencia, con algunas ideas sobre el desenvolvimiento de la misma a través del tiempo. Poco importa que la historia de la Ciencia no esté hecha; ella se irá formando con las sucesivas aportaciones del investigador; para nuestros fines, sólo es preciso un ligero bosquejo de la misma, que permita relacionar y situar en su debida época a las figuras o hechos fundamentales de que se trate.

Acertadamente decía Puig Adam: «Muchas veces el planteamiento retrospectivo de una situación matemática es de gran eficacia formativa, porque permite revivir la génesis histórica del conocimiento que se desea inculcar».

No basta en la enseñanza, con la exposición programática de una disciplina, es preciso además una visión de conjunto, que permita jalonar el desarrollo de la misma, sentando ideas, aclarando dudas, ampliando conceptos y tomando datos que contribuyan a fijar debidamente los conocimientos adquiridos y aumentar la cultura científica correspondiente.

Conviene, pues, que el futuro profesorado tenga en cuenta la importancia que encierra el modo de enseñar esta Ciencia, para conseguir hacer lo más asequible posible estos estudios a la juventud, de modo que los comiencen sin prejuicios, hasta conseguir enfrentarse con ellos con entusiasmo, pensando además que las nuevas generaciones son las llamadas a resolver los muchos problemas que el avance incesante de la técnica les presentará, y en los que la principal herramienta de trabajo es siempre la Matemática.

III

No basta con esta preocupación por los métodos a desarrollar en la enseñanza de la Matemática, sino que además hay que investigar sobre los resultados obtenidos, observar las deficiencias más generalmente presentadas, mediar la capacidad de las alumnos ante los programas explicados y estudiar los rendimientos conseguidos

Las pruebas objetivas son un medio eficaz para conseguirlo. Los *tests*, muy usados en distintos países, empleados frecuentemente en Estados Unidos y aconsejado su uso en las conclusiones de los distintos congresos matemáticos y reuniones internacionales de esta disciplina para el grado medio, empleados hábilmente, con una acertada selección de temas, no sólo nos puede dar a conocer los datos precisos para conseguir una calificación orientadora del aprovechamiento del alumno, sino que realizados con relativa frecuencia, trimestralmente por ejemplo, pueden llegar hasta evitar la realización de determinadas pruebas finales.

Es evidente que su valor no puede considerarse decisivo, única prueba para un examen; ha de ser un complemento de la observación directa del profesor. Es decir, interesa ir jalonando el camino de la preparación, con algunas pruebas, que acusan los aciertos o errores en las directrices marcadas con los métodos empleados, para si es preciso modificarlas en el sentido necesario, ya que, como dijimos anteriormente, son varios los factores que intervienen en la didáctica más apropiada a emplear en los distintos casos.

Hay, como es sabido muy diversas clases de *tests* empleados en la enseñanza, pero son objeto de nuestro estudio únicamente aquellos *tests* de *inteligencia,* que con variedad de tipo en sus preguntas permitan descriminación por sus contestaciones, de capacidad y aprovechamiento del alumno y de rendimiento obtenido con relación al esfuerzo y método empleado.

El *test,* una vez interpretado el resultado de su calificación numérica, es un excelente elemento de juicio que completa el que se tenga formado por otros medios más o menos directos.

Conviene en estos *tests* presentarle al alumno distintas clases o grupos de preguntas: unas, en donde brevemente pueda demostrar el conocimiento que tiene sobre lo que se pregunta o se propone; otras, en donde estando sin completar una fórmula o proposición, piense y escriba lo que falta por poner; un tercer tipo de ellas ante las que el alumno ha de observar si lo allí expresado es cierto o falso, y finalmente una cuarta clase de preguntas, a las que previamente se le dan varias respuestas para que él pueda elegir la que considere más acertada.

Aún podría agregarse otras encaminadas a dibujar ciertas figuras donde poder apreciar detalles de precisión, pero consideramos que puede incluirse en el primero de los tipos citados.

Obsérvese que con los del grupo tercero se acostumbra al alumno a pensar razonadamente sobre lo que lee o lo que realiza, es decir, se crea en él espíritu de crítica y autocrítica razonada, dando pie al profesor para que, relacionado con estas cuestiones, pueda en el momento oportuno proponerles investiguen dónde están los errores de algunas de las clásicas paradojas matemáticas.

