MATEMATICAS

FUNCIONES
DE VARIABLES CONCRETAS

Por JOSE OÑATE GUILLEN,
Doctor en Ciencias y Catedrático

IDEA PRELIMINAR

Sea D una variable cuyos valores son las longitudes concretas; y sea T otra variable, cuyos valores son los tiempos; si D y T son variables independientes, su producto y su cociente, que podemos llamar P y Q:

$$P = D \cdot T \qquad [1] \qquad\qquad Q = D/T = D \cdot T^{-1} \qquad [2]$$

son funciones de dos variables concretas.

Más en general: si A, B y C son variables concretas independientes; **k** es un número real, no nulo, y **m. n. p,** son números reales cualesquiera, la siguiente expresión monomia, que podemos llamar Z:

$$Z = k \cdot A^m \cdot B^n \cdot C^p \qquad [3]$$

es, en general, una función de variables concretas.

No conocemos ningún estudio sistemático de estas funciones, y la experiencia nos ha enseñado que si se pregunta a cualquier matemático o físico el significado del producto: metro × segundo; o del cociente: metro/segundo, lo probable es que diga que el producto no significa nada, y que el cociente significa la velocidad de un metro por segundo.

Nos proponemos aquí exponer una teoría rigurosa de estas funciones. Con ello se obtiene la **clave aclaratoria** de los numerosos confusionismos que hay en las fórmulas de Física, como por ejemplo, el significado de las **constantes universales**, que tanto preocupan a físicos de nota, según puede verse en un tratado sobre «las magnitudes y unidades de la Física» de Julio Palacios, en el que dice:

«Las constantes propiamente universales tienen un carácter desconcertante. No son atributos de cada cuerpo, variables con las circunstancias, lo cual hace que sea imposible realizar un patrón convencional que sirva de unidad... Estas paradógicas apariencias de las constantes universales nos han dado mucho que pensar...»

Para que se tenga alguna idea anticipada de la solución que nosotros damos a esta cuestión, fijémonos, por ejemplo, en la constante K de la fórmula de la **gravitación universal** de Newton, que da la fuerza F_a con que se atraen dos masas M_1 y M_2 que están a la distancia D; masas que, cada una podemos sustituir, por otra M, que sea media proporcional entre ambas, a saber:

$$F_a = K \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{D^2} = K \cdot \frac{M^2}{D^2} \qquad [4]$$

Para ver el significado que debemos atribuir a esa constante K, empecemos por despejarla

$$K = F_a : \frac{M^2}{D^2} = F_a . D^2 . M^{-2} \qquad [5]$$

y entonces vemos que tal constante K es un **valor particular** de una función Z, de tres variables concretas, **independientes**, que son: la variable F, que tiene por valores las fuerzas; la variable D, que tiene por valores las longitudes o distancias, y la M que tiene por valores las masas, a saber:

$$Z = F . D^2 . M^{-2} \qquad [6]$$

siendo esa constante K el valor particular que toma Z cuando la fuerza toma por valor el F_a con que se atraen dos masas iguales a M, separadas la distancia D.

Tal valor de K lo da la experiencia, que enseña que dos masas de un gramo, separadas un cm., se atraen con una fuerza que vale aproximadamente: $6{,}47 . 10^{-8}$ dinas, por lo cual podremos expresar así la K:

$$K = 6{,}47 . 10^{-8} \text{ dina} . \text{cm}^2 . \text{gr}^{-2} \qquad [7]$$

Pero cabe preguntar: ¿qué significación debemos dar a esta expresión en la que figuran las cantidades concretas **dina, gramo** y **cm.** sometidas a operaciones de cálculo?

Eso es lo que tratamos de determinar.

Aplicaremos para ello el método de definiciones por abstracción, que tan fecundo es para definir conceptos nuevos.

