Metodología

PROGRAMACION LINEAL EN LA ENSEÑANZA MEDIA

Por ANTONIO FERNANDEZ DE TROCÓNIZ
(Catedrático de Matemáticas del Instituto Femenino de Bilbao)

El día 21 de junio del año pasado, D. Julio Rey Pastor ocupaba la tribuna de la Academia para pronunciar el discurso de contestación al Prof. D. Sixto Ríos, que ingresaba en la docta Corporación. Sus primeras palabras fueron cálido y respetuoso recuerdo para sus compañeros de Corporación Alvarez Ude, Puig Adam, González Quijano y Velasco de Pando, recientemente fallecidos. ¡Qué difícil era imaginar que en plazo tan breve iba a efectuar su tránsito el insigne y querido maestro de tantas generaciones! Juntamente con nuestra oración le dedicamos nuestro más cariñoso homenaje.

En el mismo acto pronunciaba el maestro las siguientes palabras: «Pasó ya, quizá para no volver, la hora del Algebra que se llamó moderna, tejido de definiciones que pusieron orden entre los algoritmos aritméticos clasificando sus estructuras y denominándolas.»

Como es lógico, en el plano de las Enseñanzas Medias los relojes han caminado más lentos. En diversos países—actualmente en España—se han realizado ensayos de ordenación y estructuración de los programas con el espíritu de los nuevos tiempos, siendo discordantes los resultados obtenidos. Cualquier esfuerzo editorial o ensayo experimental que tienda a esclarecer el momento más adecuado y la base conveniente para la introducción de los métodos del Algebra Moderna en nuestras Enseñanzas Medias será una efectiva aportación a la didáctica.

El mismo día se refería el Prof. Rey Pastor a los acuciantes problemas que la técnica, la medicina y las restantes ciencias sociales plantean a las Matemáticas de aplicación, y enumeraba un conjunto de algoritmos que deben conocerse a fondo y manejarse con soltura para poder dar solución efectiva, exacta o aproximada, a los problemas de aquellas ciencias.

Parece natural que, sin dejar de lado las cuestiones doctrinales o de sistematización, debemos presentar a los estudiantes del Bachillerato el estado de inquietud a que se refería el querido maestro y que últimamente ha motivado la creación de Institutos de Cálculo, Sociedades de Investigación Operativa y otras entidades para el desarrollo y cultivo de la Matemática aplicada.

Entre los problemas de investigación operativa, y como más simples los de programación lineal, hay ejercicios de suficiente sencillez que pueden ser incluidos entre las cuestiones prácticas que se simultanean con el estudio de la Geometría Analítica de la línea recta.

La mayor parte de las decisiones diarias sobre cuestiones de carácter práctico se relacionan con variables o parámetros ligados por acotaciones o desigualdades: nuestro nivel de vida requiere unos ingresos *no inferiores* a determinada cifra. Esta cifra de ingresos *acota superiormente* la cuantía de los capítulos de nuestro presupuesto familiar, entre los cuales figura la manutención. Nuestro régimen alimenticio deberá proporcionarnos un número de calorías *superior* a una cota mínima determinada por el metabolismo personal.

Es cierto que gran parte de estas cuestiones se resuelven por una estrategia dictada por la intuición, que generalmente conduce a un punto de equilibrio que, si no cumple las condiciones óptimas, por lo menos satisface las exigencias vitales.

Las ciencias sociales y la industria presentan a menudo problemas entre variables ligadas de modos muy diversos. También aquí, hasta hace pocos años, se actuaba según los dictados de la intuición de un estratega iluminado. Seguramente que en la mayoría de los casos podrían haberse hallado soluciones mejores, pero el estado de la técnica de cálculo numérico impidió aplicar los métodos que actualmente se imponen en todos los órdenes de la vida. Los modernos calculadores resuelven en contados minutos sistemas de centenares de ecuaciones entre cientos de incógnitas. Un estudio realizado por dos ingenieros de nuestro país vecino para «L'Electricité de France», con vistas a la instalación de centrales productoras de energía eléctrica, utilizan un modelo matemático de 229 inecuaciones simultáneas entre 265 incógnitas. Las cuestiones derivadas del abastecimiento de Berlín a través del pasillo aéreo fueron tratadas matemáticamente según los métodos de la programación lineal.