Asimismo, las preguntas del cuarto tipo son un tipo de cuestiones de examen empleados por algunos países, como en la High School, de la Asociación Matemática de América, cuyo conjunto puede verse en la recopilación de Salkind, en donde la variedad de soluciones dadas tiene la ventaja de encaminar al alumno hacia distintas soluciones, ayudándole en su investigación y evitándole posibles desorientaciones.

Presentamos a continuación un posible modelo de estos *tests,* empleado por el que suscribe, con resultados positivos, y únicamente insertando entre sus preguntas algunas otras de distintos *tests* propuestos con el mismo fin por otros autores.

El modelo debe darse impreso, figurando en su cabecera el curso, examen, nombre y apellidos, y debajo unas instrucciones, y a continuación el cuestionario, con unas diez preguntas en cada grupo, dependiendo, claro es, el número mayor o menor, del tiempo que se les conceda para la contestación.

INSTRUCCIONES

1.ª Encontrará en este cuestionario cuatro clases de temas: unos en forma de preguntas; otros sin terminar de contestar; otros contestados, y, finalmente, otras preguntas, dando a ellas varias soluciones.

2.ª En los primeros, exponga dentro del espacio disponible lo que conozca sobre este tema.

3.ª En las segundas escriba en los espacios punteados lo que juzgue que falta por poner.

4.ª Para el tercer grupo, examine usted con atención su contenido, fijándose en si éste es cierto o falso. Si lo expuesto es cierto y demostrable, demuéstrelo, y si no lo es, indique el error del enunciado.

Escriba el signo + delante de los números correspondientes a los temas *ciertos* y el — delante de los que sean *falsos;* y

5.ª En el último grupo basta que subraye usted aquella respuesta que considere es la apropiada, y de no estimar ninguna como tal, dé usted la verdadera.

CUESTIONARIO A

1.—¿Cómo se hallan los máximos y mínimos relativos de una función?
2.—¿Qué son figuras equivalentes?
3.—¿En qué propiedad de las combinaciones se funda el triángulo de Pascal?
4.—¿Qué representa e^{ix}, siendo x función del tiempo?

CUESTIONARIO B

1.—Si la probabilidad de un suceso es 1/3 y el número de casos posibles es 27, el número de casos favorables es ......
2.—El teorema de Euler relativo a los poliedros convexos es una relación entre aristas, caras y vértices, que dice: $C - 2 =$ ......
3.—La suma de los 50 primeros números pares es igual a ......
4.—La expresión $x^2 + y^2$ es equivalente al producto de los dos binomios ...... y ......

CUESTIONARIO C

1.—Como $\operatorname{tg} 45° = 1$ y $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, la $\operatorname{tg}(105) = 1 + \sqrt{3}$.
2.—La ecuación canónica de una elipse cuyo eje mayor mide 20 cm. y su distancia focal es 12 cm., es:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

3.—Al duplicarse los lados de un rectángulo queda cuadruplicada su área.
4.—Para determinado valor de a puede deducirse que $\lg \cos a = 1{,}234538$.

CUESTIONARIO D

1.—La derivada de $y = a^x$:

a) es a^x;
b) es xa^{x-1};
c) es $a^x \cdot 1a$;
d) es $\dfrac{a^x}{1a}$.

2.—Si dos rectas no tienen ningún punto común:

a) se cruzan;
b) son coplanarias;
c) son paralelas;
d) se cortan.

3.—Si el $\lg_{10}(x^2 - 3x + 6) = 1$, el valor de x es:

a) 10 ó 2;
b) 4 ó —2;
c) 3 ó —1;
d) 4 ó —1.

4.—El límite de $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, para $x \to 1$, es:

a) 0;
b) indeterminado;
c) 2;
d) $x - 1$.

Estas cuestiones no se refieren a un curso determinado, sino que van mezcladas, como muestra simplemente de su forma, aunque obedeciendo a la clasificación fijada.

Piensen los futuros profesores, para los que van dirigidas estas notas, sobre las consideraciones hechas acerca del tema propuesto, y no olviden que no será estéril todo el esfuerzo que realicen para formar nuevos matemáticos, pues es problema vital, no solamente en España, sino en todo el mundo, la escasez de este profesorado. Sencillamente, el conseguir interesar al alumno en el estudio de esta disciplina, presentándole situaciones y ejercicios apropiados, será simiente fructífera, pues podremos decir con Polya «Que esta clase de experiencias a cierta edad pueden determinar el agrado del trabajo intelectual y dejar, tanto en el espíritu como en el carácter, impronta que durará toda la vida».