LAS DEFINICIONES POR ABSTRACCION

Muchos matemáticos modernos, tales como Capelli y Rey Pastor, emplean el método de definiciones por abstracción, o sea, por relaciones de **equivalencia,** desde el principio de la Aritmética, pues definen el número natural como el ente que representa a un conjunto finito y a todos los que son coordinables con él.

Pero la coordinación de conjuntos es relación de equivalencia, porque goza de las tres propiedades: a) **reflexiva,** que expresa que todo conjunto α es coordinable consigo mismo; b) **simética,** que expresa que si α es coordinable con β, también β lo es con α; c) **transitiva,** que expresa que si α es coordinable con β y β es coordinable con γ, será α coordinable con γ.

Esa relación de equivalencia define unos nuevos elementos, que son los números naturales, tales como el número 5, que será elemento que es común al conjunto formado por los dedos de una mano y a todos los coordinables con él, como lo es el conjunto de las vocales; y sólo a ellos.

En este ejemplo vemos que, al aplicar el método de definición por abstracción, se tienen:

1.º **Unos elementos X_i que se comparan,** que son los conjuntos finitos;

2.º **Una relación de equivalencia que permite compararlos,** que es la coordenación de conjuntos;
3.º **Unos elementos X que se definen con ella,** que son los números naturales.

Lo que se consigue con este método es que los infinitos conjuntos X_i coordinables con un dado, se representan por un solo elemento X.

Este mismo método hemos conseguido aplicar para definir las diferentes clases de números que aparecen en las sucesivas ampliaciones del campo numérico, según puede verse en nuestro libro sobre «números reales y complejos».

Y así, por ejemplo, para definir por este método los **números racionales,** se tiene:

1.º **Unos elementos X_i que se comparan:** las razones de términos enteros, tales como éstas:

$$\frac{10}{4} \qquad \frac{15}{6} \qquad \frac{-10}{5}$$

2.º **Una relación de equivalencia que permite compararlas:** la proporcionalidad; pues se dice que dos de tales razones son equivalentes, o que forman proporción, cuando el producto de medios es igual al producto de extremos:

$$\frac{10}{4} = \frac{15}{6} \qquad \text{porque} \qquad 10 \times 6 = 4 \times 15$$

3.º **Unos elementos X que se definen por ella:** los números racionales, cada uno de los cuales es elemento común a una de tales razones y a todas sus equivalentes, y sólo a ellas, como por ejemplo:

Elementos X_i: Elementos X:

10/4 = 15/6 = 100/40 = 5/2 ... ... = cinco medios
4/6 = 8/12 = 2/3 ... ... = dos tercios

También en Geometría presta valiosos servicios este método; sobre todo para definir las longitudes, las áreas de los polígonos; los volúmenes de prismas; los elementos impropios o del infinito, etc.

Y así, para definir las longitudes tendremos:

1.º **Elementos X_i que se comparan:** los segmentos de recta.
2.º **Relación de equivalencia que permite compararlos:** la congruencia o superposición.
3.º **Elementos X que se definen por ella:** las longitudes, de cada una de las

cuales es la magnitud común a un segmento y a todos los que son congruentes con él, y sólo a ellos.

APLICACION A LAS FUNCIONES DE VARIABLES CONCRETAS

Supongamos ahora una función de variables concretas, tal como la función de la fórmula [2] o sea la

$$P = D/T = D \,.\, T^{-1} \qquad [8]$$

Si damos valores particulares a esas dos variables D y T, se tendrán expresiones tales como las siguientes:

$$\text{metro} \times \text{segundo}^{-1} \qquad \text{cm} \times \text{minuto}^{-1} \qquad 60 \text{ me} \times \text{min}^{-1}$$