La resolución de inecuaciones y sistemas por métodos gráficos proporciona motivos de discusión y razonamiento lógico sobre soportes intuitivos concretos que imponen operaciones de tanteo, selección de casos significativos, estudio de clases, etc., y originan procesos lógicos de gran valor formativo. Estos valores se acrecientan si el problema se relaciona con casos auténticos que permitan advertir su finalidad y utilidad real.

En esta nota, sin afán de originalidad, presentamos dos casos sencillos de programación lineal que estimamos adecuados para nuestros alumnos de Bachillerato. Su resolución permitirá vislumbrar horizontes del teatro de las acciones de estrategia de los rectores de nuestras sociedades.

EJEMPLO 1.—En un taller se producen objetos de dos clases: X e Y. Cada uno de estos objetos de arte es moldeado por un modelista, M, pintado por un pintor, P, y decorado por un decorador, D.

El número de horas semestrales que estos operarios pueden trabajar en el taller no debe exceder de 980, 540 y 800, respectivamente, es decir:

$$t_M \leqq 980\,, \qquad t_P \leqq 540\,, \qquad t_D \leqq 800\,.$$

La duración, también en horas, de los trabajos de moldeado, pintura y decoración, en cada uno de los ejemplares X, Y, aparece en el cuadro:

	M	P	D
X	7	6	10
Y	14	6	5

En él se advierte, por ejemplo, que un objeto, Y, lleva catorce horas de modelado.

Los beneficios que producen las ventas son:

3.000 ptas. por cada ejemplar X
2.000 ptas. por cada ejemplar Y

Se desea organizar la producción semestral dentro de las convenciones anteriores, de modo que el beneficio sea máximo.

Solución:

Si x, y, designan los números de ejemplares de los tipos X, Y, que se fabrican semestralmente, entre las variables anteriores, y b (beneficio total en pesetas), se verificarán las siguientes relaciones:

$$3.000\,x + 2.000\,y = b \qquad [1]$$

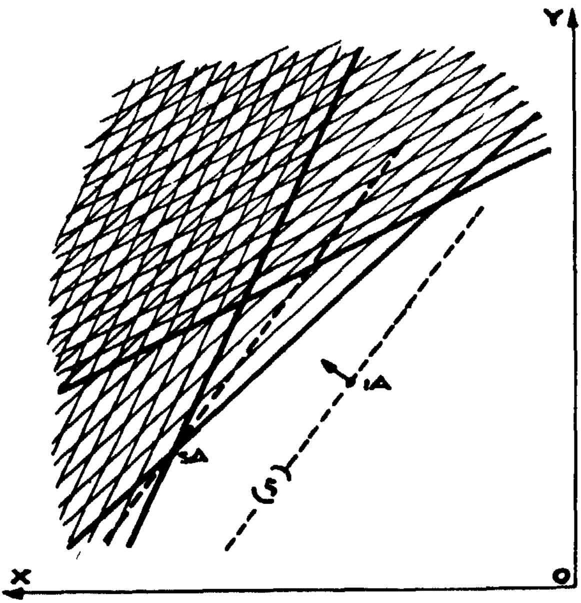
$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqq x \\ 0 \leqq y \\ 7x + 14y \leqq 980 \\ 6x + 6y \leqq 540 \\ 10x + 5y \leqq 800 \end{array}\right\} \qquad [2]$$

Este conjunto de relaciones [1] y [2] constituye el modelo matemático del problema propuesto. Actualmente están completamente estudiados los modelos correspondientes a ciertos tipos de problemas que se presentan con frecuencia. Uno de ellos—de gran actualidad—, relacionado con los tiempos de espera, ha dado lugar a la «teoría de las colas», de indudable y extraordinario interés económico.

El problema propuesto más arriba quedará resuelto si hallamos los valores de x, y, que maximizan b y satisfacen las inecuaciones [2].