Para comparar dos cualesquiera de tales expresiones; **podemos llamar razón** entre ambas al número que se obtiene hallando las razones entre cada dos de los valores homogéneos de esas expresiones, y sometiendo esas razones a las mismas operaciones que a las variables, es decir:

$$\frac{\text{metro} \times \text{segundo}^{-1}}{\text{cm} \times \text{minuto}^{-1}} = \frac{\text{metro}}{\text{cm}} \times \left(\frac{\text{seg}}{\text{min}}\right)^{-1} = 100 \times \left(\frac{1}{60}\right)^{-1} = 6.000$$

$$\frac{\text{metro} \times \text{seg}^{-1}}{60 \text{ me} \times \text{min}^{-1}} = \frac{\text{me}}{60 \text{ me}} \times \left(\frac{\text{seg}}{\text{min}}\right)^{-1} = \frac{1}{60} \left(\frac{1}{60}\right)^{-1} = 1$$

De las tres expresiones consideradas, debemos considerar como equivalentes, por definición, a la primera y la tercera, cuya razón es 1; pero no a la 1.ª y la 2.ª, cuya razón es 6.000.

Esta primera expresión, esa tercera, y todas las que son equivalentes a ellas, tienen un valor común, que podemos designar: metro/segundo, que será un valor particular de la función Q de dos variables concretas, o sea, de la función $\dfrac{D}{T}$.

Se trata, pues, de una definición por abstracción, pues se tiene:

1.º **Unos elementos X_i que se comparan:** las expresiones dichas.
2.º **Una relación que permite compararlas:** que su razón valga 1.
3.º **Unos elementos X que se definen por ella:** los valores particulares de la función de variables concretas de que se trate.

Aplicando esto al caso de la constante universal K de la gravitación; tendremos:

1.º **Elementos X_i comparables entre sí:** las expresiones que se obtienen al sustituir las F. D. M. de [6] por valores particulares, tales como los del 2.º miembro de [7].
2.º **Relación de equivalencia que permite comparar tales expresiones:** se dirá que son equivalentes cuando su razón valga 1.

Así, por ejemplo, si en [5] suponemos que M representa una masa particular y D una longitud particular, al representar F_a la fuerza con que se atraen dos masas iguales a M, separadas la distancia D, los segundos miembros de [5] y [7] deberán ser equivalentes, pues se debe tener:

$$\frac{K}{K} = 1 = \frac{F_a \,.\, D^2 \,.\, M^{-2}}{6{,}47 \,.\, 10^{-8} \text{ dinas} \,.\, \text{cm}^2 \,.\, \text{gr}^{-2}} =$$

$$= \left(\frac{F_a}{6{,}47 \,.\, 10^{-8} \text{ dinas}}\right) \cdot \left(\frac{D}{\text{cm}}\right)^2 \cdot \left(\frac{M}{\text{gr}}\right)^{-2}$$

Lo que se quiere expresar con la ley de Newton es que las fuerzas de atracción son proporcionales a las masas e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia; y un resultado de esa proporcionalidad es que el último miembro de estas igualdades es igual 1.

3.º Tenemos, en fin, **elementos X definidos mediante esa relación;** elementos que son los valores de la función Z de [6], uno de los cuales es el valor K de la constante de la gravitación universal, expresado, por ejemplo, como en la fórmula [7].

LAS FUNCIONES DE VARIABLES CONCRETAS COMO MAGNITUDES

Los valores X de una función de variables concretas **se pueden medir,** como vamos a ver, aplicando el razonamiento a la función P de [1], o sea, al producto D . T, aunque se comprenderá que el razonamiento es general.

Para ello observaremos que entre los valores de **P** y los números reales se pueden establecer **correspondencias biunívocas** que cumplen estas condiciones:

1.ª **El valor nulo:** al número cero le corresponde un valor de P, que se llama valor nulo, a saber:

$$0 \times \text{segundo} = 0 \times \text{hora} = \text{metro} \times 0 = \ldots = 0$$

2.ª **Unidad de medida:** al número 1 se le puede hacer corresponder cualquier valor, no nulo, de P, el cual, una vez elegido, se llama unidad de medida.

Así la unidad cegesimal P_c de P será:

$$P_c = \text{cm} \times \text{seg} = \text{metro} \times 0{,}01 \text{ seg} = \ldots$$

y la unidad técnica P_t de P será:

$$P_t = \text{metro} \times \text{seg} = \text{cm} \times 100 \ \ \text{seg} = \ldots$$

Asimismo, la unidad cegesimal Z_c de la función Z de [6] será:

$$Z_c = \text{dina} \times \text{cm}^2 \times \text{gr}^{-2}$$

La unidad práctica acorde será:

$$Z_a = \text{newton} \times \text{m}^2 \times \text{Kg}^{-2}$$

y la unidad técnica terrestre, o unidad técnica discorde, será:

$$Z_t = \text{Kg-peso} \times \text{me}^2 \times \text{Kg-masa}^{-2}$$

3.ª **Número de medida:** elegida la unidad de medida, a todo valor de P le corresponde un número real, que es la medida abstracta con aquella unidad, y recíprocamente, a todo número real, le corresponde un valor de P, que lo tiene por medida abstracta.

Así, al valor metro × hora, de P, le corresponde esta medida abstracta en el sistema cegesimal:

$$\frac{\text{met} \times \text{hora}}{\text{cm} \times \text{seg}} = \frac{\text{met}}{\text{cm}} \times \frac{\text{hora}}{\text{seg}} = 360.000$$

y esta otra en el sistema práctico:

$$\frac{\text{met} \times \text{hora}}{\text{met} \times \text{seg}} = \left(\frac{\text{met}}{\text{met}}\right) \cdot \left(\frac{\text{hora}}{\text{seg}}\right) = 3.600$$

Asimismo, aunque el valor concreto K de la constante de la gravitación es un valor único, tendrá diversas medidas abstractas en los diversos sistemas de unidades. En el sistema cegesimal, esa medida abstracta de K será:

$$\frac{K}{Z_c} = \frac{6{,}47 \times 10^{-8} \times \text{dina} \times \text{cm}^2 \,\text{gr}^{-2}}{\text{dina} \times \text{cm}^2 \times \text{gr}^{-2}} = 6{,}47 \times 10^{-8}$$

En el sistema práctico acorde será:

$$\frac{K}{Z_a} = \frac{6{,}47 \times 10^{-8} \,\text{dinas} \times \text{cm}^2 \times \text{gr}^{-2}}{\text{newton} \times \text{me}^2 \times \text{Kg}^{-2}} = 6{,}47 \times 10^{-11}$$

Y en el sistema técnico terrestre será:

$$\frac{K}{Z_t} = 6{,}47 \times 10^{-8} \times \frac{\text{dina}}{\text{Kg}-\text{peso}} \times \left(\frac{\text{cm}}{\text{me}}\right)^2 . \left(\frac{\text{gr}}{\text{Kg}}\right)^{-2} = \frac{6{,}47}{9{,}81} . 10^{-11}$$

Recíprocamente (volviendo a la función P), cuando se elije una unidad de medida, tal como la unidad cegesimal, P_c, a todo número real, tal como el $\sqrt{2}$, le corresponde un valor P_1 de P que tiene ese número por medida, a saber:

$$P_1 = \sqrt{2} \text{ cm} \times \text{seg} = \sqrt{2} \text{ me} \times 0{,}01 \text{ seg} = \ldots$$

4.º **Al cambiar la unidad de medida,** todas las medidas abstractas vienen multiplicadas por un factor constante, que es la medida de la unidad antigua, con la nueva. Y así, al pasar de la unidad cegesimal P_c a la unidad técnica P_t todas las medidas vienen multiplicadas por este factor:

$$\frac{\text{cm} \times \text{seg}}{\text{me} \times \text{seg}} = \frac{\text{cm}}{\text{me}} \times \frac{\text{seg}}{\text{seg}} = 0{,}01$$