Los problemas sobre máximos y mínimos absolutos, como el que nos ocupa, se resuelven generalmente sin el auxilio del cálculo diferencial, ya que las soluciones se presentan en las fronteras y no cumplen el requisito de anulación de las derivadas.

Como en nuestro problema el número de incógnitas (x, y) es dos, se puede utilizar la interpretación de las condiciones [1] y [2] en un plano cartesiano para facilitar el estudio.



Para ello (véase figura) se han de representar las rectas

$$\begin{aligned} 7x + 14y &= 980 \\ 6x + 6y &= 540 \\ 10x + 5y &= 800 \end{aligned}$$

Cada una de estas rectas determina dos semiplanos. Tres de estos semiplanos—los rayados en el dibujo—deben ser eliminados, pues las coordenadas de los puntos contenidos en ellos no cumplen las inecuaciones [2]. La solución ha de pertenecer a la parte no rayada en el primer cuadrante.

La ecuación [1] para diferentes valores de b corresponde a un haz de rectas paralelas a la (r) representada en el dibujo. A las rectas de este haz vamos a darles el nombre de rectas *equirrentables*, pues todos los puntos situados en una recta corresponden a soluciones que producen idéntico beneficio. Al pasar de una recta equirrentable a otra el beneficio aumentará cuando aquélla se aleje del origen en sentido de la flecha, conservándose paralela a sí misma.

Esto nos hace ver que el punto óptimo de producción no puede ser uno como el A_1, interior al recinto sin rayar, pues al desplazarse en el sentido de la flecha pasa a posiciones de mayor beneficio. El mismo razonamiento prueba que el punto más conveniente es el A_2, por el que pasa la recta equirrentable más alejada del origen. Las coordenadas de A_2

$$x = 70, \quad y = 20,$$

calculadas analítica o gráficamente, proporcionan el siguiente plan de producción para un semestre:

Previsiones de fabricación: 70 ejemp. X y 20 ejemp. Y
Tiempo de moldeado: 770 horas
Tiempo de pintura: 540 horas
Tiempo de decoración: 800 horas
Beneficio: 250.000 ptas.

Compruebe el lector que cualquier otra solución resulta menos beneficiosa.

De igual modo se resuelve el siguiente interesante problema tomado de la obra de KAUFMAN, *Méthodes et modèles de la recherche operationelle*.

EJEMPLO 2.—La alimentación de cierta clase de animales debe contener obligatoriamente cuatro clases de componentes nutritivos, A, B, C, D, acotados del siguiente modo:

Ración diaria de A: 400 gr.
Ración diaria de B: 600 gr.
Ración diaria de C: 2.000 gr.
Ración diaria de D: 1.700 gr.

En el mercado se venden dos clases de alimentos, M y N, cuyos precios respectivos son 10 pesetas y 4 pesetas el kilogramo, y cuya composición se resume en el siguiente cuadro:

	A	B	C	D
M	100	0	100	200
N	0	100	200	100

Dejamos que el lector halle la alimentación racional más económica que puede obtenerse mezclando en proporciones convenientes los alimentos M y N disponibles en el mercado.

Con intención hemos seleccionado estos casos sencillos de fácil interpretación en un espacio de dos dimensiones. Los problemas que plantean las ciencias sociales o los procesos de fabricación son extraordinariamente más complejos. En el proceso de fabricación del ejemplo 1 hemos omitido la consideración de los salarios de los artesanos y el número de operaciones del proceso se ha reducido a tres, pero cuando éstas aumentan se establecen diversas primas para los devengos en horas normales y extraordinarias y se tienen en cuenta otras circunstancias limitativas, el número de ecuaciones e incógnitas crece de modo extraordinario. Entonces se hace imposible una interpretación intuitiva en los espacios cartesianos usuales. Para estos casos se han ideado diversos procedimientos; sin embargo, la labor del hombre se reduce a preparar el programa de trabajo que el calculador o cerebro electrónico se encarga de realizar en un tiempo muy reducido.