MAGNITUDES FISICAS Y MAGNITUDES ANALITICAS

Aunque las funciones de variables concretas sean, a su vez, magnitudes concretas, que se pueden medir, no suelen ser verdaderas magnitudes de carácter **físico,** sino de carácter **analítico o algébrico**; conforme a lo que indica Julio Palacios en el párrafo antes citado, al hablar de las constantes universales propiamente dichas, las cuales dice que «no son atributos de cada cuerpo, variables con las circunstancias, lo cual hace que sea imposible realizar un patrón para compararlas, que sirva de unidad»...

Precisamente la causa principal de los confusionismos y paradojas de las fórmulas de Física es el que se identifican erróneamente magnitudes de carácter físico o geométrico con otras que son simplemente de carácter analítico.

Ya en Geometría, al tratar de la medida de áreas, se identifica erróneamente el centímetro superficial (cms) con la segunda potencia del centímetro lineal (cm^2) llamando a las dos magnitudes con un nombre común: centímetro cuadrado. Pero a poco que se reflexione se comprenderá que son de naturaleza muy diferente, pues el cm superficial es un **área;** la de un cuadrado que tiene de lado un cm lineal; mientras que la segunda potencia del cm lineal (cm^2) es una **potencia,** o sea el producto cm $\times$cm, que viene a ser un valor particular de la función de variable concreta D^2.

Los autores de Geometría ya suelen advertir que cuando se dice brevemente «que el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura», debe entenderse que el número que mide el área de un rectángulo, **en un sistema cuadrático** es igual al producto de los números que miden su base y su altura. Pero luego, en la práctica, no se hace caso de esta interpretación, y cuando se pide el área de un rectángulo que tiene de dimensiones 2 cm y 3 cm, se escribe:

$$R = 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$$

lo cual es falso si con la R se quiere representar el área concreta del rectángulo. Una prueba de ello es que si se tomase por unidad el área del **triángulo rectángulo** isósceles que tiene por cateto un cm, la regla para hallar el área del rectángulo en este sistema **triangular** se expresaría brevemente diciendo que es igual **al doble** del producto de sus dos dimensiones, y se aplicaría al problema dicho así:

$$R = 2 \,.\, 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$$

En cambio, interpretando correctamente las reglas, esos cálculos se harán así:

$$\frac{R}{\text{cmsu}} = \frac{B}{\text{cm}} \times \frac{A}{\text{cm}} = 3 \,.\, 2 \rightarrow R = 6 \text{ cmsu}$$

$$\frac{R}{\dfrac{1}{2}\text{ cmsu}} = 2 \,.\, \frac{B}{\text{cm}} \times \frac{A}{\text{cm}} = 12 \rightarrow R = 6 \text{ cmsu}$$

Despejando R en la primera de esas fórmulas se obtiene:

$$R = \frac{B}{\text{cm}} \times \frac{A}{\text{cm}} \,.\, \text{cmsu} = B \,.\, A \,.\, \frac{\text{cmsu}}{\text{cm}^2} = B \,.\, A \,.\, H$$

fórmula que nos dice que el valor **concreto** del área de un rectángulo **no es igual al producto de las longitudes concretas de su base y altura,** sino a ese producto multiplicado por una **constante universal** H, que es la relación entre el cm superficial y la segunda potencia del cm lineal, o más generalmente la relación entre el área de un cuadrado y la segunda potencia de su lado; el cual es un valor particular de la función de dos variables concretas: S/D^2, es decir, de la razón entre un área arbitraria y el cuadrado de una longitud arbitraria.

Si se quiere que esa constante H desaparezca, habrá que escribir fórmulas numéricas, a saber:

$$\frac{R}{\text{cms}} = r \qquad \frac{A}{\text{cm}} = a \qquad \frac{B}{\text{cm}} = b \qquad r = a \,.\, b$$

Esto mismo se puede decir de la mayoría de las fórmulas de Física. Si se aplican con magnitudes concretas, necesitan casi siempre **factores constantes,** que tiene el carácter de constantes universales, que son valores particulares de funciones de variables concretas. Si se quiere prescindir de esas constantes, habrá que escribir **fórmulas numéricas,** en sistemas adecuados.

APLICACION A UN EJEMPLO DE MECANICA

Apliquemos las ideas anteriores a un ejemplo: el de la **ecuación fundamental de la Dinámica,** que puede servir de norma para la interpretación de los confusionismos y paradojas de las demás fórmulas de Física, y de algunas de Geometría.

Los físicos expresan esa ecuación diciendo que la **fuerza** aplicada a un punto material es igual **al producto** de la masa de ese punto por la aceleración que la fuerza le produce; pero muchos técnicos la expresan diciendo que esa fuerza es igual **al cociente** de dividir tal producto por la aceleración de la gravedad, lo cual es paradógicamente incompatible con lo anterior.

Después de lo dicho se comprenderá que, si se trata de magnitudes **concretas,** ninguno de los dos enunciados son correctos, porque la fuerza es una magnitud de carácter **físico,** mientras que el producto de la masa por la aceleración, o el cociente de dividir este producto por esa otra cantidad, es de carácter **analítico,** o sea, de naturaleza bien diferente.

Para aclarar la cuestión, supongamos primero tres variables concretas **independientes;** F, M, A, cuyos valores son, respectivamente, las fuerzas, las masas y las aceleraciones y llamemos Z al factor por el cual debe multiplicarse el producto M . A para obtener F, es decir:

$$F = M \,.\, A \,.\, Z \qquad \text{o sea} \qquad Z = \frac{F}{M \,.\, A} \qquad [8]$$

Esta Z será una función de esas tres variables concretas independientes.

Supongamos ahora una fuerza F_a, que aplicada a una masa M, le produce una aceleración A. Si suponemos una aceleración constante y diversas masas, como ocurre con cuerpos diversos que caen en el vacío, las fuerzas correspondientes, F_a serán proporcionales a esas masas. Asimismo, suponiendo una masa constante, a la que se le aplican sucesivas fuerza, éstas serán proporcionales a las aceleraciones producidas. Y aplicando ahora el principio de la proporcionalidad compuesta resultará que en general la fuerza F_a será **proporcional** al producto M . A; y si llamamos C a la constante de proporcionalidad, se tendrá:

$$F_a = M \,.\, A \,.\, C \qquad \text{siendo} \qquad C = \frac{F_a}{M \,.\, A} \qquad [9]$$

Ya se comprende que esta C es una constante universal, que es valor particular de la función Z de [8].

Para medir las fuerzas, las masas y las aceleraciones, podemos tomar **unidades** cualesquiera F_1 M_1 A_1, a las cuales corresponderá una unidad Z_1, de la magnitud Z, a saber:

$$F_1 = M_1 \,.\, A_1 \,.\, Z_1 \qquad \text{o sea} \qquad Z_1 = \frac{F_1}{M_1 \,.\, A_1} \qquad [10]$$

Si ahora dividimos la primera fórmula de [9] por esta otra, y llamamos con letras minúsculas los valores de las razones, o sea los números de medida, será:

$$\frac{F_a}{F_1} = \frac{M}{M_1} \,.\, \frac{A}{A_1} \,.\, \frac{C}{Z_1} \qquad f = m \,.\, a \,.\, c \qquad [11]$$

Puede suceder que esas tres unidades sean **acordes**, es decir, que la unidad F_1 de fuerza, aplicada a la unidad M_1 de masa, le produzca la unidad A_1 de aceleración; en tal caso, la unidad Z_1 será igual a la constante C, y su cociente **c**, valdrá 1.

Tal ocurre, por ejemplo, cuando se trata de unidades **cegesimales,** o unidades del sistema **práctico acorde,** pues se tiene:

$$\text{dina} = \text{gr} - \text{masa} \times \text{uca} \times C \qquad \text{newton} = \text{Kg} - \text{masa} \times \text{uma} \times C \qquad [12]$$

y la fórmula que relaciona entonces los números abstractos que miden la fuerza, F_a con la masa M a la que se aplica y con la aceleración A, que le produce será: $f = m \,.\, a$ [13]; que se puede obtener directamente dividiendo la [9] por cualquiera de las [12].

Puede suceder también que la unidad F_1 de fuerza, sea **el peso** de la unidad M, de masa, peso que le produce a esa masa la aceleración G de la gravedad, que vale:

$$G = 981 \text{ uca} = 9{,}81 \text{ uma} = g\, A_1.$$

Por ejemplo, en el sistema técnico **terrestre,** la unidad de fuerza es **el Kg-peso** que es el peso de la unidad de masa (que es el Kg-masa). Se tendrá entonces:

$$\text{Kg-peso} = \text{Kg-masa} \,.\, g\ A_1 \,.\, C \qquad [14]$$

Dividiendo la primera fórmula [9] por esta otra, y llamando **f'** el número que mide F_a con esa unidad terrestre, resultará:

$$\frac{F_a}{\text{Kg-peso}} = \frac{M}{\text{Kg-masa}} \,.\, \frac{A}{A_1} \,.\, \frac{1}{g} \qquad \mathbf{f'} = \frac{m \,.\, a}{g} \qquad [15]$$

Resumiendo, llegamos a las siguientes conclusiones:

La ecuación fundamental de la Dinámica, **en forma general,** o sea, aplicable a todos los sistemas de medida, de dos maneras puede expresarse: o relacionando magnitudes **concretas,** como en [9], o sus **números** de medida, como en [11].

Según la primera fórmula, el valor concreto de la fuerza será igual al producto de la masa por la aceleración que le produce, **y por una constante universal,** que es la relación entre una fuerza, tal como la dina y el producto de una masa, tal como el gramo-masa, por la aceleración que le produce. Y según la segunda forma: el **numero abstracto** que mide la fuerza es igual al producto de los que miden la masa y la aceleración que le produce multiplicado por un **coeficiente numérico.**

Según [13] y [15] este coeficiente numérico **es igual a la unidad,** si las unidades de medida forman un sistema acorde; y vale el inverso de **g,** o sea del número que mide la aceleración de la gravedad, si las unidades pertenecen a un sistema terrestre.

Se puede escribir también la ecuación fundamental de la dinámica en una forma que **no necesita coeficiente,** siendo válida para cualquier sistema de unidades, ya se interprete con magnitudes **concretas,** o con sus **números** de medida.

Basta para ello sustituir la masa M del cuerpo, por el cociente P/G, de dividir el peso del cuerpo por la aceleración de la gravedad, en cuyo caso la fuerza aplicada F_a es igual a ese cociente, multiplicado por la aceleración A que aquella fuerza produce:

$$F_a = \frac{P}{G} \, . \, A \qquad \text{o sea} \qquad \frac{F_a}{A} = \frac{P}{G}$$

En efecto, basta ver que las dos fuerzas F_a y P, como se aplican a un mismo cuerpo, serán proporcionales a sus respectivas aceleraciones, A y G.

Decimos que también la fórmula se puede aplicar en sentido **numérico,** pues si medimos las dos fuerzas F_a y P con una unidad de fuerza cualquiera F_1, y las dos aceleraciones A y G, con una unidad de aceleración cualquiera A_1, y llamamos con letras minúsculas a los números de medida, se tendrá:

$$F_a/F_1 = \frac{P/F_1}{G/A_1} \, . \, \frac{A}{A_1} \qquad \text{o sea} \qquad f = \frac{p}{g} \, . \, a$$